Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

На правах рукописи

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
академик АН Республики Таджикистан,
профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

К настоящему времени в решении экстремальных задач теории аппроксимации функций, как в действительной, так и в комплексной области достигнут значительный прогресс. По этой проблематике, берущей своё начало от основополагающих работ П.Л.Чебышёва, К.Ф.Вейерштрасса, С.Н.Бернштейна, А.Н.Колмогорова, написаны десятки монографий (см., например, монографии И.П.Натансон [95], В.Л.Гончарова [52], Н.И.Ахиезера [8], А.Ф.Тимана [129], С.М.Никольского [100], Н.П.Корнейчука [78, 80, 81], С.Б.Стечкина, Ю.Н.Субботина [115], В.К.Дзядык [59], В.М.Тихомирова [132], А.И.Степанец [108], Ph.J.Davis [54], G.G.Lorentz [88], A.Pinkus [104] и др.). Особую роль сыграли работы А.Н.Колмогорова [75] и С.М.Никольского [97], связанные с решением экстремальных задач, когда требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения на заданном классе функций и указать для этого класса наилучший аппарат приближения фиксированной размерности. Усилиями многих математиков, и в первую очередь учеников и последователей Колмогорова и Никольского, такие экстремальные задачи для наиболее употребляемых классов функций решены. Тем не менее, решения указанных задач найдены в небольшом количестве случаев для действительных классов функций. Что же касается решения экстремальных задач для наилучших приближений классов целых функций или классов аналитических в круге функций, то здесь точные результаты известны в редких случаях. Поэтому естественно, что в последнее время всё больше внимание многих специалистов, работающих в области теории аппроксимации, обращено на экстремальные задачи приближения целых функций и аналитических в круге функций.

В диссертации, состоящей из трёх глав, решается ряд конкретных экстремальных задач связанных с:

а) наилучшим приближением 2π-периодических функций в $L_2[0, 2\pi]$ и нахождением значений n-поперечников некоторых классов функций;

б) наилучшим приближением функций, суммируемых с квадратом на всей оси, целыми функциями экспоненциального типа и значении средних

ν-поперечников функциональных классов;

в) отысканием наилучших линейных методов приближения классов аналитических в единичном круге функций и значений n-поперечников классов функций, принадлежащих пространству Харди.

При решении указанных задач в качестве аппарата приближения в соответствие с пунктами а) – в) используются тригонометрические полиномы, целые функции и комплексные алгебраические полиномы.

Отметим, что некоторые результаты окончательного характера, связанные с экстремальными задачами, затронутыми в диссертационной работе, ранее получены в работах Н.И.Черных [146–148], Л.В.Тайкова [121–126], А.А.Лигуна [84–87], В.А.Юдина [172,173], А.Г.Бабенко [9,12,13], А.Г.Бабенко, Н.И.Черных, В.Т.Шевалдина [11], В.И.Иванова [69, 70], В.И.Иванова и О.И.Смирнова [68], Н.Айнуллоева [2, 3], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [5], Х.Юссефа [174], В.В.Шалаева [169], С.Б.Вакарчука [26–32, 34, 35], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [41], М.Г.Есмаганбетова [62], С.Н.Васильева [46, 47], М.Ш.Шабозова [149, 152, 157–159], М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука, В.И.Забутной [164, 167] и многие другие.

Изложим основные результаты диссертации по главам. В первой главе изучается наилучшее полиномиальное приближение классов 2π-периодических суммируемых с квадратом функций $f(x)$, у которых производные $f^{(r-1)}(x)$ $(r \in \mathbb{N})$ локально абсолютно непрерывны, а $f^{(r)}(x) \in L_2[0, 2\pi]$.

В первом параграфе первой главы приводятся основные определения, обозначения, вспомогательные факты и краткая история полученных точных констант в неравенстве Джексона – Стечкина для различных модификаций модулей непрерывности.

Всюду далее приняты следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных чисел вещественной оси.

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу вещественных 2π-периодических функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\| \overset{def}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Символом $\mathcal{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка, не превосходящего $n-1$.

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$ величина её наилучшего полиномиального приближения элементами $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| : \ T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \tag{0.0.1}$$

где $S_{n-1}(x, f)$ – частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$; $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$; $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус и синус коэффициенты Фурье функции f порядка k.

Под $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$; $L_2^{(0)} \equiv L_2$) понимаем множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}(x)$ принадлежат пространству L_2, а через $W_2^{(r)} := W^{(r)}L_2[0, 2\pi]$ обозначим множество функций $f \in L_2$, удовлетворяющих условию $\|f^{(r)}\|_2 \le 1$. Аналогично для банахова пространства X 2π-периодических функций определим множества $X^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$.

Символом $\Delta_h^m(f)$ обозначим норму разности m-го порядка функции $f \in L_2$ с шагом h

$$\Delta_h^m(f) := \|\Delta_h^m f(\cdot)\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(x + kh)\right|^2 dx\right\}^{1/2}$$

и равенством

$$\omega_m(f; t) \overset{def}{=} \sup\Big\{\Delta_h^m(f) : \ |h| \le t\Big\} \tag{0.0.2}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Для оценки наилучших приближений 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2, наряду с (0.0.2), иногда используют следующую усреднённую характеристику гладкости

$$\Omega_m(f;t) = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f\|_{L_2}^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \qquad (0.0.3)$$

где $t > 0$; $\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$.

Основные свойства характеристики гладкости (0.0.3) в качестве обобщённого модуля непрерывности m-го порядка изучены в работе М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [167].

В теории аппроксимации одной из центральных экстремальных задач является задача вычисления точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина. Под неравенствами Джексона – Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве X, понимают неравенства, в которых величина $E(f, Y)_X$ – наилучшего приближения функции конечномерным подпространством Y размерности n оценивается через некоторую характеристику гладкости самой функции или некоторой её производной

$$E(f, Y)_X \le \frac{\chi_r}{n^r} U_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} \right)_X,$$

где X есть пространство C или L_p $(1 \le p < \infty)$, а U_m один из модулей непрерывности ω_m или Ω_m.

Подчёркивая важность оптимизации неравенства Джексона – Стечкина (с целью нахождении точной константы), в монографии В.И.Иванова и О.И.Смирнова [68], отмечается, что «Интерес к точным константам, который сложился вокруг неравенств Джексона – Стечкина, возможно, не был бы столь оправданным, если бы каждый новый случай не требовал привлечения новых идей и методов, которые затем оказывались полезными и при решении других экстремальных задач». Первые точные константы в неравенстве Джексона были получены Н.П.Корнейчуком [77] в случае $U_m = \omega_m$ (при $m = 1$) для пространства $C(0, 2\pi]$ в 1962 г., а для пространства $L_2(0, 2\pi]$ Н.И.Черных [146, 147] в 1967 г. После результатов Н.П.Корнейчука и Н.И.Черных появился интерес к получению точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина и в других банаховых пространствах. В 1992 г.

Н.И.Черных доказал точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L_p(-\pi,\,\pi],\ 1\le p<2$. При $p>2$ эта задача пока остаётся нерешённой.

Позднее этой тематикой в теории приближения занимались В.В.Арестов и В.Ю.Попов [6], А.Г.Бабенко [9–13], В.И.Бердышев [20], В.В.Жук [63, 64], В.И.Иванов [68–70], А.А.Лигун [84–87], Л.В.Тайков [123, 125, 126], В.А.Юдин [172, 173], С.Б.Вакарчук [28, 29, 32, 34, 35], С.Б.Вакарчук и В.И.Забутная [36, 38, 41], В.В.Шалаев [169], М.Ш.Шабозов [158, 159], М.Ш.Шабозов и С.Б.Вакарчук [164] и многие другие математики.

Ясно, что наилучшая константа, вообще говоря, зависит как от пространства X, так и от параметров m,n,r и γ. Поэтому её обозначают через $\chi_{n,r}(X;U_m;\gamma)$ и задача сводится к отысканию величины

$$\chi_{n,r}(X;U_m;\gamma)=\sup\left\{\frac{n^rE_{n-1}(f)_X}{U_m(f^{(r)},\gamma/n)_X}\,:\ f\in X^{(r)},f^{(r)}\neq const\right\},$$

$$(r\in\mathbb{Z}_+,\ m,n\in\mathbb{N},\ \gamma\in\mathbb{R}_+),$$

где X есть C или L_p $(1\le p<\infty)$, U_m – некоторая характеристика гладкости функции $f\in X^{(r)}$, например ω_m или Ω_m.

В случае приближения функции $f\in X^{(r)}$ с помощью линейных операторов A, отображающих $X^{(r)}$ в подпространстве $\mathcal{T}_{2n-1}$, приходим к задаче отыскания величины

$$\chi'_{n,r}(X;U_m;\gamma)=$$

$$=\inf\left\{\sup\left\{\frac{n^r\left\|Af-f\right\|}{U_m(f^{(r)},\gamma/n)_X}:f\in X^{(r)},f^{(r)}\neq const\right\}:\ A:X^{(r)}\to\mathcal{T}_{2n-1}\right\}.$$

Н.П.Корнейчук [77] доказал, что $1-\dfrac{1}{2n}\le\chi_{n,o}(C,\omega;\pi)\le 1$ и, следовательно, $\chi_o(C,\omega;\pi)=\sup\left\{\,\chi_{n,o}(C,\omega;\pi):n\in\mathbb{N}\,\right\}=1$. В дальнейшем, обобщая этот результат, Н.П.Корнейчук [79] показал, что для $\gamma=\pi/k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ имеет место неравенство

$$\frac{k+1}{2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\le\chi_{n,o}\left(C,\omega;\frac{\pi}{k}\right)\le\frac{k+1}{2}.$$

Также отметим, что, как показал С.Б.Стечкин [114], в пространстве L_p $(1 \le p < \infty)$ имеет место неравенство

$$1 \le \chi'_n(L_p; \omega, \pi) \le \frac{3}{2}.$$

Н.И.Черных [147] получил соотношение

$$\chi_{n,o}(L_2, \omega; \pi) = \chi'_{n,o}(L_2; \omega, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а в работе В.В.Жука [63] установлено, что

$$\chi_{n,1}(C, \omega) = \chi'_{n,1}(C, \omega) = \chi_{n,1}(L, \omega) = \chi'_{n,1}(L, \omega) = \frac{\pi}{4}.$$

А.А.Лигун [84] доказал справедливость следующих равенств:

$$\chi_{n,2\nu-1}(C, \omega) = \chi'_{n,2\nu-1}(C, \omega) = \chi_{n,2\nu-1}(L, \omega) = \chi'_{n,2\nu-1}(L, \omega) = \frac{\mathcal{K}_{2\nu-1}}{2},$$

где

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}, \quad \Big(\mathcal{K}_0 = 1,\ \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2},\ \mathcal{K}_2 = \frac{\pi^2}{8},\ \mathcal{K}_3 = \frac{\pi^3}{24}, \ldots\Big)$$

— константы Фавара-Ахиезера-Крейна.

В докладе на международной конференции по теории приближения функций в 1983 г. (г. Киев) Н.И.Черных сообщил, что

$$\chi_{n,o}(L_p; \omega; 2\pi) = 2^{(1-p)/p}, \quad 1 \le p \le 2, \quad n \in \mathbb{N},$$

доказательство которого приведено в работе [148].

Л.В.Тайков [123] нашёл, в частности, асимптотическое поведение $\chi_{n,o}(L_2; \omega; \tau)$ при $\tau \to 0$, получив оценки

$$\left(\frac{1}{2(1-\cos\tau)}\right)^{1/2} \le \chi_{n,r}(L_2; \omega; \tau) \le \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{1/2},\ n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+, \quad (0.0.4)$$

для $0 < \tau \le \pi$. Левую оценку в (0.0.4) реализует функция $f_0(x) = \cos nx$.

А.Г.Бабенко с помощью соображений, подобных тем, которые применял Н.И.Черных [146], вычислил константу $\chi_{n,o}(L_2; \omega; \tau)$ при любых τ, а именно доказал, что для $\tau = \pi/\nu$, где $\nu \ge 1 + 3n/2$, $\nu \in \mathbb{N}$, имеет место равенство

$$\chi_{n,o}(L_2; \omega; \tau) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(\tau/2) - 1/2}{\tau \sin(\tau/2)}\right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

С.Б.Вакарчук [35] распространил результат Л.В.Тайкова [123] для модулей непрерывности m-го порядка, доказав при $\tau \to 0$ неравенства

$$\left(\frac{1}{2(1-\cos\tau)}\right)^{m/2} \le \chi_{n,r}(L_2;\omega_m;\tau) \le \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{m/2},$$
$$(m,n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+).$$

Что же касается вопроса о получении точных констант в неравенстве Джексона для характеристик гладкости $U_m = \Omega_m$, то здесь недавно С.Б.Вакарчуком [34] получен следующий результат:

$$\chi_{n,r}(L_2;\,\Omega_m,\,\tau) = \left\{2\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)\right\}^{-m/2},\ 0<\tau\le\pi/2.$$

Напомним необходимые определения и обозначения, которыми мы пользуемся в дальнейшем. Пусть S – единичный шар в L_2; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное множество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^\perp : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M};L_2) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon>0:\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{M}\Big\}:\ \Lambda_{n+1}\subset L_2\Big\},$$
$$d_n(\mathfrak{M},L_2) = \inf\Big\{\sup\Big\{\inf\Big\{\|f-g\|:\ g\in\Lambda_n\Big\}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}:\Lambda_n\subset L_2\Big\},$$
$$d^n(\mathfrak{M},L_2) = \inf\Big\{\sup\Big\{\|f\|:\ f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\Big\}:\ \Lambda^n\subset L_2\Big\},$$
$$\lambda_n(\mathfrak{M},L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathcal{L}f\|:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}:\ \mathcal{L}L_2\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset L_2\Big\},$$
$$\pi_n(\mathfrak{M},L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathcal{L}^\perp f\|:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}:\ \mathcal{L}^\perp L_2\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset L_2\Big\},$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским, линейным и проекционным* n-поперечниками.

