На правах рукописи

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 5

Работа выполнена в Таджикском национальном университете

НАУЧНЫЙ КОНСУЛЬТАНТ: доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор
Шабозов Мирганд Шабозович

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич,** доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, профессор кафедры общих проблем управления

Осипенко Константин Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, МАТИ – Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского, заведующий кафедрой высшей математики

Горбачев Дмитрий Викторович, доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет, профессор кафедры прикладной математики и информатики

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: ФГАОУ ВПО Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н.Ельцина

Защита состоится *13 мая 2016 г. в 14:00 часов* на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан по адресу: 734063, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj.

Автореферат разослан «____» ____________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета **У.Х. Каримов**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. К настоящему времени в решении экстремальных задач теории аппроксимации функций как в действительной, так и в комплексной области достигнут значительный прогресс. По этой проблематике, берущей своё начало от основополагающих работ П.Л.Чебышёва, К.Ф.Вейерштрасса, С.Н.Бернштейна, А.Н.Колмогорова, написаны десятки монографий (см., например, монографии И.П.Натансона, В.Л.Гончарова, Н.И.Ахиезера, А.Ф.Тимана, С.М.Никольского, Н.П.Корнейчука, В.К.Дзядык, С.Б.Стечкина и Ю.Н.Субботина, В.М.Тихомирова, А.И.Степанец, Ph.J.Davis, G.G.Lorentz, A.Pinkus и др.).

Особую роль сыграли пионерские работы А.Н.Колмогорова[1], а также работы С.М.Никольского[2], С.Б.Стечкина[3] и Н.П.Корнейчука[4], связанные с решением экстремальных задач, когда требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения на заданном классе функций и указать для этого класса наилучший аппарат приближения фиксированной размерности. Усилиями многих математиков, и в первую очередь учеников и последователей Колмогорова, Никольского и Стечкина, такие экстремальные задачи для наиболее употребляемых классов функций решены. Тем не менее, решения указанных задач найдены в небольшом количестве случаев для действительных классов функций. Что же касается решения экстремальных задач для наилучших приближений классов целых функций или классов аналитических функций, то здесь точные результаты известны в редких случаях. Поэтому естественно, что в последнее время всё больше внимания многих специалистов, работающих в области теории аппроксимации, обращено на экстремальные задачи приближения целых функций и аналитических в круге функций.

Цели и задачи исследования.

Основной целью работы является решение ряда конкретных экстремальных задач, связанных с:

- наилучшим приближением 2π-периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ и нахождением точных значений различных n-поперечников некоторых классов функций;

[1]Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math., 1936. V.37. P.107-110.

[2]Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т.10. С.295-332.

[3]Стечкин С.Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956. Т.20. С.643-648.

[4]Корнейчук Н.П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1971. Т.35. С.93-124.

- наилучшим приближением функций, суммируемых с квадратом на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа и вычислением точных значений средних ν-поперечников функциональных классов;
- отысканием наилучших линейных методов приближения классов аналитических в единичном круге функций и значений n-поперечников классов функций, принадлежащих пространству Харди.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются современные методы теории функций и функционального анализа оптимизационного содержания и методы решения экстремальных задач теории приближения функций. При решении экстремальных задач в качестве аппарата приближения используются тригонометрические полиномы, целые функции и комплексные алгебраические полиномы.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- найдены точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых усреднённым с весом модулем непрерывности r-ых производных функций.
- установлены неулучшаемые неравенства Джексона – Стечкина, связывающие наилучшие приближения суммируемых с квадратом на всей оси функции посредством целых функций экспоненциального типа с обобщённым модулем непрерывности m-го ($m \in \mathbb{N}$) порядка и вычислены точные значения средних ν-поперечников некоторых функциональных классов.
- решена задача о построение наилучших линейных методов приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций и вычислены точные значения n-поперечников указанных классов функций, принадлежащих пространству Харди.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться в других задачах теории приближений, в вопросах кодирования и восстановления функций. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям математики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинаре отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2008-2015 гг.);
- международной конференции „Современные проблемы анализа и преподавания математики", посвящённой 105-летию академика С.М.Никольского (Москва, 17-19 мая 2010 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложения" (Душанбе, 28-30 июня 2011 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 17-18 июня 2013);
- четвёртой международной конференции „Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвящённой 90-летию члена-корреспондента РАН, академика Европейской Академии наук, профессора Л.Д.Кудрявцева (Москва, 25-29 марта 2013 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной конференции „Функциональные пространства и теория приближения функций", посвящённой 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского (Москва, 25-29 мая 2015 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 31 печатных работах автора, список которых приведён в конце автореферата. Из них 23 статьей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК России, а 8 статьей в трудах международных конференций. Из совместных с М.Ш.Шабозовым работ [9,10,12,13,21] на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором. В некоторых случаях для целостности изложения приводятся также совместные с М.Ш.Шабозовым результаты, что во всех таких случаях специально оговорено.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, списка цитированной литературы из 200 наименований, занимает 229 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации

Изложим основные результаты диссертации по главам. В первой главе изучается наилучшее приближение 2π-периодических суммируемых с квадратом функций $f(x)$ тригонометрическими полиномами на классах функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков.

В первом параграфе первой главы приводятся основные определения, обозначения, вспомогательные факты и краткая история полученных точных констант в неравенстве Джексона – Стечкина для различных модификаций модулей непрерывности. Далее приняты следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных чисел вещественной оси, $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу вещественных 2π-периодических функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\| \overset{def}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Символом $\mathcal{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка, не превосходящего $n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$ величина её наилучшего полиномиального приближения элементами $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2},$$

где $S_{n-1}(x, f)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f; $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$; $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус и синус коэффициенты Фурье функции f порядка k.

Под $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+;\ L_2^{(0)} \equiv L_2)$ понимаем множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Аналогично для банахова пространства X 2π-периодических функций определим множества $X^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$.

Символом $\Delta_h^m(f)$ обозначим норму разности m-го порядка функции $f \in L_2$ с шагом h

$$\Delta_h^m(f) := \|\Delta_h^m f(\cdot)\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kh) \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

и равенством

$$\omega_m(f;t) \overset{def}{=} \sup\Big\{ \Delta_h^m(f): \ |h| \le t \Big\} \tag{1}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Для оценки наилучших приближений 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2, наряду с (1), часто используют следующую усреднённую характеристику гладкости

$$\Omega_m(f;t) = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f\|_{L_2}^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \tag{2}$$

где $t > 0$; $\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$. Основные свойства характеристики гладкости (2) в качестве обобщённого модуля непрерывности m-го порядка изучены в работе М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[5].

В теории аппроксимации одной из основных экстремальных задач является задача вычисления точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина. Под неравенствами Джексона – Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве X понимают неравенства, в которых величина $E(f,Y)_X$ – наилучшего приближения функции конечномерным подпространством Y размерности n оценивается через некоторую характеристику гладкости самой функции или некоторой её производной

$$E(f,Y)_X \le \frac{\chi_r}{n^r} U_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} \right)_X,$$

где X есть пространство C или L_p $(1 \le p < \infty)$, а U_m – один из вышеперечисленных модулей непрерывности (1) или (2).

Первые точные константы в неравенстве Джексона были получены Н.П.Корнейчуком[6] для модуля непрерывности первого порядка ω_1 в прос-

[5]Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // ДАН России. 2013. Т.451, №6. С.625-628.

[6]Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. 1962. Т.145, №3. С.514-516.

транстве $C(0,\,2\pi]$ и Н.И.Черных[7,8] для пространства $L_2(0,\,2\pi]$. После результатов Н.П.Корнейчука и Н.И.Черных появился интерес к получению точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина и в других банаховых пространствах. В 1992 г. Н.И.Черных доказал точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L_p(0, 2\pi]$, $1 \le p < 2$. Позднее этой тематикой занимались, например, Л.В.Тайков[9,10], В.И.Бердышев[11], В.В.Арестов и В.Ю.Попов[12], А.Г.Бабенко[13], В.В.Жук[14], В.И.Иванов и О.И.Смирнов[15], А.А.Лигун[16], В.А.Юдин[17], В.В.Шалаев[18], С.Б.Вакарчук[19,20], М.Ш.Шабозов[21], С.Б.Вакарчук с соавторами[22,23] и многие другие.

Ясно, что наилучшая константа, вообще говоря, зависит как от пространства X, так и от параметров m, n, r и γ. Поэтому её обозначают через $\chi_{n,r}(X; U_m; \gamma)$ и задача сводится к отысканию величины

$$\chi_{n,r}(X; U_m; \gamma) = \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_X}{U_m(f^{(r)}, \gamma/n)_X} : \ f \in X^{(r)}, f^{(r)} \neq const\right\}, \qquad (3)$$

$$(r \in \mathbb{Z}_+, \ m, n \in \mathbb{N}, \ \gamma \in \mathbb{R}_+),$$

[7] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т.2, №5. С.513-522.

[8] Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

[9] Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. 1977. Т.22, №4. С.535-542.

[10] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т.25, №2. С.217-223.

[11] Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды Матем. ин-та АН СССР. 1967. Т.88. С.3-16.

[12] Арестов В.В., Попов В.Ю. Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Известия вузов. 1995. №8, С.13-20.

[13] Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки, 1986. Т.39, №5. С.651-664.

[14] Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. 1967. Т.201. С.263-266.

[15] Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: ТулГУ. 1995. 192 с.

[16] Лигун А.А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. 1973. Т.14, №1. С.21-30.

[17] Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т.29, №2. С.309-315.

[18] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т.43, №1. С.125-129.

[19] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

[20] Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-19.

[21] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

[22] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т.92, №4. С.497-514.

[23] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. Tomus 38, №2. P.154-165.