Пусть $\Phi(u)$ $(u\ge 0)$ – произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Обозначая через U_m одну из следующих характеристик гладкости ω_m или Ω_m, введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_{p,h}^{(r)}\Big(U_m;\,\varphi\Big) = \left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int_0^h U_m^p(f^{(r)};\,t)_2\,\varphi(t)dt\le 1\right\},$$

$$W^{(r)}_{p,h}\Big(U_m;\,\varphi,\,\Phi\Big)=\left\{f\in L^{(r)}_2:\ \int\limits_0^h U^p_m(f^{(r)};\,t)_2\,\varphi(t)dt\le\Phi^p(h)\right\},\qquad(0.0.5)$$

для которых вычислим значения перечисленных выше n-поперечников.

Во втором параграфе первой главы с целью компактного изложения полученных ранее результатов в задаче отыскания точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина вводится в рассмотрение экстремальная аппроксимационная характеристика следующего вида

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;h)=\sup_{\substack{f\in L^{(r)}_2\\ f\ne const}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\omega^p_m(f^{(r)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}},\qquad(0.0.6)$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p\in(0,\infty)$, φ – весовая функция на $[0,h]$, то есть, неотрицательная, суммируемая, не эквивалентная нулевой функции на $[0,h]$.

Величины вида (0.0.6) в разное время при фиксированных частных значениях параметров m,n,r,p,h и конкретных весовых функций φ изучали:

1. Н.И.Черных [146]: а) $\chi_{1,n,r,2}(\varphi,\pi/n)$, где $\varphi(t)=\sin nt$;
б) $\chi_{m,n,0,2}(\varphi,2\pi/n)$, где $\varphi(t)=\sin(nt/2)+(\sin nt)/2$;

2. Л.В.Тайков [123]: $\chi_{1,n,r,2}(\varphi,h)$, где $\varphi(t)\equiv1;\ 0<t\le h,\ 0<h\le\pi/(2n)$;

3. Л.В.Тайков [125]: $\chi_{1,n,r,1}(\varphi,\pi/n)$, где $\varphi(t)\equiv1$;

4. Л.В.Тайков [126]: $\chi_{m,n,r,2}(\varphi,h)$, где $\varphi(t)\equiv1;\ 0<t\le h,\ 0<h\le\pi/n$;

5. А.А.Лигун [85]: $\chi_{m,n,r,2}(\varphi,h)$, где $\varphi(t)\ge0;\ 0<t\le h,\ 0<h\le\pi/n$;

6. Н.Айнуллоев [2]: $\chi_{m,n,r,2}(\varphi,h)$, где $\varphi(t)=\sin^\gamma\beta t, 0\le t\le h$; $0\le\gamma\le2r-1,\ r\in\mathbb{N},\ \beta>0,\ 0<\beta h\le\pi$;

7. В.В.Шалаев [169]: $\chi_{m,n,r,2/m}(\varphi,\pi/n)$, где $\varphi(t)=\sin nt$; при $m=1$ следует результат Н.И.Черных из [146];

8. Х.Юссеф [174]: $\chi_{1,n,r,2}(\varphi,h)$, где $\varphi(t)=\sin(\pi t/h)$, $0<t\le h,\ 0<h\le\dfrac{\pi}{n}$;

9. С.Б.Вакарчук [35]: $\chi_{m,n,r,2/m}(\varphi,h)$, где $\varphi(t)\equiv1$, $0\le t\le h, 0<h\le\dfrac{\pi}{2n}$;

10. М.Ш.Шабозов [158]: $\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h)$, где $\varphi(t)\equiv1, m,n,r\in\mathbb{N}, 1/r<p\le2$, $0<t\le h,\ 0<h\le\pi/n$.

Основным результатом данного параграфа является следующая общая

Теорема 1.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, φ – *весовая функция на* $[0, h]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{A_{n,p}^{r,m}(\varphi; h)\right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) \leq \left\{\inf_{n \leq k < \infty} A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h)\right\}^{-1}, \qquad (0.0.7)$$

где

$$A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h) = 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt\right)^{1/p}, \quad k \geq n, \ k \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что теорема 1.2.1 при $p = 2$ содержит результат А.А.Лигуна [85]. В связи с вопросом о точности неравенства (0.0.7), требуется установить равенства

$$\inf_{n \leq k < \infty} A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h) = A_{n,p}^{r,m}(\varphi; h) \qquad (0.0.8)$$

для произвольной весовой функции φ на отрезке $[0, h]$ возникает задача: какими структурными и дифференциальными свойствами должна обладать функция φ, чтобы неравенства (0.0.7) обращались в равенства?

Теорема 1.2.2. *Пусть весовая функция* $\varphi(t)$, *заданная на отрезке* $[0, h]$, *является непрерывной и дифференцируемой на нём. Если при некоторых* $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$ *и любых* $t \in [0, h]$ *выполнено дифференциальное неравенство*

$$(rp - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \qquad (0.0.9)$$

то для любых $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < h \leq \pi/n$ *справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) = 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Из теоремы 1.2.2 при $\varphi(t) = \sin^\gamma (\beta t/h)$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 < h \leq \pi/n$ получаем

Следствие 1.2.2. *Пусть* $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 < h \leq \pi/n$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$. *Тогда при всех* $m, n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\chi_{m,n,r,p}\left(\sin^\gamma (\beta t/h); h\right) =$$

$$= 2^{-m} n^{-r} \left\{\int_0^h (\sin (nt/2))^{mp} \sin^\gamma (\beta t/h) \, dt\right\}^{-1/p}. \qquad (0.0.10)$$

Равенства (0.0.10), в частности, содержит результаты [35,47,126,146,158,169].

Поскольку для $f \in L_2^{(r)}$ её последовательные производные $f^{(s)} \in L_2$ $(s = 0, 1, \ldots, r-1)$, то представляет интерес изучение поведения величины наилучших приближений $E_{n-1}(f^{(s)})$ $(s = 0, 1, \ldots, r-1)$ на указанном классе $L_2^{(r)}$. Приводим решение этой задачи, когда структурные характеристики функции $f \in L_2^{(r)}$ характеризуются усреднёнными с весом $\varphi(t)$ значениями модулей непрерывности $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$. Имеет место следующая

Теорема 1.2.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $s = 0, 1, \ldots, r$; $\varphi(t)$ *– весовая функция на отрезке* $[0, h]$, *удовлетворяющая условию (0.0.9). Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \, \varphi(t) dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Следствие 1.2.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $s = 0, 1, \ldots, r$; $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \le h$, $0 < h \le \pi/n$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \, dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right)^{-1/p}. \tag{0.0.11}$$

Отметим, что равенство (0.0.11) при $s = r$ ранее получено в работе [158].

Следствие 1.2.4. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 2/m$, $s = 0, 1, \ldots, r$; $\varphi(t) = 1$, $0 < t \le h$, $0 < h \le \pi/n$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{2^{m/2} n^{s-m/2} E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t)_2 \, dt\right)^{m/2}} = \frac{1}{\left(nh - \sin nh\right)^{m/2}}. \tag{0.0.12}$$

Равенство (0.0.12) при $s = r$ и $m = 1$ было доказано Л.В.Тайковым [123], а при $s = r$ и любых $m \in \mathbb{N}$ доказано С.Б.Вакарчуком [35].

Следствие 1.2.5. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 2/m$, $s = 0, 1, \ldots, r$; $\varphi(t) = t$, $0 < h \leq \pi/n$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{h^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h t\, \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t)_2\, dt\right)^{m/2}} = \left\{1 - \frac{2 \sin nh}{nh} + \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}.$$

Из теоремы 1.2.3 при $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 < h \leq \pi/n$ вытекает

Следствие 1.2.6. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 < h \leq \pi/n$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt\right)^{-1/p}. \quad (0.0.13)$$

В частности, из (0.0.13) при $s = r, p = 2, 0 < \gamma \leq 2r - 1, \beta = \pi/2, h = \pi/n$ получаем результат Н.Айнуллоева [3], а в случае $s = r$ и выполнении остальных условий следствия 1.2.6 получаем результат М.Г.Есмаганбетова [62].

Третий параграф первой главы посвящён вычислению n-поперечников следующих классов функций

$$W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m; \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t\right) = \left\{f \in L_2^{(r)} : \int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt \leq 1\right\},$$

$$W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m; \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t, \Phi\right) =$$

$$= \left\{f \in L_2^{(r)} : \int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt \leq \Phi^p(h)\right\}, \quad (0.0.14)$$

определённых при любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $0 < p \leq 2$, $0 < \beta \leq \pi$ и $0 < h \leq \pi/n$, $\Phi(h)$ – мажоранта, определённая в (0.0.5).

Полагаем $E_{n-1}(\mathfrak{M})_{L_2} = \sup\Big\{E_{n-1}(f)_2 : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$

Теорема 1.3.1. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $0 \le \gamma \le rp-1$, $0 < \beta \le \pi$ и $0 < h \le \pi/n$ справедливы равенства*

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m; \sin^\gamma \frac{\beta}{h}t\right); L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m; \sin^\gamma \frac{\beta}{h}t\right); L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m; \sin^\gamma \frac{\beta}{h}t\right); L_2\right) = 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t dt\right)^{-1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников: бернштейновский $b_k(\cdot)$, колмогоровский $d_k(\cdot)$, линейный $\lambda_k(\cdot)$, гельфандовский $d^k(\cdot)$, проекционный $\pi_k(\cdot)$.

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 справедливы равенства*

$$\delta_{2n}\Big(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m; \sin^\gamma nt); L_2\Big) = \delta_{2n-1}\Big(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m; \sin^\gamma nt); L_2\Big) =$$

$$= E_{n-1}\Big(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m; \sin^\gamma nt); L_2\Big) =$$

$$= 2^{-(m+\gamma/p)}n^{-r+1/p}\left\{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{mp+\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+1\right)}\right\}^{-1/p}, \qquad (0.0.15)$$

где $\Gamma(u)$ – гамма-функция Эйлера, а $\delta_k(\cdot)$ – любой из перечисленных выше k-поперечников.

Отметим, что при соответствующих значениях параметров p и γ частные результаты, перечисленные в работах [35, 158, 169], вытекают из (0.0.15).

В 1910 году А.Лебегом [83] было введено понятие модуля непрерывности ω для функций $f \in C$, $C \overset{def}{=} C(0, 2\pi]$. Там же для указанной характеристики были получены оценки коэффициентов Фурье. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций в разное время рассматривались А.В.Ефимовым [61], А.Ф.Тиманом [129], Н.П.Корнейчуком [78], В.И.Бердышевым [20], С.Милорадовичем [92, 93], С.А.Теляковским [127, 128], А.И.Степанцом [108], С.Б.Вакарчуком [29, 34, 35, 38, 41], М.Ш.Шабозовым [158–164] и многими другими математиками. Задача подобного рода для класса функций

$W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\dfrac{\beta}{h}t\right)$ также представляет определённый интерес. Например, теорема 1.3.1 обеспечивает возможность вычисления указанных верхних граней на рассматриваемом классе функций. Условимся, всюду в дальнейшем, что если $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций, заданных и определённых на $[0,2\pi]$, то положим

$$\Im_n(\mathfrak{N})=\sup\Big\{\,|a_n(f)|:\ f\in\mathfrak{N}\Big\}=\sup\Big\{\,|b_n(f)|:\ f\in\mathfrak{N}\Big\},$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ суть косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Теорема 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.1 справедливы равенства*

$$\Im_n\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\right)\right)=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}.$$

Всюду далее полагаем

$$\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^m\overset{def}{=}\left\{\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m,\ \text{если}\ \ nt\le\pi;\quad 1,\ \text{если}\ \ nt>\pi\right\}.$$

Теорема 1.3.3. *Если для любого заданного* $0<\mu\le1$ *и для всех* $\lambda>0$, $0<\beta,u\le\pi,\ 0\le\gamma\le rp-1,\ 0<p\le2$, *функция* $\Phi(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^p(\mu u)\int\limits_0^{\lambda\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta v}{\lambda\pi}dv\le\Phi^p(\lambda u)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta v}{\mu\pi}dv,\qquad(0.0.16)$$

то и с любыми $m,n,r\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)=\delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right)\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\mu\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{n\beta}{\mu\pi}tdt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right),$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot),d_k(\cdot),d^k(\cdot),\ \lambda_k(\cdot)$ *и* $\pi_k(\cdot)$.