где X есть C или L_p $(1 \le p < \infty)$, U_m – некоторая характеристика гладкости функции $f \in X^{(r)}$, например ω_m или Ω_m. В случае приближения функции $f \in X^{(r)}$ с помощью линейных операторов A, отображающих $X^{(r)}$ в подпространство $\mathcal{T}_{2n-1}$, приходим к задаче отыскания величины

$$\chi'_{n,r}(X; U_m; \gamma) =$$

$$= \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{n^r \|Af - f\|}{U_m(f^{(r)}, \gamma/n)_X} : f \in X^{(r)}, f^{(r)} \neq const \right\} : \ A : X^{(r)} \to \mathcal{T}_{2n-1} \right\}. \quad (4)$$

Перечислим основные результаты в обозначениях (3) и (4), полученные в этом направлении.

Н.П.Корнейчук[24]: $\dfrac{k+1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) \le \chi_{n,o}\left(C, \omega; \dfrac{\pi}{k}\right) \le \dfrac{k+1}{2}, \ k, n \in \mathbb{N};$

Н.И.Черных[7,8]: $\chi_{n,o}(L_2, \omega; \pi) = \chi'_{n,o}(L_2; \omega, \pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}};$

$$\chi_{n,o}(L_2, \omega_m; 2\pi/n) = (C_{2m}^m)^{-1/2}, \ \ C_p^q = \frac{p!}{(p-q)!}, \ p, q \in \mathbb{N};$$

С.Б.Стечкин[25]: $1 \le \chi'_n(L_p; \omega, \pi) \le \dfrac{3}{2}, \ 1 \le p < \infty;$

Л.В.Тайков[26]: $\left(\dfrac{1}{2(1-\cos\tau)}\right)^{1/2} \le \chi_{n,r}(L_2; \omega; \tau) \le \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\tau^2}\right)^{1/2}, \ n \in \mathbb{N},$

$r \in \mathbb{Z}_+, \ 0 < \tau \le \pi;$

А.Г.Бабенко[13]: $\chi_{n,o}(L_2; \omega; \tau) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(\tau/2) - 1/2}{\tau \sin(\tau/2)}\right)^{1/2}, n \in \mathbb{N}, \tau = \pi/\nu,$

$\nu \ge 1 + 3n/2, \ \nu \in \mathbb{N};$

С.Б.Вакарчук[19,20]: $\chi_{n,r}(L_2; \, \Omega_m, \, \tau) = \left\{ 2\left(1 - \dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)\right\}^{-m/2}, \ 0 < \tau \le \pi/2;$

$$\left(\frac{1}{2(1-\cos\tau)}\right)^{m/2} \le \chi_{n,r}(L_2; \omega_m; \tau) \le \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{m/2},$$

$$m, n \in \mathbb{N}, \ r \in \mathbb{Z}_+, \ 0 < \tau \le \pi.$$

[24]Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. 1982. Т.32, №5. С.669-674.

[25]Стечкин С.Б. О приближении периодических функций суммами Фавара // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1971. Т.109. С.26-34.

[26]Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

Напомним необходимые определения и обозначения, которыми мы пользуемся в дальнейшем. Пусть S – единичный шар в L_2; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное множество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon > 0 :\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\Big\} :\ \Lambda_{n+1} \subset L_2\Big\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\sup\Big\{\inf\Big\{\|f - g\| :\ g \in \Lambda_n\Big\} :\ f \in \mathfrak{M}\Big\} : \Lambda_n \subset L_2\Big\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\sup\Big\{\|f\| :\ f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\Big\} :\ \Lambda^n \subset L_2\Big\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \mathcal{L}f\| :\ f \in \mathfrak{M}\Big\} :\ \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset L_2\Big\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \mathcal{L}^{\perp}f\| :\ f \in \mathfrak{M}\Big\} :\ \mathcal{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset L_2\Big\},$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским, линейным и проекционным* n-поперечниками.

Пусть $\Phi(u)$ $(u \geq 0)$ – произвольная непрерывная неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Обозначая через U_m один из следующих характеристик гладкости ω_m или Ω_m, для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$ и $0 < h \leq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$ введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_{p,h}^{(r)}\Big(U_m; \varphi\Big) = \left\{ f \in L_2^{(r)} :\ \int\limits_0^h U_m^p(f^{(r)}; t)_2\, \varphi(t) dt \leq 1 \right\},$$

$$W_{p,h}^{(r)}\Big(U_m; \varphi, \Phi\Big) = \left\{ f \in L_2^{(r)} :\ \int\limits_0^h U_m^p(f^{(r)}; t)_2\, \varphi(t) dt \leq \Phi^p(h) \right\}, \qquad (5)$$

для которых найдём значения выше n-поперечников.

Во втором параграфе первой главы с целью компактного изложения полученных ранее результатов в задаче отыскания точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина вводится в рассмотрение экстремальная аппроксимационная характеристика следующего вида:

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in (0, \infty)$, $h \in (0, \pi/n]$, φ – весовая функция на $[0, h]$, т.е. неотрицательная, суммируемая, не эквивалентная нулевой функции на $[0, h]$. Основным результатом данного параграфа является следующая общая

Теорема 1.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, φ – *весовая функция на* $[0, h]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{A_{n,p}^{r,m}(\varphi; h)\right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) \leq \left\{\inf_{n \leq k < \infty} A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h)\right\}^{-1}, \tag{6}$$

где

$$A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h) = 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}, \quad k \geq n, \ k \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что теорема 1.2.1 при $p = 2$ содержит результат А.А.Лигуна[27]. В связи с вопросом о точности неравенства (6), требуется установить равенства $\inf\limits_{n \leq k < \infty} A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h) = A_{n,p}^{r,m}(\varphi; h)$ для произвольной весовой функции φ, на отрезке $[0, h]$ возникает задача: какими структурными и дифференциальными свойствами должна обладать функция φ, чтобы неравенства (6) обращались в равенства? Справедлива следующая

Теорема 1.2.2. *Пусть весовая функция* φ *на отрезке* $[0, h]$, *является непрерывной и дифференцируемой. Если при некоторых* $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$ *и любых* $t \in [0, h]$ *выполнено дифференциальное неравенство*

$$(rp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \tag{7}$$

то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < h \leq \pi/n$ *справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;\, h) = 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Поскольку для $f \in L_2^{(r)}$ её последовательные производные $f^{(s)} \in L_2$ $(s = 0, 1, \ldots, r-1;\ f^{(0)} \equiv f)$, то представляет интерес изучение поведения величины наилучших приближений $E_{n-1}(f^{(s)})$ на классе $L_2^{(r)}$.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $s = 0, 1, \ldots r$; $r \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi(t)$ – *весовая функция на отрезке* $[0, h]$, *удовлетворя-*

[27]Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1978. Т.24, №6. С.785-792.

ющая условию (7). Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (8)$$

Равенство (8) при $s=r$ и $\varphi\equiv 1$ ранее было получено М.Ш.Шабозовым[21]. В частности, из равенства (8) вытекает

Следствие 1.2.6. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$, $\gamma\ge 0$, $0<\beta\le\pi$, $0<h\le\pi/n$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2 \sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}. \qquad (9)$$

В частности, из (9) при $s=r\in\mathbb{N}$, $p=2$, $0<\gamma\le 2r-1$, $\beta=\pi/2$ и $h=\pi/n$ получаем результаты Н.Айнуллоева[28], а в случае $s=r$ и выполнении остальных условий следствия 1.2.6 получаем результат М.Г.Есмаганбетова[29].

Третий параграф первой главы посвящён вычислению n-поперечников следующих классов функций

$$W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\varphi) = \left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\,\varphi(t)dt\le 1\right\},$$

$$W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\varphi,\,\Phi) = \left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\,\varphi(t)dt\le \Phi^p(h)\right\},$$

определённых при любых $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$ и $0<h\le\pi/n$, а φ – весовая функция на $[0,h]$, $\Phi(h)$ – мажоранта, определённая в (5). Полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_2:\ f\in\mathfrak{M}\right\}.$$

[28]Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. 1986. С.3-10.

[29]Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. 1999. Т.65, №6. С.816-820.

Одним из основных результатов третьего параграфа первой главы является

Теорема 1.3.1. *При любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq 2$ и выполнении неравенства (7), при любом φ справедливы равенства*

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\varphi);L_2\right)=\delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\varphi);L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\varphi)\right)_{L_2}=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников: бернштейновский $b_k(\cdot)$, колмогоровский $d_k(\cdot)$, линейный $\lambda_k(\cdot)$, гельфандовский $d^k(\cdot)$, проекционный $\pi_k(\cdot)$.

Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций рассматривались, например, А.В.Ефимовым, А.Ф.Тиманом, Н.П.Корнейчуком, В.И.Бердышевым, С.Милорадовичем, С.А.Теляковским, А.И.Степанцом, С.Б.Вакарчуком, М.Ш.Шабозовым. Задача подобного рода для класса функций $W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\varphi)$ также представляет определённый интерес. Если $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций, заданных и определённых на $[0,2\pi]$, то положим

$$\Im_n(\mathfrak{N})=\sup\Big\{\,|a_n(f)|:\ f\in\mathfrak{N}\Big\}=\sup\Big\{\,|b_n(f)|:\ f\in\mathfrak{N}\Big\}.$$

Теорема 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.1 справедливы равенства*

$$\Im_n\left(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\varphi)\right)=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Положим $(nh-\pi)_+=\Big\{\,0,\text{ если } nh\leq\pi;\ nh-\pi,\text{ если } nh>\pi\Big\}$. В этом же параграфе доказано следующее утверждение.