Ради простоты, при $\gamma = 0$ выясним значения α, при которых функция $\Phi_*(u) = u^\alpha$ удовлетворяет этим условиям. С этой целью запишем неравенство (0.0.16) в эквивалентной форме

$$\int\limits_0^{\lambda\pi} \left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp} dv \le \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha p} \int\limits_0^{\mu\pi} \left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp} dv, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \mu \le 1. \qquad (0.0.17)$$

Теорема 1.3.4. *Для того чтобы неравенство (0.0.17) имело место с любыми заданными $\lambda > 0$, $0 < \mu \le 1$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, необходимо и достаточно, чтобы число $\alpha = \alpha(\mu; m, p)$ определялось по формуле*

$$\alpha = \alpha(\mu; m, p) = \mu\pi \left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{mp} \left\{ p \int\limits_0^{\mu\pi} \left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp} dv \right\}^{-1}.$$

Следствие 1.3.2. *Для любых натуральных m, n, r; $0 < p \le 2$,*

$$\alpha = \alpha(1; m, p) = \frac{\sqrt{\pi}}{p}\,\Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1\right) \left\{ \Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right) \right\}^{-1},$$

справедливы равенства

$$\delta_{2n}\Big(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\Phi_*)\,,\,L_2\Big) = \delta_{2n-1}\Big(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\Phi_*)\,,\,L_2\Big) =$$

$$= E_{n-1}\Big(W_p^{(r)}(\omega_m;\,\Phi_*)\Big)_{L_2} = 2^{-m}(\alpha p)^{1/p}\,\pi^{\alpha-1/p}\,n^{-r-\alpha+1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из перечисленных выше k-поперечников.

Наряду с определением класса (0.0.14) при $\beta = nh$, $0 < h \le 2\pi$, $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, $0 \le \gamma \le rp - 1$ также вводим в рассмотрение класс

$$W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\,\sin^\gamma nt,\,\Phi\Big) = \left\{ f \in L_2^{(r)}:\ \left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};\,t)\sin^\gamma ntdt\right)^{1/p} \le \Phi(h) \right\}.$$

Положим

$$(nh - \pi)_+ = \Big\{\ 0,\ \text{если}\ nh \le \pi;\ nh - \pi,\ \text{если}\ nh > \pi \Big\}.$$

Теорема 1.3.5. *Пусть* $m,n,r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$ *и* $0 \le \gamma \le rp-1$. $\Phi(h) \in C[0,2\pi]$ *и для некоторой* $h_* \in [0,\pi/n]$ *достигается нижняя грань*

$$\inf_{0\le h\le 2\pi} \frac{\Phi(h)}{\left(\int\limits_0^{\min(h,\pi/n)} \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma nt dt + \frac{(nh-\pi)_+}{n}\right)^{-1/p}} = Q.$$

Тогда справедливы равенства

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\right) = 2^{-m}n^{-r}Q,$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot), d_k(\cdot), d^k(\cdot), \lambda_k(\cdot), \pi_k(\cdot)$.

В четвёртом параграфе первой главы рассматривается задача оптимизации неравенства Джексона – Стечкина с целью отыскания минимальной константы относительно всего множества приближающихся подпространств фиксированной размерности N. Отметим, что в случае первого модуля непрерывности в пространстве $C(0,2\pi]$ с равномерной нормой Н.П.Корнейчук [77] вычислил значение минимальной константы Джексона и показал, что задача о минимальной константе сводится к задаче вычисления n-поперечника по Колмогорову соответствующего класса функций. В случае пространства L^2 аналогичная задача рассмотрена Н.А.Барабошкиной [16], где найденные ею нижние оценки для минимальных констант Джексона совпадают с известными оценками сверху, установленными Н.И.Черных [146,147], В.А.Юдиным [172] и С.Н.Васильевым [47].

Обозначим через

$$W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h} = \left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p}$$

среднее в p-ой степени значение модуля непрерывности порядка $\omega_m(f^{(r)};t)$ с суммируемым весом $\varphi(t) \ge 0$, где $m,r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le \pi$ и положим

$$L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi) = \Big\{f \in L_2^{(r)}:\ W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h} \le 1\Big\}.$$

В этих обозначениях отыскание наименьшей константы в неравенстве Джексона – Стечкина равносильно задаче вычисления точной верхней грани

$$\mathbb{K}_{m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2, \Im_N\right) = \sup\left\{\frac{E(f,\Im_N)_2}{W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h}} :\ f\in L_2^{(r)}\right\}.$$

Здесь мы будем искать минимальную константу относительно всего множества приближающих подпространств $\Im_N \subset L_2$ фиксированной размерности N. Этим мы покажем, что полученные ранее результаты не могут быть улучшены за счёт перехода к другим подпространствам той же размерности:

$$\mathbb{K}_{N,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \inf\left\{\mathbb{K}_{m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2, \Im_N\right) :\ \Im_N\subset L_2\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sup\left\{\frac{E\left(f,\Im_N\right)_2}{W_m\left(f^{(r)};\varphi\right)_{p,h}} :\ f\in L_2^{(r)}\right\} :\ \Im_N\subset L_2\right\}.$$

Положим также

$$E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right)_2 = \sup\left\{\|f-S_{n-1}(f)\|_2 :\ f\in L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right\}.$$

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.2.2. Тогда при всех* $m,n\in\mathbb{N}$ *и* $0<h\le\pi/n$ *справедливы равенства*

$$\mathbb{K}_{2n,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \mathbb{K}_{2n-1,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right)_2 =$$

$$= \delta_{2n}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi), L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* k*-поперечников* $b_k(\cdot), d^k(\cdot), d_k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ *и* $\pi_k(\cdot)$. *Все* k*-поперечники реализуются частичными суммами ряда Фурье* $S_{k-1}(f;t)$.

Из теоремы 1.4.2 вытекает результат работы М.Г.Есмаганбетова [62].

Следствие 1.4.1. *Пусть* $\varphi_*(t) = \sin^\gamma(\beta t/h);\ 0\le\gamma\le rp-1,\ r\ge 1$, $1/r<p\le 2$. *Тогда имеют место равенства*

$$\mathbb{K}_{2n,m,p,h,\varphi_*}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \mathbb{K}_{2n-1,m,p,h,\varphi_*}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) =$$

$$= \delta_{2n}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi_*), L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi_*), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \sin^\gamma \frac{\beta}{h}tdt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из перечисленных выше k-поперечников.

В завершающем пятом параграфе первой главы приводятся результаты, обобщающих результаты параграфов 1.2 – 1.4 на случай дробного производного в смысле Вейля. Следует отметить, что ряд экстремальных задач теории аппроксимации, связанный с понятием дробной производной Вейля в пространствах L_p, $1 \le p \le \infty$, ранее рассматривался в работе А.И.Козко [74] и для классов функций с усреднённым значением модуля непрерывности m-го порядка, принадлежащих пространству L_2, в работах М.Г.Есмаганбетова [62], М.Ш.Шабозова и С.Д.Темурбековой [165].

В последнее время часто используются различные модификации классического модуля непрерывности m-го $(m \in \mathbb{N})$ порядка (0.0.2). Результаты, полученные в пятом параграфе, связаны с понятием модуля непрерывности дробного порядка. Это понятие было введено почти одновременно в 1977 году в работах P.L.Butzer, H.Dyckhoff, E.Goerlich, R.L.Stens [24] и R.Tabersky [119]. Следуя обозначениям [24, 119], определим разности дробного порядка β $(\beta \in \mathbb{R}_+)$ функции $f(x)$ в точке x $(x \in \mathbb{R})$ с шагом h $(h \in \mathbb{R})$ равенством

$$\Delta_h^\beta f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\beta}{\nu}f(x+(\beta-\nu)h), \tag{0.0.18}$$

где

$$\binom{\beta}{\nu} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-\nu+1)}{\nu!} \quad \text{для } \nu > 1,$$

$$\binom{\beta}{\nu} = \beta \quad \text{для} \ \ \nu = 1 \quad \text{и} \quad \binom{\beta}{\nu} = 1 \ \ \text{для} \ \ \nu = 0.$$

Приведём следующие свойства разности (0.0.18), доказанные в [24, 119, 134]:

1) $\|\Delta_h^\beta f(\cdot)\|_{L_p} \le C(\beta)\|f\|_{L_p}$, где $C(\beta)$ – константа, зависящая от $\beta > 0$,

$$\text{причём } C(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\binom{\beta}{k}\right| \le 2^{\{\beta\}}, \text{ где } \{\beta\} = \inf\{k:\ k \ge \beta\},\ k \in \mathbb{N};$$

2) $\Delta_h^\gamma(\Delta_h^\beta f) = \Delta_h^{\gamma+\beta} f$; 3) $\|\Delta_h^{\gamma+\beta} f\|_{L_p} \le 2^{\{\beta\}}\|\Delta_h^\gamma f\|_{L_p}$; 4) $\lim\limits_{h\to 0+}\|\Delta_h^\beta f\|_{L_p} = 0$.

Модуль непрерывности произвольного дробного порядка $\beta \in \mathbb{R}_+$ функции $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$ определим равенством [24, 119, 134]

$$\omega_\beta(f;t) = \sup\Big\{\ \|\Delta_h^\beta f(\cdot)\|_p:\ |h| \le t\ \Big\} =$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\beta}{\nu} f(\cdot + (\beta-\nu)h)\right\|_p:\ |h| \le t\right\}. \qquad (0.0.19)$$

Основные свойства модуля непрерывности (0.0.19) изучены в работах [24, 119, 134]. В частности, модуль непрерывности (0.0.19) функции $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$ обладает следующими свойствами:

1) $\lim\limits_{t\to 0}\omega_\beta(f;t) = 0$; 2) $\omega_\beta(f;t) \le 2^{\{\beta-\delta\}}\omega_\delta(f;t),\ 0 < \delta \le \beta$;

3) $\omega_\beta(f+\varphi;t) \le \omega_\beta(f;t) + \omega_\beta(\varphi;t)$.

В этом параграфе приводим обобщение и развитие некоторых результатов работ [160, 165] на случай модуля непрерывности произвольного дробного порядка $\beta > 0$ для классов дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве L_2. Доказываются некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими многочленами и усреднённым с весом модулем непрерывности произвольного дробного порядка, вычислены точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих пространству L_2. Для функции $f \in L_2$ с рядом Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big),$$

введём в рассмотрение производную порядка $\alpha \geq 0$ в смысле Вейля [49], определённую равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \left\{ a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\}.$$

Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \geq 0$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций f, у которых существует производная $f^{(\alpha)} \in L_2$ ($f^{(0)} \equiv f$). Если $S_{n-1}(f^{(\alpha)}; x)$ ($\alpha \geq 0$) – частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами T_{n-1} степени не выше $n-1$ имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) \equiv E\left(f^{(\alpha)}; \Im_{2n-1}\right) = \inf\left\{\|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\| : \ T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\right\} =$$

$$= \|f^{(\alpha)} - S_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha} \rho_k^2\right)^{1/2},$$

где, по-прежнему, $\rho_k^2 := \rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$. Следуя работам [160, 165], введём в рассмотрение следующую аппроксимационную характеристику

$$\chi_{\beta,\alpha,n,p}(\varphi; h) = \sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)}; t)\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}, \tag{0.0.20}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq 2$, φ – весовая функция на отрезке $[0, h]$, причём в (0.0.20), ради удобства, условно полагаем $0/0 \overset{def}{=} 0$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1.5.2. *Пусть $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$, φ – заданная на $[0, h]$ непрерывно дифференцируемая весовая функция. Если при некоторых $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leq 2$ и любых $t \in [0, h]$ выполнено дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \tag{0.0.21}$$

то при всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 < h < \pi/n$ справедливы равенства

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^\beta n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Обозначим через $W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^\omega_\beta$ – класс функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ таких, что для $0 \le t \le h,\, , \, 0 < h \le \pi/n$ выполняется условие

$$W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p = \left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p} \le \omega(h),$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть неотрицательная неубывающая полуаддитивная на $[0,h]$ $(0 \le h \le \pi)$ функция такая, что $\omega(0) = 0$.

В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 1.5.4. *Пусть $\alpha,\beta > 0$, $0 < h \le \pi/n$ и выполнено неравенство (0.0.21). Тогда справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^\omega_\beta; L_2\right) = \delta_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^\omega_\beta; L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^\omega_\beta\right) = \frac{1}{2^\beta n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\omega(h),$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников Бернштейна $b_k(\cdot)$, Гельфанда $d^k(\cdot)$, Колмогорова $d_k(\cdot)$, линейного $\delta_k(\cdot)$, проекционного $\pi_k(\cdot)$. Все n-поперечники реализуются частичными суммами Фурье $S_{n-1}(f;t)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(\alpha)}$.