Теорема 1.3.5. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $0<p\leq 2$ и $0\leq\gamma\leq rp-1$. $\Phi\in C[0,2\pi]$ и для некоторой $h_*\in[0,\pi/n]$ достигается нижняя грань*

$$\inf_{0\leq h\leq 2\pi}\frac{\Phi(h)}{\left(\int\limits_0^{\min(h,\pi/n)}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma nt dt+\dfrac{(nh-\pi)_+}{n}\right)^{1/p}}=Q. \tag{10}$$

Тогда справедливы равенства

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\,\sin^\gamma nt,\,\Phi\Big);\,L_2\right)=\delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\,\sin^\gamma nt,\,\Phi\Big);\,L_2\right)=$$

$$= E_{n-1}\Big(W^{(r)}_{p,h}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\Big) = 2^{-m} n^{-r} Q,$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников $b_k(\cdot), d_k(\cdot), d^k(\cdot), \lambda_k(\cdot), \pi_k(\cdot)$. Условие (10) выполняется для функции $\Phi_*(h) = h^\alpha$, где

$$\alpha \geq \frac{\pi}{p}\left\{\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma t dt\right\}^{-1}.$$

В случае $\gamma \equiv 0$ из теоремы 1.3.5 следует результат A.Pinkus[30].

В четвёртом параграфе первой главы рассматривается задача оптимизации неравенства Джексона – Стечкина с целью отыскания минимальной константы относительно всего множества приближающих подпространств фиксированной размерности N. Отметим, что в случае первого модуля непрерывности в пространстве $C(0, 2\pi]$ с равномерной нормой Н.П.Корнейчук[6] вычислил значение минимальной константы Джексона и показал, что задача о минимальной константе сводится к задаче вычисления n-поперечника по Колмогорову соответствующего класса функций. В случае пространства L^2 аналогичная задача рассмотрена Н.А.Барабошкиной[31], где найденные ею нижние оценки для минимальных констант Джексона совпадают с известными оценками сверху, установленными Н.И.Черных[7,8], В.А.Юдиным[17] и С.Н.Васильевым[32].

Обозначим через

$$W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h} = \left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p}$$

среднее в p-ой степени значение модуля непрерывности порядка $\omega_m(f^{(r)};t)$ с суммируемым весом $\varphi(t) \geq 0$, где $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi$ и положим $L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi) = \Big\{f \in L_2^{(r)} :\ W_m(f^{(r)};\,\varphi)_{p,h} \leq 1\Big\}$.

В этих обозначениях отыскание наименьшей константы в неравенстве

[30]Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. P.105-106.

[31]Baraboshkina N.A. The Least Constant in Jackson's Inequality for Best Approximations of Functions in L^2 by Finite-Dimensional Subspaces // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 2004, №1. P. S128-S136.

[32]Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т.385, №1. С.11-14.

Джексона – Стечкина равносильно задаче вычисления точной верхней грани

$$\mathbb{K}_{m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2, \Im_N\right) = \sup\left\{\frac{E(f,\Im_N)_2}{W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h}}:\ f\in L_2^{(r)}\right\}.$$

Здесь мы будем искать минимальную константу относительно всего множества приближающих подпространств $\Im_N \subset L_2$ фиксированной размерности N. Этим мы покажем, что полученные ранее результаты не могут быть улучшены за счёт перехода к другим подпространствам той же размерности:

$$\mathbb{K}_{N,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \inf\left\{\mathbb{K}_{m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2, \Im_N\right):\ \Im_N\subset L_2\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sup\left\{\frac{E\left(f,\Im_N\right)_2}{W_m\left(f^{(r)};\varphi\right)_{p,h}}:\ f\in L_2^{(r)}\right\}:\ \Im_N\subset L_2\right\}.$$

Положим также

$$E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right)_2 = \sup\left\{\|f-S_{n-1}(f)\|_2:\ f\in L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right\}.$$

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.2.2. Тогда при всех $m,n\in\mathbb{N}$ и $0<h\le\pi/n$ справедливы равенства*

$$\mathbb{K}_{2n,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \mathbb{K}_{2n-1,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right)_2 =$$

$$= \delta_{2n}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi), L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left\{\int_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k-поперечников $b_k(\cdot), d^k(\cdot), d_k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ и $\pi_k(\cdot)$. Все k-поперечники реализуются частичными суммами ряда Фурье $S_{k-1}(f;t)$.

Из теоремы 1.4.2 вытекает результат работы М.Г.Есмаганбетова[29].

Следствие 1.4.1. *Пусть $\varphi_*(t)=\sin^\gamma(\beta t/h);\ 0\le\gamma\le rp-1,\ r\ge1$, $0<p\le2$. Тогда имеют место равенства*

$$\mathbb{K}_{2n,m,p,h,\varphi_*}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \mathbb{K}_{2n-1,m,p,h,\varphi_*}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) =$$

$$= \delta_{2n}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi_*), L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi_*), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из перечисленных выше k-поперечников.

В завершающем пятом параграфе первой главы приводятся результаты, обобщающих результаты параграфов 1.2 – 1.4 на случай дробного производного в смысле Вейля. Следует отметить, что ряд экстремальных задач теории аппроксимации, связанный с понятием дробной производной Вейля в пространствах L_p, $1 \leq p \leq \infty$, ранее рассматривался в работе А.И.Козко[33] и для классов функций с усреднённым значением модуля непрерывности m-го порядка, принадлежащих пространству L_2, в работах М.Г.Есмаганбетова[29], М.Ш.Шабозова и С.Д.Темурбековой[34].

В последнее время часто используются различные модификации классического модуля непрерывности m-го ($m \in \mathbb{N}$) порядка (1). Результаты, полученные в пятом параграфе, связаны с понятием модуля непрерывности дробного порядка. Это понятие было введено почти одновременно в 1977 году в работах P.L.Butzer, H.Dyckhoff, E.Goerlich, R.L.Stens[35] и R.Tabersky[36]. Следуя обозначениям[35,36], определим разности дробного порядка β ($\beta \in \mathbb{R}_+$) функции $f(x)$ в точке x ($x \in \mathbb{R}$) с шагом h ($h \in \mathbb{R}$) равенством

$$\Delta_h^\beta f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\beta}{\nu}f(x+(\beta-\nu)h).$$

Модуль непрерывности произвольного дробного порядка $\beta \in \mathbb{R}_+$ функции $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$ определим равенством

$$\omega_\beta(f;t) = \sup\Big\{\, \|\Delta_h^\beta f(\cdot)\|_q :\ |h| \leq t \,\Big\} =$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\beta}{\nu}f(\cdot+(\beta-\nu)h)\right\|_q :\ |h| \leq t\right\}.$$

[33] Козко А.И. Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Изв. РАН. Серия математическая. 1998. Т.62. №6. С.125-142.

[34] Шабозов М.Ш., Темурбекова С.Д. Значения поперечников классов функций из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Известия ТулГУ. 2012. Вып.3. С. 60-68.

[35] Butzer P.L., Dyckhoff H., Goerlich E., Stens R.L. Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Can. J. Math. 1977. V.29. P.781-793.

[36] Tabersky R. Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Commentat. Math. 1976-1977. V.19. P.389-400.

Здесь приводим обобщение и развитие некоторых результатов работ[34,37] на случай модуля непрерывности произвольного порядка $\beta > 0$ для классов дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве L_2. Доказываются некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими многочленами и усреднённым с весом модулем непрерывности произвольного дробного порядка, вычислены точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих пространству L_2. Для функции $f \in L_2$ с рядом Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \Big),$$

введём в рассмотрение производную порядка $\alpha \geq 0$ в смысле Вейля[38], определённую равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \left\{ a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\}.$$

Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \geq 0$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций f, у которых существует производная $f^{(\alpha)} \in L_2$ ($f^{(0)} \equiv f$). Если $S_{n-1}(f^{(\alpha)}; x)$ ($\alpha \geq 0$) – частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами T_{n-1} степени не выше $n-1$ имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) \equiv E\left(f^{(\alpha)}; \Im_{2n-1}\right) = \inf\left\{ \|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\| : \ T_{n-1} \in \Im_{2n-1} \right\} =$$

$$= \|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2 \right)^{1/2},$$

где, по-прежнему, $\rho_k^2 := \rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$. Введём в рассмотрение следующую аппроксимационную характеристику

[37] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

[38] Weyl H. Bemerkungen zum Begriff der differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahresschriff der Naturschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. V.62. P.296-302.

$$\chi_{n,\beta,\alpha,p}(\varphi;h)=\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{11}$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\beta>0$, $\alpha\geq 0$, $0<p\leq 2$, φ – весовая функция на отрезке $[0,h]$, причём в (11), ради удобства, условно полагаем $0/0\overset{def}{=}0$.

Справедлива следующая

Теорема 1.5.2. *Пусть $\beta>0$, $\alpha\geq 0$, φ – заданная на $[0,h]$ непрерывно дифференцируемая весовая функция. Если при некоторых $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<p\leq 2$ и любых $t\in[0,h]$ выполнено дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\geq 0, \tag{12}$$

то при всех $n\in\mathbb{N}$ и $0<h<\pi/n$ справедливы равенства

$$\chi_{n,\beta,\alpha,p}(\varphi;h)=\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Обозначим через $W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega$ – класс функций $f\in L_2^{(\alpha)}$ таких, что для $0\leq t\leq h$, $0<h\leq\pi/n$ выполняется условие

$$W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p=\left(\int\limits_0^h\omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\leq\omega(h),$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности. В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 1.5.4. *Пусть $\alpha,\beta>0$, $0<h\leq\pi/n$ и выполнено неравенство (12). Тогда справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega;L_2\right)=\delta_{2n}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega;L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega\right)=\frac{1}{2^\beta n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\omega(h),$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников Бернштейна* $b_k(\cdot)$, *Гельфанда* $d^k(\cdot)$, *Колмогорова* $d_k(\cdot)$, *линейного* $\lambda_k(\cdot)$, *проекционного* $\pi_k(\cdot)$. *Все* n*-поперечники реализуются частичными суммами Фурье* $S_{n-1}(f;t)$ *порядка* $n-1$ *ряда Фурье функции* $f \in L_2^{(\alpha)}$.