Вторая глава диссертации, посвящена решению ряда экстремальных задач теории приближения функций на вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Начало исследований, связанных с аппроксимацией функций на прямой $\mathbb{R}$, было положено в работах С.Н.Бернштейна, использовавшего для этого в качестве аппарата приближения пространства целых функций конечной степени. В дальнейшем этой проблематике посвящены фундаментальные работы Н.Винера, Н.И.Ахиезера, М.Г.Крейна, С.М.Никольского, А.Ф.Тимана, Р.Боаса, И.И.Ибрагимова и многих других (см., например, монографии [8,67,100,129] и приведённую в них литературы). В восьмидесятых годах прошлого столетия появились работы И.И.Ибрагимова и Ф.Г.Насибова [66], Ф.Г.Насибова [94], В.Ю.Попова [103] по приближению функций суммируемыми с квадратом на всей оси целыми функциями, в которых найдены точные константы, и сравнительно недавно опубликованы работы Г.Г.Магарил-Ильяева [89, 90], С.Б.Вакарчука [32, 42, 43], М.Ш.Шабозова и Р.Мамадова [151], М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука, Р.Мамадова [156], а также С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и М.Р.Лангаршоева [44], в которых вычислены точные значения средних ν-поперечников для различных классов из пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Приведём необходимые определения, обозначения общего характера, постановки задач и известные результаты, имеющие непосредственное отношение ко второй главе диссертации. Всюду далее под $L_p(\mathbb{R}), 1 \le p \le \infty$ будем понимать пространство измеримых на всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \ 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = ess\,sup \Big\{ |f(x)| : \ x \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Через $L_p^{(r)}(\mathbb{R})$ $(1 \le p \le \infty; \ r \in \mathbb{N})$ обозначим множество функций $f \in L_p(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$. Символом $B_{\sigma,p}$ $(0 < \sigma < \infty; 1 \le p \le \infty)$ обозначим сужение на $\mathbb{R}$ множества всех целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R})$. Величину

$$A_\sigma(f)_p := \inf \Big\{ \|f - g_\sigma\|_p : \ g_\sigma \in B_{\sigma,p} \Big\}, \ (0 < \sigma < \infty; 1 \le p \le \infty)$$

называют наилучшим приближением функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p \le \infty)$ элементами множества $B_{\sigma,p}$. Модулем непрерывности m-го порядка функции

$f \in L_p(\mathbb{R})$ называют величину

$$\omega_m(f,t)_p \overset{def}{=} \sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}: \ |h| \le t\Big\} \ \ (0 \le t < +\infty),$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k f(x+kh)$$

– разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Для решения последующих экстремальных задач приближения функций на всей оси целыми функциями сначала установим неулучшаемые неравенства Джексона – Стечкина, связывающие наилучшие приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ посредством целых функций $g_\sigma \in B_{\sigma,2}$ с модулями непрерывности высших порядков указанных функций или их производных. Хорошо известно [67, с.64-70], что любая функция вида

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izu} \varphi(u) du, \quad \varphi(u) \in L_2(-\sigma;\sigma)$$

принадлежит пространству $B_{\sigma,2}$, причём $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L_2(-\sigma;\sigma)}$, а также известно [66, 103], что если

$$F(f;x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt$$

– преобразование Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, то целая функция

$$F_\sigma(f;x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \chi_\sigma(t) F(f;t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt} F(f;t) dt,$$

где $F(f;t)$ – преобразование Фурье функции f ($\chi_\sigma(t)$ – характеристическая функция интервала $(-\sigma,\sigma)$), принадлежит классу $B_{\sigma,2}$ и наименее отклоняется от f в смысле метрики $L_2(\mathbb{R})$. При этом

$$A_\sigma(f)_2 = \|f - F_\sigma(f)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int_{|t| \ge \sigma} |F(f;t)|^2 dt \right)^{1/2}. \qquad (0.0.22)$$

Из (0.0.22) и соответствующего обратного преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(f;t) e^{-ixt} dt$$

сразу следует, что для любого $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$

$$A_\sigma(f^{(r)})_2 = \left(\int\limits_{|t|\geq\sigma} |F(f;t)|^2 t^{2r} dt \right)^{1/2} \geq \sigma^r A_\sigma(f)_2.$$

В.Ю. Поповым [103] доказано, что если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то имеет место равенство

$$\omega_m^2(f;t)_2 = 2^m \sup_{|h|\leq t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(f;x)|^2 (1-\cos hx)^m dx. \qquad (0.0.23)$$

Некоторые экстремальные задачи теории приближения функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, структурные характеристики которых выражаются посредством модуля непрерывности (0.0.23), решены С.Б.Вакарчуком [42, 43]. При решении аналогичных задач теории приближения $f \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями мы используем характеристику гладкости (см. формулу (0.0.3)):

$$\Omega_m(f;t)_p = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}^p dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/p}, \qquad (0.0.24)$$

где $0 < t < \infty$, $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$,

$$\Delta_{h_j}^1 f = f(\cdot + h_j) - f(\cdot), \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

В задачах аппроксимации функций $f \in L_p(\mathbb{R})$ целыми функциями $g_\sigma \in B_{\sigma,p}$, указанная характеристика нашла применение в работах С.Б.Вакарчука [32], а также С.Б.Вакарчука и В.Г.Доронина [40]. В частности, в работе [32] С.Б.Вакарчук доказал, что

$$\Xi_{\sigma,r,m}(t) \stackrel{def}{=} \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r A_\sigma(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)};t/\sigma)_2} = \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-m/2}.$$

Если полагать

$$\Theta_{\sigma,r,m}(\psi;h) \stackrel{def}{=} \sup\left\{\frac{2^m A_\sigma^2(f)_2}{\int\limits_0^h \Omega_m^2(f^{(r)};t)\psi(t)dt}: \quad f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})\right\},$$

где $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$ и $0<h\leq 3\pi/4$, $\psi(t)\geq 0$ – суммируемая не эквивалентная нулю функция на отрезке $[0,h]$, то основной результат работы [40] заключается в следующем утверждении.

Теорема А. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<h\leq 3\pi/4$ *и* ψ *– некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0,h]$ *функция, тождественно не равная нулю. Тогда выполняются следующие неравенства*

$$\Big\{\mathcal{D}_{\sigma,r,m}(\psi;h)\Big\}^{-1}\leq\Theta_{\sigma,r,m}(\psi;h)\leq\Big\{\inf_{\sigma\leq t<\infty}\mathcal{D}_{t,r,m}(\psi;h)\Big\}^{-1}, \qquad (0.0.25)$$

где

$$\mathcal{D}_{t,r,m}(\psi;h)=t^{2r}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m\psi(t)dt.$$

Отметим, что неравенство (0.0.25) является своеобразным обобщением неравенства А.А.Лигуна [85], доказанного для наилучшего полиномиального приближения множеств 2π-периодических функций $f\in L_2^{(r)}[0,2\pi]$ на случай наилучшего приближения функций $f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ целыми функциями $g_\sigma\in B_{\sigma,2}$. Наша цель в данной главе состоит в обобщении неравенства (0.0.25) и получении ряда более общих результатов в этом направлении.

С целью компактного изложения полученных далее результатов введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\chi_{\sigma,m,r,q}(\psi;h)=\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,\psi(t)dt\right)^{1/q}},$$

где $m\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{Z}_+$; $0<q\leq 2$; $\sigma,h\in\mathbb{R}_+$ и $\psi(t)$ – весовая функция на $[0,h]$,

т.е. неотрицательная, суммируемая, не эквивалентная нулевой функции на отрезке $[0,h]$.

Основным результатом первого параграфа второй главы является

Теорема 2.1.1. *Пусть* $m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<h\leq\pi/\sigma$, $0<q\leq 2$ *и* $\psi(t)$ *– весовая функция на* $[0,h]$. *Тогда выполняются следующие неравенства*

$$\Big\{\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,\sigma)\Big\}^{-1}\leq\chi_{\sigma,m,r,q}(\psi;h)\leq\Big\{\inf_{\sigma\leq t<\infty}\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,t)\Big\}^{-1},$$

где

$$\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,t)=\left(t^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin tx}{tx}\right)^{mq/2}\psi(x)dx\right)^{1/q},\quad t\geq\sigma.$$

Заметим, что теорема А вытекает из теоремы 2.1.1 при $q=2$. Из теоремы 2.1.1 в свою очередь вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда при любом* $0<h\leq 3\pi/(4\sigma)$ *справедливы равенства*

$$\chi_{\sigma,m,r,q}(\psi;h)=\Big\{\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,\sigma)\Big\}^{-1}:=$$

$$:=\left(\sigma^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\tau\sigma}{\tau\sigma}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}.$$

В некоторых ситуациях, при отыскании точной верхней грани классов функций $f\in L_2(\mathbb{R})$, структурные свойства которых задаются модулем непрерывности (0.0.24), весьма полезным является

Следствие 2.1.1. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<q\leq 2$ *и* $g(\tau)$ *– некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0,a]$ *функция, где* $0<a<\pi$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\Big\{\mathcal{D}_{m,r,q}(g;a,1)\Big\}^{-1}\leq\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{r-1/q}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^q(f^{(r)};\tau/\sigma)\,g(\tau)d\tau\right)^{1/q}}\leq$$

$$\leq\Big\{\inf_{x\geq 1}\mathcal{D}_{m,r,q}(g;a,x)\Big\}^{-1},$$

где

$$\mathcal{D}_{m,r,q}(g;a,x)=\left(x^{rq}\int\limits_0^a\left(1-\frac{\sin x\tau}{x\tau}\right)^{mq/2}g(\tau)d\tau\right)^{1/q}.$$

Очевидно, что если

$$\inf_{x\geq 1}\mathcal{D}_{m,r,q}(g;a,x)=\mathcal{D}_{m,r,q}(g;a,1), \tag{0.0.26}$$

то имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{r-1/q}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^q(f^{(r)};\tau/\sigma)\,g(\tau)d\tau\right)^{1/q}}=\frac{1}{\mathcal{D}_{m,r,q}(g;a,1)}.$$

Для частных классов весовых функций из теоремы 2.1.1 вытекает

Следствие 2.1.2. *Пусть* $g_*(t)=t^{rq-1}g_1(t)$ $(0<q\leq 2,\ r\in\mathbb{N})$ *– неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,a]$, $0<a<\pi$ *функция,* $g_1(t)$ *– невозрастающая на* $[0,a]$ *функция. Тогда имеет место (0.0.26) и справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{r}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^a\Omega_m^q(f^{(r)};\tau/\sigma)\,\tau^{rq-1}g_1(\tau)d\tau\right)^{1/q}}=\frac{1}{\mathcal{D}_{m,r,q}(g_*;a,1)}.$$

Хорошо известно [17, с.236], что если $f^{(r)}\in L_2(\mathbb{R})$, то и все промежуточные производные $f^{(r-s)}\in L_2(\mathbb{R})$, $s=1,2,\ldots,r-1$. Представляет определённый интерес отыскание экстремальных характеристик, содержащих величины наилучших приближений производных $A_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}$ элементами подпространства $B_{\sigma,2}$ в норме $L_2(\mathbb{R})$. Справедлива следующая общая

Теорема 2.1.3. *Пусть* $m,r\in\mathbb{N}$, $0<q\leq 2$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<h\leq 3\pi/(4\sigma)$, $\psi(\tau)$ *– весовая функция на отрезке* $[0,h]$. *Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^s\,A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}}=\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q},$$

где $s=0,1,2,\ldots,r$. *Если, в частности,* $m,r\in\mathbb{N}$, $q=2/m$, $0<h\le 3\pi/(4\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $s=0,1,2,\ldots,r$ *и* $\psi(\tau)\equiv 1$, *то*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{s-m/2}A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^{2/m}(f^{(r)};\tau)\,d\tau\right)^{m/2}}=\Big(\sigma h-Si(\sigma h)\Big)^{-m/2},$$

где $Si(t)=\int\limits_0^t\dfrac{\sin x}{x}dx$ *– интегральный синус.*

Если же, $m,r\in\mathbb{N}$, $q=2/m$, $0<h\le 3\pi/(4\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $s=0,1,2,\ldots,r$ *и* $\psi(\tau)\equiv\tau$, *то имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^{s-m}A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\tau\Omega_m^{2/m}(f^{(r)};\tau)\,d\tau\right)^{m/2}}=\Big[(\sigma h)^2-2(1-\cos\sigma h)\Big]^{-m/2}.$$

Прежде чем привести точные значения средних ν-поперечников классов функций, приведём нужные нам в дальнейшем определения и обозначения общего характера из работ Г.Г.Магарил-Ильяева [89, 90].