Переходим к изложению основных результатов второй главы. Начало исследований, связанных с аппроксимацией функций на прямой $\mathbb{R}$, было положено в работах С.Н.Бернштейна, использовавшего для этого в качестве аппарата приближения пространства целых функций конечной степени. В дальнейшем этой проблематике посвящены фундаментальные работы Н.Винера, Н.И.Ахиезера, М.Г.Крейна, С.М.Никольского, А.Ф.Тимана, Р.Боаса, И.И.Ибрагимова и многих других. В восьмидесятых годах прошлого столетия появились работы И.И.Ибрагимова и Ф.Г.Насибова[39], В.Ю.Попова[40], Ф.Г.Насибова[41] по приближению функций суммируемыми с квадратом на всей оси целыми функциями, в которых найдены точные константы, и сравнительно недавно опубликованные работы Г.Г.Магарил-Ильяева[42,43], а также работы С.Б.Вакарчука[44,45], С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и М.Р.Лангаршоева[46], в которых вычислены точные значения средних ν-поперечников для некоторых классов функций из $L_2(\mathbb{R})$.

Другое направление исследования теории приближения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ целыми функциями экспоненциального сферического типа развита в недавно опубликованных работах Д.В.Горбачева[47,48].

Приведём необходимые определения, обозначения общего характера, постановки задач и известные результаты, имеющие непосредственное отноше-

[39]Ибрагимов И.И., Насибов Ф.Г. Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // ДАН СССР. 1970. Т.194, №5. С.1013-1016.

[40]Попов В.Ю. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. №6. С.65-73.

[41]Насибов Ф.Г. О приближении в L_2 целыми функциями // Докл. АН Азербайджанской ССР. 1986. Т.XLII, №4. С.3-6.

[42]Магарил-Ильяев Г.Г. Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Матем. сб. 1991. Т.182, №11. С.1635-1656.

[43]Магарил-Ильяев Г.Г. Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // ДАН СССР. 1991. Т.318, №1. С.35-38.

[44]Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси I // Український математичний вiсник. 2012. Т.9, №3. С.401-429.

[45]Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси II // Український математичний вiсник. 2012. Т.9, №4. С.578-602.

[46]Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ и средних ν-поперечниках некоторых функциональных классов // Изв. вузов. Математика. 2014. №7. С.30-48.

[47]Горбачев Д.В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т.68. №2. С.179-187.

[48]Горбачев Д.В. Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. 2-е изд., перераб. и доп. Тула: «Гриф и К». 2005. 192 с.

ние ко второй главе диссертации. Всюду далее под $L_p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$ будем понимать пространство измеримых на всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Через $L_p^{(r)}(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty;\ r \in \mathbb{N})$ обозначим множество функций $f \in L_p(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$. Символом $B_{\sigma,p}$ $(0 < \sigma < \infty; 1 \leq p \leq \infty)$ обозначим сужение на $\mathbb{R}$ множества всех целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R})$. Величину

$$A_\sigma(f)_p := \inf\Big\{ \|f - g_\sigma\|_p :\ g_\sigma \in B_{\sigma,p} \Big\},\ (0 < \sigma < \infty;\ 1 \leq p \leq \infty)$$

называют наилучшим приближением функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ элементами множества $B_{\sigma,p}$.

Для решения последующих экстремальных задач приближения функций на всей оси целыми функциями экспоненциального типа σ, сначала установим неулучшаемые неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие наилучшие приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ посредством целых функций $g_\sigma \in B_{\sigma,2}$ с обобщённым модулем непрерывности порядка m следующего вида (см. формулу (2)):

$$\Omega_m(f;t)_p = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}^p dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/p},$$

где $0 < t < \infty$, $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$, $\Delta_{h_j}^1 f = f(\cdot + h_j) - f(\cdot)$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Введём в рассмотрение экстремальную аппроксимационную характеристику следующего вида

$$\chi_{\sigma,m,r,q}(\psi; h) = \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2} A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}; t)_2\, \psi(t) dt \right)^{1/q}},$$

где $m \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < q \leq 2$; $\sigma, h \in \mathbb{R}_+$ и $\psi(t) \geq 0$ – некоторая измеримая суммируемая на отрезке $[0, h]$ весовая функция.

Основным результатом первого параграфа второй главы является

Теорема 2.1.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq \pi/\sigma$, $0 < q \leq 2$ *и* $\psi(t)$ *– весовая функция на* $[0, h]$. *Тогда выполняются следующие неравенства*

$$\Big\{\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi; h, \sigma)\Big\}^{-1} \leq \chi_{\sigma,m,r,q}(\psi; h) \leq \Big\{\inf_{\sigma\leq t<\infty} \mathcal{B}_{m,r,q}(\psi; h, t)\Big\}^{-1},$$

где

$$\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi; h, t) = \left(t^{rq} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin tx}{tx}\right)^{mq/2} \psi(x)dx\right)^{1/q}, \quad t \geq \sigma.$$

Из теоремы 2.1.1 в свою очередь вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда при любом* $0 < h \leq 3\pi/(4\sigma)$ *справедливы равенства*

$$\chi_{\sigma,m,r,q}(\psi; h) = \Big\{\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi; h, \sigma)\Big\}^{-1} := \left(\sigma^{rq} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin \tau\sigma}{\tau\sigma}\right)^{mq/2} \psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}.$$

В некоторых ситуациях, при отыскании точной верхней грани классов функций $f \in L_2(\mathbb{R})$ весьма полезным является

Следствие 2.1.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \leq 2$ *и* $g(\tau)$ *– некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0, a]$ *функция, где* $0 < a < \pi$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\Big\{\mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, 1)\Big\}^{-1} \leq \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\, \sigma^{r-1/q}\, A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \Omega_m^q(f^{(r)}; \tau/\sigma)\, g(\tau)d\tau\right)^{1/q}} \leq$$

$$\leq \Big\{\inf_{x\geq 1} \mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, x)\Big\}^{-1},$$

где

$$\mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, x) = \left(x^{rq} \int\limits_0^a \left(1 - \frac{\sin x\tau}{x\tau}\right)^{mq/2} g(\tau)d\tau\right)^{1/q}.$$

Очевидно, что если

$$\inf_{x\geq 1} \mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, x) = \mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, 1), \tag{13}$$

то имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{r-1/q}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^q(f^{(r)};\tau/\sigma)\,g(\tau)d\tau\right)^{1/q}}=\frac{1}{\mathcal{D}_{m,r,q}(g;a,1)}.$$

Для частных классов весовых функций из теоремы 2.1.2 вытекает

Следствие 2.1.2. *Пусть* $g_*(t)=t^{rq-1}g_1(t)$ $(0<q\le 2,\ r\in\mathbb{N})$ *– неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,a]$, $0<a<\pi$ *функция,* $g_1(t)$ *– невозрастающая на* $[0,a]$ *функция. Тогда имеет место (13) и справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{r}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^q(f^{(r)};\tau/\sigma)\,\tau^{rq-1}g_1(\tau)d\tau\right)^{1/q}}=\frac{1}{\mathcal{D}_{m,r,q}(g_*;a,1)}.$$

Хорошо известно[49], что если $f^{(r)}\in L_2(\mathbb{R})$, то и все промежуточные производные $f^{(r-s)}\in L_2(\mathbb{R})$, $s=1,2,\ldots,r-1$. Представляет определённый интерес отыскание экстремальных характеристик, содержащих величины наилучших приближений производных $A_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}$ элементами подпространства $B_{\sigma,2}$ в норме $L_2(\mathbb{R})$. Справедлива следующая общая

Теорема 2.1.3. *Пусть* $m,r\in\mathbb{N}$, $0<q\le 2$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<h\le 3\pi/(4\sigma)$, $\psi(\tau)$ *– весовая функция на отрезке* $[0,h]$. *Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{s}\,A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}}=\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q},$$

где $s=0,1,2,\ldots,r$. *Если, в частности,* $m,r\in\mathbb{N}$, $q=2/m$, $0<h\le 3\pi/(4\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $s=0,1,2,\ldots,r$ *и* $\psi(\tau)\equiv 1$, *то*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{s}A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^{2/m}(f^{(r)};\tau)\,d\tau\right)^{m/2}}=\left(\frac{\sigma}{\sigma h-Si(\sigma h)}\right)^{m/2}.$$

[49]Бекенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир. 1965. С.236.

где $Si(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin x}{x} dx$ *– интегральный синус.*

Если же, $m, r \in \mathbb{N}$, $q = 2/m$, $0 < h \le 3\pi/(4\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ *и* $\psi(\tau) \equiv \tau$, *то имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^s A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}; \tau)\, d\tau\right)^{m/2}} = \left(\frac{\sigma^2}{(\sigma h)^2 - 2(1 - \cos \sigma h)}\right)^{m/2}.$$

Общеизвестно, что до недавнего времени подпространство $B_{\sigma,p}$ $(0 < \sigma < \infty;\ 1 \le p \le \infty)$ было в некотором смысле единственным аппаратом приближения в $L_p(\mathbb{R})$ и только лишь с конца прошлого века все чаще в качестве аппроксимирующего множества используются целые функции и сплайны (см., например, C. de Boor, I.J.Schoenberg[50], Сунь Юн-шен и Ли Чунь[51], Г.Г.Магарил-Ильяев[52]). Если рассматривать задачу приближения $f \in L_p(\mathbb{R})$, то целые функции и сплайны являются бесконечномерными образованиями и величины, характеризующие соответствующие приближения, выражаются в терминах, отражающих внутреннюю структуру аппарата аппроксимации, например: степень целой функции экспоненциального типа, плотность распределения узлов сплайна. Возникает естественный вопрос: как сравнивать между собой подобные способы приближения? Введение Г.Г.Магарил-Ильяевым[42,43] определения средней размерности, являющейся определенной модификацией соответствующего понятия, данного ранее В.М.Тихомировым[53], позволило определить асимптотические характеристики подпространств, подобные поперечникам, где роль размерности играет средняя размерность. В результате этого оказалось возможным сравнить аппроксимативные свойства подпространства $B_{\sigma,p}$, $1 \le p \le \infty$ с аналогичными характеристиками иных подпространств из $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$ той же размерности и решать в $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$ экстремальные задачи теории аппроксимации функций вариационного содержания.

[50]de Boor C., Schoenberg I.J. Cardinal interpolation and spline functions VIII // Lect. Notes Math., 1976. V.501. P.1-79.

[51]Сунь Юн-шен, Ли Чунь. Наилучшее приближение некоторых классов гладких функций на действительной оси сплайнами высшего порядка // Матем. заметки. 1990. Т.48, №4. С.100-109.

[52]Магарил-Ильяев Г.Г. О наилучшем приближении сплайнами классов функций на прямой // Труды МИАН СССР. 1992. Т.194. С.148-159.

[53]Тихомиров В.М. Об аппроксимативных характеристиках гладких функций // Тр. конф. по дифферен. уравнениям и вычисл. математике. Новосибирск: Наука. 1980. С.183-188.

Пусть $\mathbb{B}L_p(\mathbb{R}) = \{\varphi \in L_p(\mathbb{R}) : \ \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R})} \le 1\}$ – единичный шар в $L_p(\mathbb{R})$; $Lin(L_p(\mathbb{R}))$ является совокупностью всех линейных подпространств в $L_p(\mathbb{R})$;

$$Lin_n(L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \Big\{\mathcal{J} \in Lin(L_p(\mathbb{R})) : dim\mathcal{J} \le n\Big\}, \ n \in \mathbb{Z}_+;$$

$$d(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \sup\Big\{\inf\Big\{\|f - \varphi\|_p : \varphi \in \mathfrak{N}\Big\} : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}$$

– наилучшее приближение множества $\mathfrak{M} \subset L_p(\mathbb{R})$ множеством $\mathfrak{N} \subset L_p(\mathbb{R})$. Под $\mathfrak{N}_T, T > 0$ понимаем сужение множества $\mathfrak{N} \subset L_p(\mathbb{R})$ на отрезок $[-T, T]$, а через $Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{J} \in Lin(L_p(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_p([-T, T])$ при любом $T > 0$. Если $\mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $T, \ \varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $M \in Lin_n(L_p([-T, T])$, для которых

$$d((\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T, M, L_p([-T, T])) < \varepsilon.$$

Пусть

$$D_\varepsilon(T, \mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \exists M \in Lin_n(L_p([-T, T])),$$
$$d((\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T, M, L_p([-T, T])) < \varepsilon\}.$$

В работе[42] доказано, что данная функция не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \lim\{\liminf\{D_\varepsilon(T, \mathcal{J}, L_p(\mathbb{R}))/(2T) : T \to \infty\} : \varepsilon \to 0\},$$

где $\mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{J}$ в $L_p(\mathbb{R})$. Г.Г.Магарил-Ильяевым[42,43] доказано, что

$$\overline{dim}(B_{\sigma,p}; L_p(\mathbb{R})) = \sigma/\pi, \ (1 \le p \le \infty).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ – центрально-симметричное подмножество из $L_p(\mathbb{R})$ и $\nu > 0$ – произвольное число. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \inf\Big\{\sup\Big\{\inf\Big\{\|f - \varphi\|_p : \varphi \in \mathcal{J}\Big\} : f \in \mathfrak{M}\Big\} :$$
$$\mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R})), \overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) \le \nu\Big\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называют экстремальным. Средним линейным ν-поперечником множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \Lambda f\| : f \in \mathfrak{M}\Big\} : (X, \Lambda)\Big\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, Λ) таким, что X есть нормированное пространство, непрерывно вложенное в $L_p(\mathbb{R})$; $\mathfrak{M} \subset X$; $\Lambda : X \longrightarrow L_p(\mathbb{R})$ является непрерывным линейным оператором, для которого $Im\,\Lambda \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $\overline{dim}(Im\,\Lambda, L_p(\mathbb{R})) \le \nu$. Пару (X^*, Λ^*), на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной. Величину

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \sup\Big\{\sup\Big[\rho > 0 : \mathcal{J} \cap \rho\, \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}\Big] :$$

$$: \mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}), \overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) > \nu,\ \overline{d}_\nu(\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}), L_p(\mathbb{R})) = 1\Big\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{J}$ при вычислении внешней точной верхней грани означает, что рассматриваются только те пространства, для которых верен аналог теоремы В.М.Тихомирова о поперечнике шара[54]. В работах[42,43] доказывается, что указанному требованию удовлетворяет, например, пространство $B_{\sigma,p}$, если $\sigma \ge \nu\pi$. Между вышеперечисленными экстремальными характеристиками множества $\mathfrak{M}$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства[43,55].

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \le \overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \le \overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})).$$

Всюду далее наилучшее приближение класса $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ подпространством $B_{\sigma,2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ обозначим

$$A_\sigma(\mathfrak{M})_2 := \sup\Big\{A_\sigma(f)_{L_2(\mathbb{R})} :\ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Для пары $(L_2^{(r)}(\mathbb{R}), \Lambda)$, где $\Lambda : L_2^{(r)}(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ – непрерывный линейный оператор, для которого $Im\,\Lambda \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $\overline{dim}(Im\,\Lambda, L_p(\mathbb{R})) \le \nu$, полагаем

$$\mathcal{E}_\nu(\mathfrak{M}; (L_2(\mathbb{R}), \Lambda)) \stackrel{def}{=} \sup\Big\{\|f - \Lambda f\| :\ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Рассматриваемые во второй главе классы функций определяются следующим образом.

Пусть $\Phi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ $(t \ge 0)$ – произвольные непрерывные возрастающие функции такие, что $\Phi_i(0) = 0$. Символом $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$,

[54]Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. 1987. С.341.
[55]Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2 approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East Journal on Approx., 2004. V.10, №1-2. P.27-39.

$m \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, r-тые производные которых удовлетворяют условию

$$\left(\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,dt\right)^{1/q} \le \Phi_1(h)$$

для любого $h \in (0,\pi]$. Аналогичным образом для $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, $0 < h \le \pi$, через $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2)$ определим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, r-тые производные которых удовлетворяют ограничению

$$\left(\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,dt\right)^{1/q} \le \Phi_2(h).$$

Наконец для любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \le 2$ и $h \in [0,\pi]$ полагаем

$$W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3) = \left\{ f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}):\ \frac{2}{h^2}\int_0^h t\Omega_m^q(f^{(r)},t)_2\,dt \le \Phi_3^q(h) \right\}.$$

При выполнении ряда ограничений относительно параметров r, q, h и мажорант Φ_i $(i = 1,2,3)$ найдены точные значения вышеперечисленных средних поперечников классов $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1)$, $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2)$ и $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и указаны соответствующие экстремальные подпространства. Следуя работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[56], полагаем

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)_* := \left\{1-\frac{\sin x}{x},\ \text{если } 0 < x < t_*;\ 1-\frac{\sin t_*}{t_*},\ \text{если } x \ge t_*,\right\},$$

где через t_* обозначена величина аргумента $x \in (0,\infty)$ функции $\sin x/x$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $x = \operatorname{tg} x$. Простые вычисления показывают, что $4,49 < t_* < 4,51$.

В формулировке нижеследующих теорем через $\overline{\pi}_\nu(\cdot)$ обозначим любой из средних поперечников: бернштейновский $\overline{b}_\nu(\cdot)$, колмогоровский $\overline{d}_\nu(\cdot)$ или линейный $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$.

Теорема 2.2.1. *Если для всех* $\mu > 0$, $0 < h \le \pi$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$ *мажоранта* Φ_1 *удовлетворяет условию*

$$\Phi_1^q\left(\frac{h}{\mu}\right)\int_0^{\mu\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2} dt \le \Phi_1^q(h)\int_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt, \tag{14}$$

[56]Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East J. on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia. 2008. V.14, №4. P.411-421.

то для любого $\nu > 0$ имеют место равенства

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q} \Phi_1(1/\nu).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi})$, где $\Lambda^*_{\nu\pi}$ определяется из условия

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi} f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f,\cdot)$$

(F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi, \nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$.

Доказано, что среди степенных функций $\Phi_1^*(u) = u^{\alpha/q}$, возрастающих на положительной полуоси, существует та, для которой выполняется неравенство (14) при любых значениях $\mu > 0$, $h \in (0,\pi]$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$.

Теорема 2.2.2. *Для того, чтобы неравенство (14) имело место для Φ_1^* с любыми заданными $\mu > 0$, $0 < h \le \pi$; $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, необходимо и достаточно, чтобы число $\alpha = \alpha(m,q)$ определялось по формуле*

$$\alpha = \pi\left\{\int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right\}^{-1}.$$

Легко доказать, что граничные значения α находятся в области

$$(mq/2)+1 \le \alpha \le mq+1;\quad m\in\mathbb{N},\ 0<q\le 2.$$

Из теоремы 2.2.1 вытекает следующее

Следствие 2.2.1. *Если для всех $\mu > 0$, $0 < h \le \pi$, $m \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ_1 удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(h/\mu)}\right)^{2/m} \ge (\pi - Si(\pi))^{-1}\int\limits_0^{\mu\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* dt, \tag{15}$$

где $Si(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус, то при всех $m, r \in \mathbb{N}$, $r \ge m/2$

и $\nu > 0$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+m/2}\,(\pi - Si(\pi))^{-m/2}\,\Phi_1(1/\nu).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi})$, *где* $\Lambda^*_{\nu\pi}$ *определяется из условия*

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi} f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f, \cdot)$$

(F *– преобразование Фурье в* $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ *– характеристическая функция интервала* $(-\nu\pi, \nu\pi)$*), будет экстремальной для среднего линейного поперечника* $\overline{\delta}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$, *а пространство* $B_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$.