Общеизвестно, что до недавнего времени подпространство $B_{\sigma,p}$ $(0<\sigma<\infty;\ 1\le p\le\infty)$ было в некотором смысле единственным аппаратом приближения в $L_p(\mathbb{R})$ и только лишь с конца прошлого века все чаще в качестве аппроксимирующего множества используются целые функции и сплайны (см., например, C. de Boor, I.J.Schoenberg [60], Сунь Юн-шен и Ли Чунь [117, 118], Г.Г.Магарил-Ильяев [91]). Если рассматривать задачу приближения $f\in L_p(\mathbb{R})$, то целые функции и сплайны являются бесконечномерными образованиями и величины, характеризующие соответствующие приближения, выражаются в терминах, отражающих внутреннюю структуру аппарата аппроксимации, например: степень целой функции экспоненциального типа, плотность распределения узлов сплайна. Возникает естественный вопрос: как сравнивать между собой подобные способы приближения? Введение Г.Г.Магарил-Ильяевым [89,90] определения средней размерности, являющейся определенной модификацией соответствующего понятия, данного ранее В.М.Тихомировым [133], позволило определить асимптотические характеристики подпространств, подобные поперечникам, где роль размерности играет средняя размерность. В результате этого оказалось возможным сравнить аппроксимативные свойства подпространства $B_{\sigma,p},\ 1 \le p \le \infty$ с аналогичными характеристиками иных подпространств из $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \le p \le \infty$ той же размерности и решать в $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \le p \le \infty$ экстремальные задачи теории аппроксимации вариационного содержания.

Пусть $\mathbb{B}L_p(\mathbb{R}) = \{\varphi \in L_p(\mathbb{R}) :\ \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R})} \le 1\}$ – единичный шар в $L_p(\mathbb{R})$; $Lin(L_p(\mathbb{R}))$ является совокупностью всех линейных подпространств в $L_p(\mathbb{R})$;

$$Lin_n(L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \Big\{\mathcal{J} \in Lin(L_p(\mathbb{R})) : dim\mathcal{J} \le n\Big\},\ n \in \mathbb{Z}_+;$$

$$d(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \sup\Big\{\inf\{\|f-\varphi\|_p : \varphi \in \mathfrak{N}\} :\ f \in \mathfrak{M}\Big\}$$

– наилучшее приближение множества $\mathfrak{M} \subset L_p(\mathbb{R})$ множеством $\mathfrak{N} \subset L_p(\mathbb{R})$. Под $\mathfrak{N}_T, T > 0$ понимаем сужение множества $\mathfrak{N} \subset L_p(\mathbb{R})$ на отрезок $[-T, T]$, а через $Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{J} \in Lin(L_p(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_p([-T, T])$ при любом $T > 0$. Если $\mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $T,\ \varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $M \in Lin_n(L_p([-T, T])$, для которых

$$d((\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T, M, L_p([-T, T])) < \varepsilon.$$

Пусть

$$D_\varepsilon(T, \mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \exists M \in Lin_n(L_p([-T, T])),$$
$$d((\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T, M, L_p([-T, T])) < \varepsilon\}.$$

В работе [89] доказано, что данная функция не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \lim\{\liminf\{D_\varepsilon(T, \mathcal{J}, L_p(\mathbb{R}))/(2T) : T \to \infty\} : \varepsilon \to 0\},$$

где $\mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{J}$ в $L_p(\mathbb{R})$. Г.Г.Магарил-Ильяевым [89, 90] доказано, что

$$\overline{dim}(B_{\sigma,p}; L_p(\mathbb{R})) = \sigma/\pi, \ (1 \leq p \leq \infty).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ – центрально-симметричное подмножество из $L_p(\mathbb{R})$ и $\nu > 0$ – произвольное число. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R})) \overset{def}{=} \inf\Big\{\sup\Big\{\inf\Big\{\|f-\varphi\|_p : \varphi \in \mathcal{J}\Big\} : f \in \mathfrak{M}\Big\} :$$

$$\mathcal{J} \in Lin_c(L_p(\mathbb{R})), \overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) \leq \nu\Big\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называют экстремальным. Средним линейным ν-поперечником множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R})) \overset{def}{=} \inf\{\sup\{\|f - \Lambda f\| : f \in \mathfrak{M}\} : (X, \Lambda)\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, Λ) таким, что X есть нормированное пространство, непрерывно вложенное в $L_p(\mathbb{R})$; $\mathfrak{M} \subset X$; $\Lambda : X \longrightarrow L_p(\mathbb{R})$ является непрерывным линейным оператором, для которого $Im\,\Lambda \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $\overline{dim}(Im\,\Lambda, L_p(\mathbb{R})) \leq \nu$. Пару (X^*, Λ^*), на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной.

Величину

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R})) \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \sup\Big\{\sup\Big\{\rho > 0 : \mathcal{J} \cap \rho\,\mathbb{B}L_p(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}\Big\} : \mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}), \overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) > \nu,$$

$$\overline{d}_\nu(\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}), L_p(\mathbb{R})) = 1\Big\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{J}$ при вычислении внешней точной верхней грани, означает, что рассматриваются только те пространства, для которых верен аналог теоремы В.М.Тихомирова о поперечнике шара [81, с.341]. В [89,90] доказывается, что указанному требованию удовлетворяет, например, пространство $B_{\sigma,p}$, если $\sigma > \nu\pi$.

Между вышеперечисленными экстремальными характеристиками множества $\mathfrak{M}$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства [32, 90]

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leq \overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leq \overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})).$$

Всюду далее наилучшее приближение класса $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ подпространством $B_{\sigma,2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ обозначим

$$A_\sigma(\mathfrak{M})_2 := \sup\Big\{A_\sigma(f)_{L_2(\mathbb{R})} : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Для пары $(L_2^{(r)}(\mathbb{R}), \Lambda)$, где $\Lambda : L_2^{(r)}(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ – непрерывный линейный оператор, для которого $Im\,\Lambda \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $\overline{dim}(Im\,\Lambda, L_p(\mathbb{R})) \leq \nu$, полагаем

$$\mathcal{E}_\nu(\mathfrak{M}; (L_2(\mathbb{R}), \Lambda)) \overset{def}{=} \sup\Big\{\|f - \Lambda f\| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Рассматриваемые во второй главе классы функций определяются следующим образом. Пусть по прежнему ψ – неотрицательная суммируемая на $[0, h]$ $(0 < h \leq \pi)$ не эквивалентная нулю функция. Через $W_q^{(r)}(\Omega; \psi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \leq 2$, обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, при любом $h \in (0, \pi]$ удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}; t)_2\, \psi(t)dt \leq 1.$$

Пусть $\Phi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ $(t \geq 0)$ – произвольные непрерывные возрастающие функции такие, что $\Phi_i(0) = 0$. Символом $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$, обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, r-тые производные которых удовлетворяют условию

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}; t)_2\, dt\right)^{1/q} \leq \Phi_1(h)$$

для любого $h \in (0, \pi]$. Аналогичным образом для $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$, $0 < h \leq \pi$, через $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_2)$ определим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, r-тые производные которых удовлетворяют ограничению

$$\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,dt\right)^{1/q} \le \Phi_2(h).$$

Наконец для любых $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<q\le 2$ и $h\in[0,\pi]$ полагаем

$$W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3)=\left\{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R}):\ \frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^q(f^{(r)},t)_2\,dt\le\Phi_3^q(h)\right\}.$$

При выполнении ряда ограничений относительно параметров r,q,h и мажорант Φ_i $(i=1,2,3)$ найдены точные значения вышеперечисленных средних поперечников классов $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1)$, $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2)$ и $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и указаны соответствующие экстремальные подпространства. Следуя работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [36], полагаем

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)_* := \begin{cases} 1-\dfrac{\sin x}{x}, & \text{если}\quad 0<x<t_*;\\[2mm] 1-\dfrac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если}\quad x\ge t_*,\end{cases}$$

где через t_* обозначена величина аргумента $x\in(0,\infty)$ функции $\sin x/x$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $x=\operatorname{tg}x$. Простые вычисления показывают, что $4,49<t_*<4,51$.

В формулировке нижеследующих теорем через $\overline{\pi}_\nu(\cdot)$ обозначим любой из средних поперечников: бернштейновский $\overline{b}_\nu(\cdot)$, колмогоровский $\overline{d}_\nu(\cdot)$ или линейный $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$.

Теорема 2.2.1. *Если для всех $\mu>0$, $0<h\le\pi$, $m,r\in\mathbb{N}$, $0<q\le 2$ мажоранта $\Phi_1(u)$ удовлетворяет условию*

$$\Phi_1^q\left(\frac{h}{\mu}\right)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2}dt\le\Phi_1^q(h)\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt, \qquad (0.0.27)$$

то для любого $\nu>0$ имеют место равенства

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1),L_2(\mathbb{R}))=A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1))_{L_2(\mathbb{R})}=$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1);(L_2(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_1(1/\nu).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*)$, *где* $\Lambda_{\nu\pi}^*$ *определяется из условия*

$$F(\Lambda_{\nu\pi}^* f,\cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f,\cdot),$$

(F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ *– характеристическая функция интервала* $(-\nu\pi,\nu\pi)$*), будет экстремальной для среднего линейного поперечника* $\overline{\delta}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1),L_2(\mathbb{R}))$, *а пространство* $B_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1),L_2(\mathbb{R}))$.

Доказано, что среди степенных функций $\Phi_1^*(u) = u^{\alpha/q}$, возрастающих на положительной полуоси, существует та, для которой выполняется неравенство (0.0.27) при любых значениях $\mu > 0$, $h \in (0,\pi]$, $m,r \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$.

Теорема 2.2.2. *Для того, чтобы неравенство (0.0.27) имело место с любыми заданными* $\mu > 0,\ 0 < h \leq \pi;\ m,r \in \mathbb{N},\ 0 < q \leq 2$, *необходимо и достаточно, чтобы число* $\alpha = \alpha(m,q)$ *определялось по формуле*

$$\alpha = \pi\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right\}^{-1}.$$

Легко доказать, что граничные значения α находятся в области

$$\frac{mq}{2}+1 \leq \alpha \leq mq+1;\quad m\in\mathbb{N},\ 0<q\leq 2.$$

Из теоремы 2.2.1 вытекает следующее

Следствие 2.2.1. *Если для всех* $\mu > 0,\ 0 < h \leq \pi,\ m \in \mathbb{N}$ *мажоранта* $\Phi_1(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(h/\mu)}\right)^{2/m} \geq (\pi - Si(\pi))^{-1}\int\limits_0^{\mu\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* dt, \tag{0.0.28}$$

где $Si(t) = \displaystyle\int\limits_0^t \frac{\sin x}{x}dx$ *– интегральный синус, то при всех* $m,r\in\mathbb{N}$, $r \geq m/2$ *и* $\nu > 0$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1),L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1);(L_2(\mathbb{R}),\Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+m/2}\,(\pi - Si(\pi))^{-m/2}\,\Phi_1(1/\nu).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}),\Lambda^*_{\nu\pi})$, *где* $\Lambda^*_{\nu\pi}$ *определяется из условия*

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi}f,\cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f,\cdot),$$

(F *– преобразование Фурье в* $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ *– характеристическая функция интервала* $(-\nu\pi,\nu\pi)$*), будет экстремальной для среднего линейного поперечника* $\overline{\delta}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1),L_2(\mathbb{R}))$*, а пространство* $B_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1),L_2(\mathbb{R}))$.

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (0.0.28), не пусто. Условию (0.0.28) удовлетворяет, например, функция

$$\Phi^*_1(h) = h^{\alpha m/2},\ m\in\mathbb{N},\ \alpha = \pi/(\pi - Si(\pi)).$$

Теорема 2.2.4. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<q\le 2$ *и мажоранта* $\Phi_2(u)$ *при любых значениях* $h\in\mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/\sigma)}\right)^q \ge \frac{\pi}{\sigma h}\left\{\int\limits_0^{\sigma h}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2}dt\right\}\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right\}^{-1}. \qquad (0.0.29)$$

Тогда для любого $\nu>0$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_2),L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_2))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_2);(L_2(\mathbb{R}),\Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_2(1/\nu).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}),\Lambda^*_{\nu\pi})$, *где* $\Lambda^*_{\nu\pi}$ *определяется из условия*

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi}f,\cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f,\cdot),$$

(F *– преобразование Фурье в* $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ *– характеристическая функция интервала* $(-\nu\pi,\nu\pi)$*), будет экстремальной для среднего линейного поперечника* $\overline{\delta}_\nu(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_2),L_2(\mathbb{R}))$*, а пространство* $B_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_2),L_2(\mathbb{R}))$.

Мажорантная функция

$$\Phi_2^*(t) = t^{\alpha/q}, \quad \text{где} \quad \alpha = \pi \left\{ \int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt \right\}^{-1} - 1,$$

удовлетворяет условию (0.0.29). Очевидно, что $mq/2 \le \alpha \le mq$, $m \in \mathbb{N}$, где $0 < q \le 2$.