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (15), не пусто. Условию (15) удовлетворяет, например, функция

$$\Phi^*_1(h) = h^{\alpha m/2},\ m \in \mathbb{N},\ \alpha = \pi/(\pi - Si(\pi)).$$

Теорема 2.2.4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < q \le 2$ *и мажоранта* Φ_2 *при любых значениях* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/\sigma)}\right)^q \ge \frac{\pi}{\sigma h}\left\{\int_0^{\sigma h}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2} dt\right\}\left\{\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right\}^{-1}. \qquad (16)$$

Тогда для любого $\nu > 0$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_2), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_2))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_2); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q}\Phi_2(1/\nu).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi})$, *где* $\Lambda^*_{\nu\pi}$ *определяется из условия*

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi} f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f, \cdot)$$

(F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi, \nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_2), L_2(\mathbb{R}))$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_2), L_2(\mathbb{R}))$.

Доказывается, что условию (16) удовлетворяет мажорантная функция

$$\Phi_2^*(t) = t^{\alpha/q}, \quad \text{где} \quad \alpha = \pi \left\{ \int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt \right\}^{-1} - 1.$$

Очевидно, что $mq/2 \le \alpha \le mq$, $m \in \mathbb{N}$, где $0 < q \le 2$.

Теорема 2.2.5. *Если для всех $\mu > 0$, $0 < h < \pi$, $q = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ_3 удовлетворяет условию*

$$\left\{ \frac{\Phi_3(h)}{\Phi_3(h/\mu)} \right\}^{2/m} \ge \frac{8}{\pi^2 - 8} \cdot \frac{1}{\mu^2} \int\limits_0^{\mu\pi/2} t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* dt,$$

то для любого $r \in \mathbb{Z}_+$, $\nu > 0$ имеют место равенства

$$\overline{\pi}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_\nu \Big(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3); (L_2^{(r)}(\mathbb{R}), \Lambda) \Big) =$$

$$= 2^{-m/2} (\nu\pi)^{-r} \left(\pi^2/(\pi^2 - 8)\right)^{m/2} \Phi_3\left(1/(2\nu)\right).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}^*)$, где $\Lambda_{\nu\pi}^*$ определяется из условия

$$F(\Lambda_{\nu\pi}^* f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot) F(f, \cdot)$$

(F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi, \nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3))$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3))$.

В завершение этого параграфа рассмотрим задачу отыскания точных значений верхних граней наилучших приближений $A_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}$ ($r \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, \ldots, r$) на рассмотренных классах функций $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_i)$ ($i = 1, 2, 3$), определяемых заданными мажорантными функциями Φ_i ($i = 1, 2, 3$).

Теорема 2.2.7. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.1, $r \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $s = 0, 1, \ldots, r$. Тогда имеют место равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)\Big\} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s+1/q}\left(\int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q} \Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Следствие 2.2.3. *В условиях теоремы 2.2.7 имеют место равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)\Big\} =$$

$$= 2^{-m/2}\,\pi^{-s}\nu^{-s+m/2}\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)^{-m/2} \Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Теорема 2.2.8. *При выполнении всех условий теоремы 2.2.4, для любых $r \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $s = 0, 1, \ldots, r$ справедливы равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_2)\Big\} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q} \Phi_2\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

и, в частности, при $q = 2/m$ имеем

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_2)\Big\} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s}\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)^{-m/2} \Phi_2\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Теорема 2.2.9. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.5. Тогда для любых $r \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $s = 0, 1, \ldots, r$ выполняются равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3)\Big\} =$$

$$= 2^{-m/2}(\nu\pi)^{-s}\left(\pi^2/(\pi^2-8)\right)^{m/2} \Phi_3\left(1/(2\nu)\right).$$

Третья глава диссертационной работы посвящена отысканию точных значений n-поперечников различных классов аналитических в единичном круге функций и построению наилучших линейных методов приближения рассматриваемых классов.

К настоящему времени в задаче отыскания точных значений n-поперечников классов аналитических в круге функций в различных банаховых пространствах получен ряд окончательных результатов. Следует отметить, что первые результаты, связанные с вычислением точных значений колмогоровских n-поперечников в пространстве Харди H_q, $1 \leq q \leq \infty$, принадлежат В.М.Тихомирову[57] (случай $q = \infty$) и Л.В.Тайкову[58] (случай $1 \leq q < \infty$). Работы В.М.Тихомирова и Л.В.Тайкова базируются на основополагающем результате К.И.Бабенко[59], в котором был получен линейный метод аппроксимации одного класса функций, аналитических в единичном круге функций, пригодный для оценок n-поперечников сверху и использованный позднее многими другими математиками. Развивая эту тематику, Л.В.Тайков и Н.Айнуллоев[60,61,62] получили точные значения колмогоровских n-поперечников в метрике пространства Харди для некоторых классов аналитических в единичном круге функций, граничные значения которых представлены свёрткой, либо усреднённые модули непрерывности или гладкости их граничных значений мажорируются заданными функциями. Эти идеи стали очень плодотворными, и в дальнейшем указанная тематика развивалась в работах М.З.Двейрина и И.В.Чебаненко[63], Ю.А.Фаркова[64,65], С.Д.Фишера и М.И.Стесина[66], A.Pinkus[30], С.Б.Вакарчука

[57] Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т.15, №3(93). С.81-120.

[58] Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т.1, №2. С.155-162.

[59] Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. 1958. Т.22, №5. С.631-640.

[60] Тайков Л.В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica. 1976. V.2, №1. P.77-85.

[61] Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т.22, №2. С.285-295.

[62] Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т.40, №3. С.341-351.

[63] Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наукова думка. 1983. С.62-73.

[64] Фарков Ю.А. О поперечниках классов аналитических функций с ограниченными производными // Изв. вузов. Матем. 1988. №4. С.84-86.

[65] Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успехи мат. наук. 1990. Т.45, №5. С.197-198.

[66] Fisher S.D., Stessin M.I. The n-widths of the unit ball of H^q // Journ. Approx. Theory. 1991. V.67, №3. P.347-356.

и В.И.Забутной[67,68,69,70,71], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова[72] и других.

Особый интерес представляет построение наилучших линейных методов приближения (как ранее изученных, так и изучаемых новых классов аналитических функций) и связанные с этим задачи вычисления точных значений различных n-поперечников, в частности отыскания точных значений гельфандовских и линейных n-поперечников. В этом направлении исследования уже получен ряд окончательных результатов в работах Л.В.Тайкова[73], J.T.Scheick[74], В.И.Белый[75], В.И.Белый и М.З.Двейрина[76], К.Ю.Осипенко[77], К.Ю.Осипенко и М.И.Стесин[78], С.Б.Вакарчука[67−70], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[71], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова[72], в которых найдены наилучшие линейные методы приближения различных классов аналитических в круге функций. Тем не менее ещё для многих классов аналитических функций даже в пространстве H_q, $1 \le q \le \infty$ значения n-поперечников и наилучшие линейные методы приближения не найдены.

Приведём необходимые определения и обозначения, используемые нами в дальнейшем. Пусть $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathcal{A}(U_\rho)$ – множество функций комплексного переменного $f(z)$, аналитических в круге

$$U_\rho := \Big\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| < \rho \Big\} \quad (0 < \rho \le 1, \ U_1 = U).$$

Через H_q $(1 \le q \le \infty)$ обозначим банахово пространство Харди, состоя-

[67] Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т.57, №1. С.30-39.

[68] Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки, 1999. Т.65, №2. С.186-193.

[69] Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. 2002. Т.72, №5. С.665-669.

[70] Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. матем. журнал. 2004. Т.56, №9. С.1155-1171.

[71] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \ge 1$, $0 < \rho \le 1$ // Матем. заметки. 2009. Т.85, №3. С.323-329.

[72] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сб., 2010. Т.201, №8. С.3-22.

[73] Тайков Л.В. О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. 1963. T.VXIII. Вып. 4(112). С.183-189.

[74] Scheick J.T. Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc., 1966. V.17. P.1238-1243.

[75] Белый В.И. К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. журнал, 1967. Т.19, №2. С.104-108.

[76] Белый В.И., Двейрин М.З. О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // В кн: Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наукова думка. 1971. №4. С.37-54.

[77] Осипенко К.Ю. Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью // Матем. сборник. 1982. Т.118(160), №3(7). С.350-370.

[78] Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Матем. заметки. 1991. Т.49, №4. С.95-104.

щее из функций $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q}.$$

Хорошо известно, что норма функции $f \in H_q$ реализуется на её угловых граничных значениях $F(t) := f(e^{it})$, которые существуют почти для всех $t \in [0, 2\pi]$. В случае $q = \infty$, дополнительно будем предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге $\bar{U}_\rho = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| \le \rho\}, \ 0 < \rho \le 1$.

Символом $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1,\ H_{q,1} = H_q)$ обозначим банахово пространство Харди функций $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$, для которых

$$\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} \stackrel{def}{=} \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty.$$

Через $f_a^{(r)}(z)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ f_a^{(0)}(z) \equiv f(z))$ обозначим производную r-го порядка $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho\, exp(it)$:

$$f_a'(z) = izf'(z), \quad f_a^{(r)}(z) := \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a' \quad (r \ge 2,\ r \in \mathbb{N}),$$

а обычную r-ую производную по переменному z обозначим $f^{(r)}(z),\ r \in \mathbb{N}$. Под $H_{q,a}^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le q \le \infty,\ H_{q,a}^{(0)} \equiv H_{q,a})$ будем понимать класс функций $f \in \mathcal{A}(U)$, у которых $f_a^{(r)}$ принадлежит пространству H_q $(1 \le q \le \infty)$. Аналогичным образом $H_q^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le q \le \infty,\ H_q^{(0)} \equiv H_q)$ означает класс функций $f \in \mathcal{A}(U)$, у которых $f^{(r)} \in H_q$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le q \le \infty)$. Равенством

$$E_{n-1}(f)_q := E(f, \mathscr{P}_{n-1}) = \inf\Big\{\|f - p_{n-1}\|_q : \ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\Big\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in H_q$ элементами подпространства $\mathscr{P}_{n-1}$ – комплексных алгебраических полиномов степени не выше $n-1$, в пространстве H_q.

Всюду далее структурные свойства функции $f \in H_q$ $(1 \le q \le \infty)$ будем характеризовать скоростью убывания к нулю модуля непрерывности граничных значений r-ых производных $F_a^{(r)}(t)$ (или $F^{(r)}(t)$, $r \in \mathbb{Z}_+$)

$$\omega(F_a^{(r)}; t)_q := \sup\left\{\left\|F_a^{(r)}\left(x + \frac{h}{2}\right) - F_a^{(r)}\left(x - \frac{h}{2}\right)\right\|_q : \ |h| \le t\right\}$$

или модуля гладкости граничных значений указанных производных

$$\omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q := \sup\Big\{\|F_a^{(r)}(x+h) - 2F_a^{(r)}(x) + F_a^{(r)}(x-h)\|_q : \ |h| \le t\Big\},$$

задавая скорость убывания посредством мажоранты некоторой усреднённой величины, содержащей $\omega(F_a^{(r)};t)_q$ $(\omega(F^{(r)};t)_q)$ или $\omega_2(F_a^{(r)};2t)_q$ $(\omega_2(F^{(r)};2t)_q)$.

Пусть $\Phi_i(u)$ и $\Psi_i(u)$ $(i=1,2;\ u\geq 0)$ – произвольные возрастающие непрерывные функции такие, что $\Phi_i(0)=\Psi_i(0)=0$ $(i=1,2)$. Используя функции $\Phi_i(u)$ и $\Psi_i(u)$ в качестве мажоранты, введём в рассмотрение следующие классы аналитических функций. Через $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$ $(r\in\mathbb{N},\ 1\leq q\leq\infty)$ обозначим класс функций $f\in H_{q,a}^{(r)}$, при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(F_a^{(r)};2t)_q\,dt\leq\Phi_1(h),$$

а через $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$ $(r\in\mathbb{N},\ 1\leq q\leq\infty)$ – класс функций $f\in H_q^{(r)}$, для которых при любом $h\in\mathbb{R}_+$ выполняется условие

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(F^{(r)};2t)_q\,dt\leq\Phi_2(h).$$

Аналогичным образом, через $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ $(r\in\mathbb{N},\ 1\leq q\leq\infty)$ обозначим класс функций $f\in H_{q,a}^{(r)}$, для которых

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(F_a^{(r)};2t)_q\,dt\leq\Psi_1(h),$$

а $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ – соответствующий класс функций $f\in H_q^{(r)}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(F^{(r)};2t)_q\,dt\leq\Psi_2(h).$$

Положим также

$$(\sin t)_*:=\Big\{\sin t,\ \text{если}\ \ 0<t\leq\pi/2;\ \ \ 1,\ \text{если}\ \ t\geq\pi/2\Big\},$$

$$(1-\cos t)_*:=\Big\{1-\cos t,\ \text{если}\ 0<t\leq\pi;\ \ \ 2,\ \text{если}\ t\geq\pi\Big\}.$$

Пусть X – банахово пространство функций, аналитических в единичном круге $U=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$. Величину

$$d_n^T(\mathfrak{M},X)=\inf_{\{m_k\}_{k=1}^n}\ \sup_{f\in\mathfrak{M}}\ \inf_{\{c_k\}_{k=1}^n}\left\|f(z)-\sum_{k=1}^n c_k z^{m_k}\right\|_X,$$

где $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$, $m_k \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1,n}$, называют тригонометрическим n-поперечником компакта $\mathfrak{M}$ в банаховом пространстве X. Далее воспользуемся соотношениями[70]

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq \begin{array}{c} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{array} \leq d_n^T(\mathfrak{M}, X) \leq \lambda_n(\mathfrak{M}, X).$$

Наши дальнейшие исследования об отыскании наилучших линейных методов приближения изучаемых нами классов функций основаны на следующих известных результатах Л.В.Тайкова[60,61], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова[62], Н.Айнуллоева[79] о наилучших приближениях аналитических в единичном круге функций и некоторых их обобщениях. Одним из основных результатов второго параграфа третьей главы является

Теорема 3.2.2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$ и мажоранта Φ_1 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2n))} \geq \frac{\pi}{2nh} \int_0^{nh} (\sin t)_* dt. \tag{17}$$

Тогда при любых $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) = d_n^T\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{18}$$

Доказывается, что результат (18) справедлив также для гельфандовского и линейного n-поперечников. С этой целью для каждой функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in \mathcal{A}(U)$$

сопоставим в соответствие линейный полиномиальный оператор $(n-1)$-й степени следующего вида

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f; z) := \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f; \mathscr{P}_{n-1}, z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k,r-1,\rho}\, c_k(f) z^k,$$

где

$$\lambda_{k,r-1,\rho} = 1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1} \rho^{2(n-k)} \left[1 - n\mu_k \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right)\right], \ \ k = \overline{1, n-1};$$

[79] Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функций // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. 1986. С.91-101.

$$\mu_k = \int\limits_0^{\pi/(2n)} \cos kx \cos nx dx.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2.3. *Если мажоранта Φ_1 удовлетворяет условию (17), то при любых $n, r \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho \le 1$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f; \mathscr{P}_{n-1})\right)_{H_{q,\rho}} :=$$

$$:= \sup\left\{\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\| : \ f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)\right\} = \frac{\pi \rho^n}{4n^r} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot)$, $d_n^T(\cdot)$ или $\lambda_n(\cdot)$.

Далее доказываются аналоги теоремы 3.2.1 – 3.2.3 для класса функций $W^{(r)} H_q(\Phi_2)$ в пространстве $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$. Всюду далее, полагаем $\alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1),\ n > r,\ n, r \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.2.4. *Если при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \ge 1$ мажоранта Φ_2 для любого $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/2(n-r))} \ge \frac{\pi}{2(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (\sin t)_* \, dt, \tag{19}$$

то

$$b_n\left(W^{(r)} H_q(\Phi_2); H_q\right) = d_n\left(W^{(r)} H_q(\Phi_2); H_q\right) = d_n^T\left(W^{(r)} H_q(\Phi_2); H_q\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)} H_q(\Phi_2)\right)_{H_q} = \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}} \Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

Множество функций $\{\Phi_2\}$, удовлетворяющих условию (19), не пусто.

Таковой является, например, функция $\Phi_2^*(t) = t^{(\pi/2)-1}$.

Теорема 3.2.5. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ и мажоранта Φ_2 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению (19). Тогда при любых $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$ справедливы равенства*

$$b_n\left(W^{(r)} H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)} H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n^T\left(W^{(r)} H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\,\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

Распространим результат теоремы 3.2.5 на гельфандовский и линейный n-поперечники. Для этой цели, следуя схеме доказательства леммы 3.2.1, каждой функции $f(z) \in \mathcal{A}(U)$ сопоставим в соответствие линейный полиномиальный оператор $(n-1)$-й степени

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f;z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\rho^{2(n-k)}\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k,$$

где $c_k(f)$ – коэффициенты Тейлора функции $f(z)$, а числа $\gamma_{k,r}$ определены равенством

$$\gamma_{k,r} = (n-r)\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))} \cos(k-r)t\cos(n-r)tdt, \quad k \geq r, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3.2.2. *Пусть f – произвольная функция из класса $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$, $1 \leq q \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$, n – любое натуральное число, больше r, и $0 < \rho \leq 1$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left\|f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\right\|_{q,\rho} \leq \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{20}$$

Если мажорирующая функция Φ_2 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению (19), то неравенство (20) неулучшаемо в том смысле, что существует функция $f_0 \in W^{(r)}H_q(\Phi_2)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, для которой оно обращается в равенство.

Теорема 3.2.6. *Пусть мажоранта Φ_2 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (19). Тогда для всех $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, при $0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2)\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); \mathscr{L}_{n-1,r-1,\rho}, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d_n^T(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ или $\lambda_n(\cdot)$.

В третьем параграфе третьей главы найдены наилучшие линейные методы приближения и вычислены точные значения n-поперечников классов $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ и $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ в пространстве $H_{q,\rho}\,(1\le q\le\infty, 0<\rho\le 1)$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$ и мажоранта Ψ_1 при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1\bigl(\pi/(2n)\bigr)}\ge\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}(1-\cos t)_* dt. \tag{21}$$

Тогда при всех $1\le q\le\infty$ имеют место равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_q\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_q\right)=d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_q\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right)_{H_q}=\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Множество функций $\{\Psi_1\}$, удовлетворяющих условию (21), не пусто.

Простыми вычислениями можно показать, что функция $\Psi_1^*(t)=t^\alpha$, где

$$\alpha=\frac{2}{\pi-2}\quad(1<\alpha<2),$$

удовлетворяет условию (21). Из теоремы 3.3.1 вытекает следующее

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы 3.3.1 имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*);H_q\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*);H_q\right)=d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*);H_q\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*);H_q\right)=(\pi/2)^{\pi/(\pi-2)}\,(\pi-2)^{-1}\,n^{-r-2/(\pi-2)}.$$

Используя схему рассуждений теоремы 3.2.2, распространим результат теоремы 3.3.1 на пространства Харди $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty,\ 0<\rho\le 1)$.

Теорема 3.3.2. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$ и мажоранта Ψ_1 при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (21). Тогда для всех $1\le q\le\infty$, $0<\rho\le 1$ имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_{q,\rho}\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_{q,\rho}\right)=d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_{q,\rho}\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Далее рассмотрим вопрос о построении наилучшего линейного метода приближения класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$. Здесь доказано, что линейный метод

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f;z) =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k}\right)^r \rho^{2(n-k)} \left[\beta_{k,n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k z^k,$$

где

$$\beta_{k,n} = \frac{n}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} (1-\sin nt)\cos kt dt,$$

является *наилучшим линейным методом приближения* функций класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$.