Теорема 2.2.5. *Если для всех* $\mu > 0$, $0 < h < \pi$, $q = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ *мажоранта* Φ_3 *удовлетворяет условию*

$$\left\{ \frac{\Phi_3(h)}{\Phi_3(h/\mu)} \right\}^{2/m} \ge \frac{8}{\pi^2 - 8} \cdot \frac{1}{\mu^2} \int\limits_0^{\mu\pi/2} t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* dt,$$

то для любого $r \in \mathbb{Z}_+$, $\nu > 0$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_\nu \Big(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3); (L_2^{(r)}(\mathbb{R}), \Lambda) \Big) =$$

$$= 2^{-m/2} (\nu\pi)^{-r} \left(\pi^2/(\pi^2 - 8)\right)^{m/2} \Phi_3\left(1/(2\nu)\right).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}^*)$, *где* $\Lambda_{\nu\pi}^*$ *определяется из условия*

$$F(\Lambda_{\nu\pi}^* f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot) F(f, \cdot),$$

(F *– преобразование Фурье в* $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ *– характеристическая функция интервала* $(-\nu\pi, \nu\pi)$*), будет экстремальной для среднего линейного поперечника* $\overline{\delta}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3)$, *а пространство* $B_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3)$.

В этом параграфе также приведено одно общее утверждение для класса функций $W_q^{(r)}(\Omega_m; \psi)$, зависящее от произвольной суммируемой не эквивалентной нулю на $(0, \pi]$ $(0 < h < \pi)$ функции ψ.

Теорема 2.2.6. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < q \le 2$ *и число* h $(0 < h \le 3\pi/4)$ *удовлетворяет условию* $\sigma h \in t_*$. *Тогда для любого* $\nu > 0$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \psi), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \psi))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi);(L_2(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}\psi(t/\pi\nu)dt\right)^{-1/q}.$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*)$, *где* $\Lambda_{\nu\pi}^*$ *определяется из условия*

$$F(\Lambda_{\nu\pi}^* f,\cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f,\cdot),$$

(F *– преобразование Фурье в* $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ *– характеристическая функция интервала* $(-\nu\pi,\nu\pi)$*), будет экстремальной для среднего линейного поперечника* $\overline{\delta}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi),L_2(\mathbb{R}))$, *а пространство* $B_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi),L_2(\mathbb{R}))$.

Следствие 2.2.2. *При выполнении всех условий теоремы 2.2.6, когда* $\psi(t)\equiv 1$ *и* $\psi(t)\equiv t$, *соответственно при* $r\ge m/2$, $m\in\mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\,1),L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\,1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\,1);(L_2(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*))_{L_2(\mathbb{R})} = 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r-m/2}\Big(\nu\pi h - Si(\nu\pi h)\Big)^{-m/2},$$

$$\overline{\pi}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\,t),L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\,t))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\,t);(L_2(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*))_{L_2(\mathbb{R})} = (\pi\nu)^{-r-m}\Big[(\nu\pi h)^2 - 2(1-\cos\nu\pi h)\Big]^{-m/2}.$$

В завершение этого параграфа рассмотрим задачу отыскания точных значений верхних граней наилучших приближений $A_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}$ ($r\in\mathbb{N}$, $s=0,1,\ldots,r$) на рассмотренных классах функций $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_i)$ $(i=1,2,3)$, определяемых заданными мажорантными функциями Φ_i $(i=1,2,3)$.

Теорема 2.2.7. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.1,* $r\in\mathbb{N}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$ *и* $s=0,1,\ldots,r$. *Тогда имеют место равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f\in W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_1)\Big\} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s+1/q}\left(\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Следствие 2.2.3. *В условиях теоремы 2.2.7 имеют место равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f\in W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_1)\Big\}=$$

$$=2^{-m/2}\,\pi^{-s}\nu^{-s+m/2}\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)^{-m/2}\Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Теорема 2.2.8. *При выполнении всех условий теоремы 2.2.4, для любых* $r\in\mathbb{N}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$ *и* $s=0,1,\ldots,r$ *справедливы равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f\in W^{(r)}_{q}(\Omega_m;\Phi_2)\Big\}=$$

$$=2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_2\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

и, в частности, при $q=2/m$ *имеем*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f\in W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_2)\Big\}=$$

$$=2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s}\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)^{-m/2}\Phi_2\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Теорема 2.2.9. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.5. Тогда для любых* $r\in\mathbb{N}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$ *и* $s=0,1,\ldots,r$ *выполняются равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f\in W^{(r)}_{q}(\Omega_m;\Phi_3)\Big\}=$$

$$=2^{-m/2}(\nu\pi)^{-s}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)^{m/2}\Phi_3\left(\frac{1}{2\nu}\right).$$

Третья глава диссертационной работы посвящена отысканию точных значений n-поперечников различных классов функций, аналитических в единичном круге, и построению наилучших линейных методов приближения в рассматриваемых классов.

К настоящему времени в задаче отыскания точных значений n-поперечников классов аналитических в круге функций в различных банаховых пространствах получен ряд окончательных результатов. Следует отметить, что первые результаты, связанные с вычислением точных значений колмогоровских n-поперечников в пространстве Харди H_q, $1 \le q \le \infty$, принадлежат В.М.Тихомирову [131] (случай $q = \infty$) и Л.В.Тайкову [121] (случай $1 \le q < \infty$). Работы В.М.Тихомирова и Л.В.Тайкова базируются на основополагающем результате К.И.Бабенко [14], в котором был получен линейный метод аппроксимации одного класса функций, аналитических в единичном круге функций, пригодный для оценок n-поперечников сверху и использованный позднее многими другими математиками. Развивая эту тематику, Л.В.Тайков [122, 124], Н.Айнуллоев и Л.В.Тайков [5] получили точные значения колмогоровских n-поперечников в метрике пространства Харди для некоторых классов аналитических в единичном круге функций, граничные значение которых представлены свёрткой, либо усреднённые модули непрерывности или гладкости их граничных значений мажорируются заданными функциями. Эти идеи стали очень плодотворными и в дальнейшем указанная тематика развивалась в работах М.З.Двейрина [56], М.З.Двейрина и И.В.Чебаненко [57], Ю.А.Фаркова [138, 139], С.Д.Фишера и М.И.Стесина [142], A.Pinkus [104], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [37], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [39], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова [150] и другими.

Особый интерес представляет построение наилучших линейных методов приближения (как ранее изученных, так и изучаемых новых классов аналитических функций) и связанные с этим задачи вычисления точных значений различных n-поперечников, в частности отыскания точных значений гельфандовских и линейных n-поперечников. В этом направлении исследования уже получен ряд окончательных результатов в работах Л.В.Тайкова [120], J.T.Scheick [170], В.И.Белый [18], В.И.Белый и М.З.Двейрина [19], М.З.Двейрина [55], К.Ю.Осипенко [101, 102], С.Б.Вакарчука [26, 27, 30, 31], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [37], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [39], в которых найдены наилучшие линейные методы приближения различных классов аналитических в круге функций. Тем не менее ещё для многих классов аналитических функций даже в пространстве H_q, $1 \le q \le \infty$ значения n-поперечников и наилучшие линейные методы приближения не найдены.

Приведём необходимые определения и обозначения, используемые нами в дальнейшем. Пусть $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathcal{A}(U_\rho)$ – множество функций комплексного переменного $f(z)$, аналитических в круге

$$U_\rho := \Big\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| < \rho \Big\} \quad (0 < \rho \leq 1, \ U_1 = U).$$

Через H_q $(1 \leq q \leq \infty)$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim \Big\{ M_q(f,\rho) : \ \rho \to 1-0 \Big\},$$

где

$$M_q(f,\rho) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right\}^{1/q}, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Хорошо известно, что норма функции $f \in H_q$ реализуется на её угловых граничных значениях $F(t) := f(e^{it})$, которые существуют почти для всех $t \in [0, 2\pi]$. В случае $q = \infty$, дополнительно будем предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге $\bar{U}_\rho = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq \rho\}, \ 0 < \rho \leq 1$.

Символом $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty, \ 0 < \rho \leq 1, \ H_{q,1} = H_q)$ обозначим банахово пространство Харди функций $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$, для которых

$$\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} \stackrel{def}{=} \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty.$$

Через $f_a^{(r)}(z)$ $(r \in \mathbb{Z}_+, \ f_a^{(0)}(z) \equiv f(z))$ обозначим производную r-го порядка $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho\, exp(it)$:

$$f_a^{(1)}(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial t} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = f'(z) z i,$$

$$f_a^{(r)}(z) := \Big\{ f_a^{(r-1)}(z) \Big\}_a' \qquad (r \geq 2, \ r \in \mathbb{N}),$$

а обычную r-ую производную по переменному z обозначим

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r}, \ r \in \mathbb{N}.$$

Под $H_{q,a}^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+, \ 1 \leq q \leq \infty, \ H_{q,a}^{(0)} \equiv H_{q,a})$ будем понимать класс функций $f \in \mathcal{A}(U)$, у которых $f_a^{(r)}$ принадлежит пространству H_q $(1 \leq q \leq \infty)$.

Аналогичным образом $H_q^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le q \le \infty,\ H_q^{(0)} \equiv H_q)$ означает класс функций $f \in \mathcal{A}(U)$, у которых $f^{(r)} \in H_q$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le q \le \infty)$.

Через $\mathscr{P}_n$ обозначим множество комплексных алгебраических полиномов степени не выше n, а равенством

$$E_{n-1}(f)_q := E(f, \mathscr{P}_{n-1}) = \inf\Big\{\|f - p_{n-1}\|_q :\ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\Big\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in H_q$ элементами подпространства $\mathscr{P}_{n-1}$ в пространстве H_q.

Всюду далее структурные свойства функции $f \in H_q$ $(1 \le q \le \infty)$ будем характеризовать скоростью убывания к нулю модуля непрерывности граничных значений r-ых производных $F_a^{(r)}(t)$ (или $F^{(r)}(t)$, $r \in \mathbb{Z}_+$):

$$\omega(F_a^{(r)}; t)_q := \sup\left\{\left\|F_a^{(r)}\left(x + \frac{h}{2}\right) - F_a^{(r)}\left(x - \frac{h}{2}\right)\right\|_q :\ |h| \le t\right\},$$

$$\left(\omega(F^{(r)}; t)_q := \sup\left\{\left\|F^{(r)}\left(x + \frac{h}{2}\right) - F^{(r)}\left(x - \frac{h}{2}\right)\right\|_q :\ |h| \le t\right\}\right),$$

или модуля гладкости граничных значений указанных производных

$$\omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q := \sup\Big\{\|F_a^{(r)}(x+h) - 2F_a^{(r)}(x) + F_a^{(r)}(x-h)\|_q :\ |h| \le t\Big\},$$

$$\Big(\omega_2(F^{(r)}; 2t)_q := \sup\Big\{\|F^{(r)}(x+h) - 2F^{(r)}(x) + F^{(r)}(x-h)\|_q :\ |h| \le t\Big\}\Big),$$

задавая скорость убывания посредством мажоранты некоторой усреднённой величины, содержащей $\omega(F_a^{(r)}; t)_q$ $(\omega(F^{(r)}; t)_q)$ или $\omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q$ $(\omega_2(F^{(r)}; 2t)_q)$.

Пусть $\Phi_i(u)$ и $\Psi_i(u)$ $(i = 1,2;\ u \ge 0)$ – произвольные возрастающие непрерывные функции такие, что $\Phi_i(0) = \Psi_i(0) = 0$ $(i = 1,2)$. Используя функции $\Phi_i(u)$ и $\Psi_i(u)$ в качестве мажоранты, введём в рассмотрение следующие классы аналитических функций.

Через $W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty)$ обозначим класс функций $f \in H_{q,a}^{(r)}$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega(F_a^{(r)}; 2t)_q\, dt \le \Phi_1(h),$$

а через $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty)$ – класс функций $f \in H_q^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняются условия

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(F^{(r)}; 2t)_q \, dt \leq \Phi_2(h).$$

Аналогичным образом, через $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty)$ обозначим класс функций $f \in H_{q,a}^{(r)}$, для которых

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q \, dt \leq \Psi_1(h),$$

а $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ соответствующий класс функций $f \in H_q^{(r)}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(F^{(r)}; 2t)_q \, dt \leq \Psi_2(h).$$

Положим также

$$(\sin t)_* := \Big\{\sin t,\ \text{если}\ \ 0 < t \leq \pi/2;\ \ \ 1,\ \text{если}\ \ t \geq \pi/2\Big\},$$

$$(1-\cos t)_* := \Big\{1-\cos t,\ \text{если}\ 0 < t \leq \pi;\ \ \ 2,\ \text{если}\ t \geq \pi\Big\}.$$

В пункте 1.1.4 параграфа 1.1 мы привели определения колмогоровского, линейного, проекционного, гельфандовского и бернштейновского n-поперечников. К этой серии n-поперечников добавим ещё один, так называемый тригонометрический n-поперечник, введённый в 1974 г. Р.С.Исмагиловым [72].

Пусть X – банахово пространство функций, аналитических в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1\}$. Величину

$$d_n^T(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\{m_k\}_{k=1}^n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{\{c_k\}_{k=1}^n} \left\| f(z) - \sum_{k=1}^n c_k z^{m_k} \right\|_X,$$

где $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$, $m_k \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1,n}$, называют тригонометрическим n-поперечником компакта $\mathfrak{M}$ в банаховом пространстве X. При вычислении тригонометрического n-поперечника мы опираемся на следующее утверждение, которое вытекает из результата М.З.Двейрина и И.В.Чебаненко [57, с.66].

Лемма 3.1.1. *Пусть* $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ *– произвольные неотрицательные целые числа,* $m_i \neq m_j$ *при* $i \neq j$. *Тогда имеет место равенство*

$$\inf\left\{\left\|z^{m_0} - \sum_{k=1}^{n} a_k z^{m_k}\right\|_{H_{q,\rho}} :\ a_i \in \mathbb{C}\right\} = \left\|z^{m_0}\right\|_{H_{q,\rho}}, \quad (1 \le q \le \infty,\, 0 < \rho \le 1).$$

Далее воспользуемся соотношениями [31]

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{matrix} \le d_n^T(\mathfrak{M}, X) \le \lambda_n(\mathfrak{M}, X). \tag{0.0.30}$$

Наши дальнейшие исследования об отыскании наилучших линейных методов приближения изучаемых нами классов функций основаны на следующих известных результатах Л.В.Тайкова [122, 124], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [5], Н.Айнуллоева [4] о наилучших приближениях аналитических в единичном круге функций и некоторых их обобщениях.

В работе [122] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in H_{q,a}^{(r)} \cap H_q^{(r)}$ $(1 \le q \le \infty,\, r \ge 1,\, r \in \mathbb{N})$ имеют место точные неравенства

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{1}{2n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(F_a^{(r)}; 2t)_q dt, \tag{0.0.31}$$

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{n-r}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega(F^{(r)}; 2t)_q dt,\ n > r,\ n \in \mathbb{N}, \tag{0.0.32}$$

а в [124] указана зависимость между наилучшим приближением функции $f(z) \in H_{q,a}^{(r)} \cap H_q^{(r)}$ $(1 \le q \le \infty, r \ge 1,\ r \in \mathbb{N})$ и усреднённым значением модулей гладкости производных r-ых порядков:

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{1}{(\pi-2)n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q dt, \tag{0.0.33}$$

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{n-r}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega_2(F^{(r)}; 2t)_q dt, \tag{0.0.34}$$

где в (0.0.32) и (0.0.34) введено обозначение

$$\alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1),\ n > r;\ n, r \in \mathbb{N},$$

причём все неравенства (0.0.31) – (0.0.34) обращаются в равенства для функции

$$f_0(z) = az^n \in H_{q,a}^{(r)} \cap H_q^{(r)},\ a \in \mathbb{C},\ n, r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty.$$

Основная цель третьей главы – вычисление точных значений всех вышеперечисленных в неравенстве (0.0.30) n-поперечников для классов функций, введённых в пункте 3.1.2, и отыскание наилучших линейных методов приближения указанных классов функций.

Теорема 3.2.1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ и мажоранта Φ_1 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2n))} \ge \frac{\pi}{2nh} \int_0^{nh} (\sin t)_* dt. \tag{0.0.35}$$

Тогда имеют место равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_q\right) = d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_q\right) = d_n^T\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_q\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)\right)_{H_q} = \frac{\pi}{4n^r} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Множество функций $\{\Phi_1\}$, удовлетворяющих условию (0.0.35), не пусто.

Примером функции, удовлетворяющей условию (0.0.35), является мажоранта $\Phi_1^*(t) = t^\alpha$, где

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.57.$$

Из теоремы 3.2.1 вытекает

Следствие 3.2.1. *В условиях теоремы 3.2.1 справедливы равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1^*); H_q\right) = d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1^*); H_q\right) = d_n^T\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1^*); H_q\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1^*)\right)_{H_q} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pi/2} n^{-(r-1)-\pi/2}.$$

Полученные результаты в теореме 3.2.1 распространяются на более общий случай $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$.

Теорема 3.2.2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$ и мажоранта Φ_1 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (0.0.35). Тогда при любых $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$*

справедливы равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_{q,\rho}\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_{q,\rho}\right)=d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_{q,\rho}\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)\right)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (0.0.36)$$

Далее доказывается, что результат (0.0.36) справедлив для гельфандовского и линейного n-поперечников. С этой целью для каждой функции

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k\in\mathcal{A}(U)$$

сопоставим в соответствие линейный полиномиальный оператор $(n-1)$-й степени

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;z):=\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;\mathscr{P}_{n-1},z)=c_0+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{k,r-1,\rho}\,c_k(f)z^k,$$

где

$$\lambda_{k,r-1,\rho}=1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\rho^{2(n-k)}\left[1-n\mu_k\left(1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right)\right],\ \ k=\overline{1,n-1};$$

$$\mu_k=\int\limits_0^{\pi/(2n)}\cos kx\cos nxdx.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2.1. *Пусть $f(z)$ – произвольная функция из класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$, $r\in\mathbb{N}$. Тогда для любого числа $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\left\|f-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;\mathscr{P}_{n-1})\right\|_{H_{q,\rho}}\le\frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right),\quad 0<\rho\le 1. \qquad (0.0.37)$$

Если мажорирующая функция Φ_1 при любых $h\in\mathbb{R}_+$ и $n\in\mathbb{N}$ удовлетворяет ограничению (0.0.35), то неравенство (0.0.37) точно в том смысле, что существует функция $f_0(z)\in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$, обращающая его в равенство.

Теорема 3.2.3. *Если мажоранта Φ_1 удовлетворяет условию (0.0.35), то при любых $n,r\in\mathbb{N}$ и $0<\rho\le 1$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_{q,\rho}\right)=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)\right)_{H_{q,\rho}}=$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1); \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;\mathscr{P}_{n-1})\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot)$, $d_n^T(\cdot)$ *или* $\lambda_n(\cdot)$.

Далее доказываются аналоги теоремы 3.2.1 – 3.2.3 для класса функций $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$ в пространстве $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$.

Теорема 3.2.4. *Если при любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \ge 1$ *мажоранта* Φ_2 *для любого* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/2(n-r))} \ge \frac{\pi}{2(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (\sin t)_*\, dt, \qquad (0.0.38)$$

то

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) = d_n^T\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2)\right)_{H_q} = \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

Множество функций $\{\Phi_2\}$, *удовлетворяющих условию (0.0.38), не пусто.*

Таковой является, например, функция $\Phi_2^*(t) = t^{\pi/2-1}$.

Теорема 3.2.5. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ *и мажоранта* Φ_2 *при любом* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению (0.0.38). Тогда при любых* $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$ *справедливы равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n^T\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

Распространим результат теоремы 3.2.5 на гельфандовский и линейный n-поперечники. Для этой цели, следуя схеме доказательства леммы 3.2.1, каждой функции $f(z) \in \mathcal{A}(U)$ сопоставим в соответствие линейный полиномиальный оператор $(n-1)$-й степени

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f; z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\rho^{2(n-k)}\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k,$$

где $c_k(f)$ – коэффициенты Тейлора функции $f(z)$, а числа $\gamma_{k,r}$ определены равенством

$$\gamma_{k,r}=(n-r)\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))}\cos(k-r)t\cos(n-r)tdt,\quad k\geq r,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Лемма 3.2.2. *Пусть f – произвольная функция из класса $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$, $1\leq q\leq\infty$, $r\in\mathbb{N}$, n – любое натуральное число, большее r и $0<\rho\leq 1$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left\|f-\Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\right\|_{q,\rho}\leq\frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{0.0.39}$$

Если мажорирующая функция Φ_2 при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению (0.0.38), то неравенство (0.0.39) неулучшаемо в том смысле, что существует функция $f_0\in W^{(r)}H_q(\Phi_2)$, $r\in\mathbb{N}$, $1\leq q\leq\infty$, для которой оно обращается в равенство.

Теорема 3.2.6. *Пусть мажоранта $\Phi_2(h)$ при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (0.0.38). Тогда для всех $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$, при $0<\rho\leq 1$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2);H_{q,\rho}\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2)\right)_{H_{q,\rho}}=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2);\mathscr{L}_{n-1,r-1,\rho},\mathscr{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d_n^T(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ или $\lambda_n(\cdot)$.

В третьем параграфе третьей главы найдены наилучшие линейные методы приближения и вычислены точные значения n-поперечников классов $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ и $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ в пространстве $H_{q,\rho}\,(1\leq q\leq\infty, 0<\rho\leq 1)$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$ и мажоранта Ψ_1 при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1\big(\pi/(2n)\big)}\geq\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}(1-\cos t)_*dt. \tag{0.0.40}$$

Тогда при всех $1 \le q \le \infty$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_q\right) = d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_q\right) = d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_q\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right)_{H_q} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Множество функций $\{\Psi_1\}$ *, удовлетворяющих условию (0.0.40), не пусто.*

Простыми вычислениями можно показать, что функция $\Psi_1^*(t) = t^\alpha$, где

$$\alpha = \frac{2}{\pi-2} \quad (1 < \alpha < 2)$$

удовлетворяет условию (0.0.40). Из теоремы 3.3.1 вытекает следующее

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы 3.3.1 имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*); H_q\right) = d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*); H_q\right) = d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*); H_q\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*); H_q\right) = (\pi/2)^{\pi/(\pi-2)}\,(\pi-2)^{-1}\,n^{-r-2/(\pi-2)}.$$

Используя схему рассуждений теоремы 3.2.2, распространим результат теоремы 3.3.1 на пространства Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$.

Теорема 3.3.2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ *и мажоранта* Ψ_1 *при любом* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию (0.0.40). Тогда для всех* $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) = d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Далее рассмотрим вопрос о построении наилучшего линейного метода приближения класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$. Здесь доказано, что линейный метод

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f; z) =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{1 + \left(\frac{k}{2n-k}\right)^r \rho^{2(n-k)}\left[\beta_{k,n}\left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right) - 1\right]\right\} c_k z^k,$$

где

$$\beta_{k,n}=\frac{n}{\pi-2}\int\limits_{0}^{\pi/(2n)}(1-\sin nt)\cos kt dt,$$

является *наилучшим линейным методом приближения* функций класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty,\ 0<\rho\le 1)$.

Имеет место следующая

Теорема 3.3.3. *Если мажоранта Ψ_1 при любых $n\in\mathbb{N}$ и $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (0.0.40), то для любых $n,r\in\mathbb{N}$, $n\ge r$, $1\le q\le\infty$ и $0<\rho\le 1$ справедливы равенства*

$$d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_{q,\rho}\right)=\lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_{q,\rho}\right)=$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\Big(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);\mathscr{L}_{n-1,r,\rho},\mathscr{P}_{n-1}\Big)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Вышеприведённые теоремы 3.3.2 и 3.3.3 допускают обобщение на классе функций $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$. Сформулируем полученные в этом направление результаты.

Теорема 3.3.4 *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$ и мажоранта Ψ_2 при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Psi_2(h)}{\Psi_2(\pi/2(n-r))}\ge\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{(n-r)h}\int\limits_{0}^{(n-r)h}(1-\cos t)_* dt. \qquad (0.0.41)$$

Тогда при всех $1\le q\le\infty$ и $0<\rho\le 1$ имеют место равенства

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2);H_{q,\rho}\right)=d_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2);H_{q,\rho}\right)=d_n^T\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2);H_{q,\rho}\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2)\right)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

В продолжение этого параграфа, с целью вычисления точных значений гельфандовского и линейного n-поперечников класса $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ для произвольной функции $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k\in\mathcal{A}(U)$ рассмотрен полиномиальный оператор

$$\Lambda^*_{n-1,r,\rho}(f;z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)}\left[\beta_{k,n,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k, \qquad (0.0.42)$$

где

$$\beta_{k,n,r} \stackrel{def}{=} \frac{(n-r)}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/2(n-r)}(1-\sin(n-r)x)\cos(k-r)x dx,\ n>k\geq r,\ n,k,r\in\mathbb{N}.$$

Теорема 3.3.5. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ и мажоранта Ψ_2 удовлетворяет условию (0.0.41). Тогда при всех $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2);H_{q,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2)\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$=\mathscr{E}_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2);\Lambda^*_{n-1,r,\rho};\mathscr{P}_{n-1}\right)_{q,\rho} = \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d_n^T(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ либо $\lambda_n(\cdot)$. При этом оператор (0.0.42) является наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ в пространстве $H_{q,\rho}$.