Имеет место следующая

Теорема 3.3.3. *Если мажоранта Ψ_1 при любых $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (21), то для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n \ge r$, $1 \le q \le \infty$ и $0 < \rho \le 1$ справедливы равенства*

$$d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) = \lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\Big(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}, \mathscr{P}_{n-1}\Big)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Вышеприведённые теоремы 3.3.2 и 3.3.3 допускают обобщение на классе функций $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$. Сформулируем полученные в этом направление результаты.

Теорема 3.3.4 *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ и мажоранта Ψ_2 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Psi_2(h)}{\Psi_2(\pi/2(n-r))} \ge \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (1-\cos t)_* dt. \tag{22}$$

Тогда при всех $1 \le q \le \infty$ и $0 < \rho \le 1$ имеют место равенства

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n^T\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

В продолжение этого параграфа, с целью вычисления точных значений гельфандовского и линейного n-поперечников класса $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ для произвольной функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{A}(U)$ рассмотрен полиномиальный оператор

$$\Lambda^*_{n-1,r,\rho}(f;z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1} \left\{1+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)}\left[\beta_{k,n,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\} c_k(f) z^k, \tag{23}$$

где

$$\beta_{k,n,r} \overset{def}{=} \frac{(n-r)}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} (1-\sin(n-r)x)\cos(k-r)x dx, \ n > k \geq r; \ n,k,r \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.3.5. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ и мажоранта Ψ_2 удовлетворяет условию (22). Тогда при всех $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2)\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\Big(W^{(r)}H_q(\Psi_2); \Lambda^*_{n-1,r,\rho}; \mathscr{P}_{n-1}\Big)_{q,\rho} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d_n^T(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ либо $\lambda_n(\cdot)$. При этом оператор (23) является наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ в пространстве $H_{q,\rho}$.

В заключительном четвёртом параграфе третьей главы приводятся некоторые обобщения результатов параграфа 3.2 для классов функций, определяемых модулями непрерывности первого порядка от граничных значений производных по аргументу $F_a^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$. Введём в рассмотрение следующий класс функций

$$W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu) =$$

$$= \left\{ f(z) \in H^{(r)}_{q,a}: \ \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(F_a^{(r)}; 2t)_q \left[1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right] dt \leq \Phi_1(h) \right\},$$

где $h \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ $(\mu \geq 1)$ – произвольное фиксированное число, а $\Phi_1(x)$ – мажоранта, определённая ранее. Очевидно, что при $\mu = 1$ имеем $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;1) \equiv W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$.

Одним из основных результатов этого параграфа является

Теорема 3.4.2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$ и мажоранта Φ_1 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{2\mu} \int\limits_0^1 (\sin nht)_* \left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2}\right] dt. \tag{24}$$

Тогда при всех $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ $(\mu \geq 1)$ имеют место равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).$$

При этом: а) $L_{n+1}^* = span\{1, z, \cdots, z^n\}$ есть оптимальное подпространство для бернштейновского n-поперечника $b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right)$;

б) L_n^* является экстремальным подпространством для колмогоровского n-поперечника $d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right)$.

Доказывается, что условию (24) удовлетворяет, например, функция $\Phi_1^*(h) = h^\alpha$, где

$$\alpha \overset{def}{=} \alpha(\mu) = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int\limits_0^1 t \cos\frac{\pi t}{2\mu} \left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2}\right] dt, \quad 1 \leq \mu < \infty.$$

В частности, $\alpha(1) = (\pi/2) - 1$, $\lim\limits_{\mu \to \infty} \alpha(\mu) = 1$ и для всех $\mu \in [1, \infty)$ имеем $(\pi/2) - 1 \leq \alpha(\mu) \leq 1$.

Теорема 3.4.3. *Если при заданном $\mu \geq 1$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ мажоранта Φ_1 удовлетворяет ограничению (24), то и при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right) = \mathscr{E}_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}; \mathscr{P}_n\right)_{H_{q,\rho}} :=$$

$$:= \sup\left\{\left\|f - \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}} : \ f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)\right\} = \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).$$

Здесь $\delta_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $d^n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$; линейный полиномиальный оператор $\widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f)$ определяется равенством

$$\widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f;z) \stackrel{def}{=} c_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1+\left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,n}\left(1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k z^k, \qquad (25)$$

где

$$\gamma_{k,n} \stackrel{def}{=} n\mu \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt\cos(\mu nt)dt.$$

При этом: а) линейный полиномиальный оператор (25) является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty,\ 0<\rho\le 1)$;

б) $L_*^n = \{f \in H_{q,\rho}:\ f^{(k)}(0)=0,\ k=0,1,\ldots,n-1\}$ является экстремальным подпространством коразмерности n для гельфандовского n-поперечника $d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right)$;

в) Подпространство $L_n^* = span\{1,\ldots,z^{n-1}\}$ является экстремальным для линейного n-поперечника $\lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right)$.

Результат, полученный в теореме 3.4.3, обеспечивает возможность вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на классах функций $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$, а именно имеет место следующая

Теорема 3.4.4. *Для любых $n,r\in\mathbb{N}$, $\mu\in\mathbb{R}_+$ $(\mu\ge 1)$ и $1\le q\le\infty$ справедливы равенства*

$$\Im_n\Big(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\Big) =$$

$$=\sup\Big\{\,|c_n(f)|:\ f\in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\,\Big\} = \frac{\pi}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).$$

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

1. Юсупов Г.А. Минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2007. Т.50, №11-12. С.811-818.

2. Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ и точные значения n-поперечников // ДАН РТ. 2008. Т.51, №11. С.803-809.

3. Юсупов Г.А. О точных значениях поперечников некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // ДАН РТ. 2008. Т.51, №12. С.810-817.

4. Юсупов Г.А. О некоторых экстремальных задачах наилучшего приближения в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н., 2009, №1(134). С.18-30.

5. Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ // ДАН РТ. 2009. Т.52, №10. С.749-758.

6. Юсупов Г.А. Точные значения средних ν-поперечников некоторых классов целых функций // ДАН РТ. 2010. Т.53, №2. С.85-93.

7. Юсупов Г.А. Точные значения средних поперечников некоторых классов функций в $L_2(-\infty; +\infty)$ // ДАН РТ. 2010. Т.53, №4. С.241-247.

8. Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения и точные значения поперечников некоторых классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ // ДАН РТ. 2010. Т.53, №8. С.588-594.

9. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

10. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал. 2011. Т.52, №6. С.1414-1427.

11. Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значение поперечников множеств в пространстве L_2 // ДАН РТ. 2011. Т.54, №3. С.173-178.

12. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory. 2012. V.164. Issue 1. P.869-878.

13. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. О точных значениях средних ν-поперечников некоторых классов целых функций // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т.18, №4. С.315-327.

14. Юсупов Г.А. Точные неравенства типа Джексона – Стечкина и поперечники функциональных классов в L_2 // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2012. Вып.2. С.124-135.

15. Юсупов Г.А. О наилучших среднеквадратических приближениях на всей оси целыми функциями экспоненциального типа // ДАН РТ. 2013. Т.56, №3. С.192-195.

16. Yusupov G.A. Best polynomial approximations and widths of certain classes of functions in the space L_2 // Eurasian Mathematical Journal. 2013. V.4, №3. P.120-126.

17. Юсупов Г.А. Точные значения поперечников некоторых классов функций из L_2 и минимизация констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т.20, №5. С.106-116.

18. Юсупов Г.А. О наилучших линейных методах приближения функций в пространстве Харди $H_{q,R}$, $0 < R \leq 1$ // ДАН РТ. 2013. Т.56, №12. С.946-953.

19. Юсупов Г.А. Неравенства типа Джексона-Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций из L_2 // Analysis Mathematica. 2014. V.40. Issue 1. P.69-81.

20. Юсупов Г.А. Наилучшие среднеквадратические приближения на всей оси целыми функциями экспоненциального типа и значения поперечников некоторых классов функций // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2014. Ч.1. Вып.1. С.98-116.

21. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники некоторых классов функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2014. Т.57, №2. С.97-102.

22. Юсупов Г.А. Структурные и конструктивные характеристики в L_2 и значения поперечников некоторых функциональных классов // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2015. Вып.3. С.127-144.

23. Юсупов Г.А. О структурных характеристиках функций из L_2 и точных значениях поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. 2015. Т.58, №2. С.101-105.

В других изданиях:

24. Юсупов Г.А. Наилучшие приближение в $L_2[0, 2\pi]$ и точные значение n-поперечников // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и их приложений", 23-24 июня 2010 г. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2010. – С.119-120.

25. Юсупов Г.А. О значениях n-поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложения", 28-30 июня 2011 г. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2011. – С.150-151.

26. Юсупов Г.А. Оптимизация неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", 29-30 июня 2012 г. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2012. – С.206-218.

27. Юсупов Г.А. Неравенства типа Джексона-Стечкина и поперечники классов функций из L_2 // Тезисы докладов четвёртой международной конференции „Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвящённой 90-летию члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук, профессора Л.Д.Кудрявцева, 25-29 марта 2013 г. – Москва. РУДН. 2013. – С.139-140.

28. Юсупов Г.А. О наилучшем приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы теории функций и дифферен-

циальных уравнений", 17-18 июня 2013 г. – Душанбе: Изд-во „Дониш", 2013. – С.147-151.

29. Юсупов Г.А. Наилучшие линейные методы приближения аналитических в круге функций и точные значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания" – посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан, 28-29 июня 2014 г. – Худжанд: Изд-во „Меъроч", 2014. – С.106-116.

30. Юсупов Г.А. О наилучших среднеквадратических приближениях на всей оси целыми функциями экспоненциального типа и точные значения поперечников функциональных классов // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений", 27-28 апреля 2015 г. – Душанбе: Изд-во „ТНУ", 2015. – С.69-71.

31. Юсупов Г.А. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих пространству Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1)$ // Тезисы докладов международной конференции „Функциональные пространства и теория приближения функций", посвящённой 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, 25-29 мая 2015 г. – Москва. МИАН. 2015. – С.254.