В заключительном четвёртом параграфе третьей главы приводятся некоторые обобщение результатов параграфа 3.2 для классов функций, определяемых модулями непрерывности первого порядка от граничных значений производных по аргументу $F_a^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$. Введём в рассмотрение следующий класс функций

$$W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu) =$$

$$=\left\{f(z)\in H_{q,a}^{(r)}:\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(F_a^{(r)};2t)_q\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt \leq \Phi_1(h)\right\},$$

где $h \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ $(\mu \geq 1)$ – произвольное фиксированное число, а $\Phi_1(x)$ – мажоранта, определённая ранее. Очевидно, что при $\mu = 1$ имеем $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;1) \equiv W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$.

Одним из основных результатов этого параграфа является

Теорема 3.4.2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$ и мажоранта $\Phi_1(h)$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{2\mu} \int\limits_0^1 (\sin nht)_* \left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2}\right] dt. \qquad (0.0.43)$$

Тогда при всех $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ $(\mu \geq 1)$ имеют место равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).$$

При этом: а) $L_{n+1}^* = span\{1, z, \cdots, z^n\}$ есть оптимальное подпространство для бернштейновского n-поперечника $b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right)$;

б) L_n^* является экстремальным подпространством для колмогоровского n-поперечника $d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right)$.

Доказывается, что условию (0.0.43) удовлетворяет, например, функция $\Phi_1^*(h) = h^\alpha$, где

$$\alpha \stackrel{def}{=} \alpha(\mu) = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int\limits_0^1 t \cos\frac{\pi t}{2\mu} \left[1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2}\right] dt, \quad 1 \leq \mu < \infty.$$

В частности, $\alpha(1) = (\pi/2) - 1$, $\lim\limits_{\mu\to\infty} \alpha(\mu) = 1$ и для всех $\mu \in [1, \infty)$ имеем $(\pi/2) - 1 \leq \alpha(\mu) \leq 1$.

Справедлива следующая

Теорема 3.4.3. *Если при заданном $\mu \geq 1$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ мажоранта $\Phi_1(h)$ удовлетворяет ограничению (0.0.43), то и при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right) = \mathscr{E}_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}; \mathscr{P}_n\right)_{H_{q,\rho}} :=$$

$$:= \sup\left\{\left\|f - \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{H_{q,\rho}} : \ f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)\right\} = \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).$$

Здесь $\delta_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $d^n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$; линейный полиномиальный оператор $\widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f)$ определяется равенством

$$\widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f;z) \overset{def}{=} c_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1+\left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,n}\left(1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k z^k, \quad (0.0.44)$$

где

$$\gamma_{k,n} \overset{def}{=} n\mu \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt \cos(\mu nt)dt.$$

При этом: а) линейный полиномиальный оператор (0.0.44) является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$;

б) $L_*^n = \{f \in H_{q,\rho} : f^{(k)}(0) = 0,\ k = 0,1,\ldots,n-1\}$ является экстремальным подпространством коразмерности n для гельфандовского n-поперечника $d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu); H_{q,\rho}\right)$;

в) Подпространство $L_n^* = span\{1,\ldots,z^{n-1}\}$ является экстремальным для линейного n-поперечника $\lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu); H_{q,\rho}\right)$.

Результат, полученный в теореме 3.4.3, обеспечивает возможность вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на классах функций $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$, а именно имеет место следующая

Теорема 3.4.4. *Для любых $n,r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$ $(\mu \ge 1)$ и $1 \le q \le \infty$ справедливы равенства*

$$\Im_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\right) =$$

$$= \sup\left\{\ |c_n(f)| :\ f \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\ \right\} = \frac{\pi}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).$$

ГЛАВА I

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

Одной из наиболее развивающихся областей современной математики является теория приближения функций, фундамент которой был заложен в классических работах П.Л.Чебышёва [145] о наилучшем равномерном приближении функций алгебраическими полиномами и К.Вейерштрасса [48], доказавшего классические теоремы о приближении функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами. Дальнейшее развитие теории приближения функций в начале прошлого века в значительной мере определили работы А.Лебега [83], Ш.Ж.Валле-Пуссена [45], Д.Джексона [53], С.Н.Бернштейна [21, 22], А.Н.Колмогорова [75, 76], А.Хаара [143], Н.И.Ахиезера и М.Г.Крейна [7], А.Зигмунда [65], Ж.Фавара [137]. Начиная с середины прошлого века, благодаря работам С.М.Никольского [96–100], А.Ф.Тимана [129], С.Б.Стечкина [110–114], В.К.Дзядыка [58, 59], П.Л.Ульянова [135, 136], Н.П.Корнейчука [77–79,81], В.М.Тихомирова [130–133] и многих других, были установлены разнообразные связи между структурными и конструктивными свойствами функций.

Сама теория приближения в своём развитии прошла три этапа: от наилучшего приближения индивидуальных функций на первом этапе до наилучшего приближения классов функций конкретными подпространствами на втором этапе и выбора наилучших приближающихся подпространств на третьем этапе. Этот третий этап связан с именем А.Н.Колмогорова [75], который ввёл в теорию приближений понятие поперечника множества, связанного с выбором оптимального подпространства, реализующего поперечник по Колмогорову.

Следует отметить, что задачи аппроксимационного содержания, задаваемые на классах функций, во многих случаях являются задачами на экстремум: требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший (в некотором смысле оптимальный) метод приближения.

В решении указанных экстремальных задач к настоящему времени имеются значительные успехи; особенно в теории приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 в ряде важных случаев получены окончательные результаты, то есть решение доведено до точных констант. В этой связи достаточно упомянуть работы Н.И.Черных [146–148], Л.В.Тайкова [123–126], А.А.Лигуна [84–87], В.А.Юдина [172, 173], А.Г.Бабенко [9, 12, 13], А.Г.Бабенко, Н.И.Черных, В.Т.Шевалдина [11], В.И.Иванова [69, 70], В.И.Иванова и О.И.Смирнова [68], Н.Айнуллоева [2, 3, 5], Х.Юссефа [174], В.В.Шалаева [169], С.Б.Вакарчука [28, 29, 32, 34, 35], С.Б.Вакарчука и А.Н.Щитова [33], М.Г.Есмаганбетова [62], С.Н.Васильева [46, 47], М.Ш.Шабозова [157–159], М.Ш.Шабозова и С.Б.Вакарчука [164], М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука, В.И.Забутной [167] и многих других. Таким образом, из приведённого списка работ следует, что наиболее существенные результаты окончательного характера получены на классах периодических функций. Это связано с тем, что классы периодических функций обладают определённой симметрией экстремальных свойств, в то время как на экстремальные свойства функций, заданных на конечном отрезке, как следует из результатов С.М.Никольского [96–100], А.Ф.Тимана [129], В.К.Дзядыка [58,59], С.А.Теляковского [127,128], существенно сказывается возмущающее действие концов промежутка.

Поэтому, рассматривая экстремальные задачи на конкретных классах функций, в этой главе ограничиваемся периодическим случаем, продолжая исследование вышецитированных работ в этом направлении. При этом основное внимание уделяется методам решения экстремальных задач наилучшего приближения классов функций в $L_2[0, 2\pi]$, базирующихся на дифференциально-разностных свойствах функций, то есть классов функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков производной функции.

§1.1. Обозначения и определения. Основные факты

1.1.1. Наилучшее полиномиальное приближение в L_2

В этом параграфе приводим известные факты, обозначения и определения, нужные нам в дальнейшем.

Всюду далее приняты следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных чисел вещественной оси, $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$; $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу вещественных 2π-периодических функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\| \overset{def}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Символом $\mathcal{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка, не превосходящего $n-1$:

$$\mathcal{T}_{2n-1} = \left\{T_{n-1}(x) :\ T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right\}.$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big), \tag{1.1.1}$$

величина её наилучшего полиномиального приближения элементами подпространства $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := E_{n-1}\left(f, \mathcal{T}_{2n-1}\right)_{L_2} = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| :\ T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \tag{1.1.2}$$

где

$$S_{n-1}(x, f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big)$$

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f; $\rho_k^2(f) := a_k^2(f)+b_k^2(f)$; $a_k(f)$ и $b_k(f)$ – косинус и синус коэффициенты Фурье функции f порядка k; $k \in \mathbb{N}$.

Через $L_p := L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$ обозначим пространство измеримых 2π-периодических функций f суммируемой в p-й степени, норма в котором определяется равенством

$$\|f\|_p \overset{def}{=} \|f\|_{L_p} := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Под $L_p^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+;\ L_p^{(0)} \equiv L_p,\ 1 \leq p \leq \infty)$ понимаем множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}(x)$ принадлежат пространству L_p, а через $W_p^{(r)} := W^{(r)}L_p[0, 2\pi]$ обозначим множество функций $f \in L_p$, удовлетворяющих условию $\|f^{(r)}\| \leq 1,\ 1 \leq p \leq \infty$.

1.1.2. Описание модулей непрерывности высших порядков

Символом $\Delta_h^m(f)$ обозначим норму разности m-го порядка функции $f \in L_2$ с шагом h

$$\Delta_h^m(f) := \|\Delta_h^m f(\cdot)\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+kh)\right|^2 dx\right\}^{1/2}$$

и равенством

$$\omega_m(f;t) \overset{def}{=} \sup\Big\{\Delta_h^m(f):\ |h| \leq t\Big\} \tag{1.1.3}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Для оценки наилучших приближений 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2, наряду с (1.1.3), часто используют следующую усреднённую характеристику гладкости

$$\Omega_m(f;t) = \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f\|_{L_2}^2 dh_1 \cdots dh_m\right\}^{1/2}, \tag{1.1.4}$$

где $t > 0$; $\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$; $\Delta^m_{\overline{h}} = \Delta^1_{h_1} \circ \Delta^1_{h_2} \circ \cdots \circ \Delta^1_{h_m}$.

Отметим, что при изучении задач аппроксимации в метрическом пространстве L_p $(0 < p < 1)$ усреднённая характеристика гладкости, подобная (1.1.4), ранее рассматривалась К.В.Руновским [105] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым, П.Освальдом [116]. Основные свойства характеристики гладкости (1.1.4) в качестве обобщённого модуля непрерывности m-го порядка изучены в работе М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [167].

В дальнейшем каждый из введённых модулей гладкости m-го порядка (1.1.3) и (1.1.4) будем более подробно характеризовать при изложении наших результатов исследования.

1.1.3. Неравенства Джексона – Стечкина

Под неравенствами Джексона – Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается через некоторую характеристику гладкости самой функции или некоторой её производной (см., например, [10–13, 15, 20, 26–30, 32–36, 38, 41, 46, 47, 62, 68, 77–81, 84–87, 113, 121–126, 146–148, 158–164]). В монографии В.И.Иванова и О.И.Смирнова [68], в частности, отмечается, что „Интерес к точным константам, который сложился вокруг неравенств Джексона – Стечкина, возможно, не был бы столь оправданным, если бы каждый новый случай не требовал привлечения новых идей и методов, которые затем оказывались полезными и при решении других экстремальных задач".

Приводим краткий исторический обзор неравенства Джексона – Стечкина, где получены точные константы.

В 1911 г. Д.Джексон [53, с.297] доказал, что если $f \in C$, $C \overset{def}{=} C(0, 2\pi]$, то

$$E_{n-1}(f)_C := \inf\Big\{\|f(x) - T_{n-1}(x)\|_C : \ T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} \leq$$

$$\leq \chi\, \omega_m \Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_C, \quad (m, n \in \mathbb{N}), \tag{1.1.5}$$

и если $f \in C^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ C^{(0)} = C)$, то

$$E_{n-1}(f)_C \le \frac{\chi_r}{n^r}\,\omega_m\left(f^{(r)},\,\frac{\pi}{n}\right)_C, \quad (m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+), \tag{1.1.6}$$

где константы χ и χ_r не зависят ни от f, ни от n. Собственно говоря, Джексон получил указанные неравенства при $m = 1$.

В метрике $L_p(0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$ аналоги неравенства (1.1.5) и (1.1.6) в 1937 г. при $m = 1$ получил Е.С.Кваде [73]. В дальнейшем в пространстве $L_p(0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$ С.Б.Стечкин [110] получил неравенство (1.1.6) при $m \ge 2$, а при $m = 2$ этот результат ранее был опубликован Н.И.Ахиезером [8, с.217]. Первые точные неравенства Джексона были получены Н.П.Корнейчуком [77, 79] для пространства $C(0, 2\pi]$ ещё в 1962 г., а для пространства $L_2(0, 2\pi]$ Н.И.Черных [146, 147] в 1967 г. В 1979 г. Н.И.Черных получил минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве $L_2(0, 2\pi]$ выходит на свой глобальный минимум. Нахождение таких аргументов, называемых оптимальными аргументами или точками Черных, становится важной экстремальной задачей. Этой задаче посвящены работы [10, 70, 172].

После результатов Н.П.Корнейчука и Н.И.Черных появился интерес к получению точных неравенств Джексона – Стечкина и в других банаховых пространствах. В 1992 г. Н.И.Черных доказал точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L_p(-\pi,\,\pi]$, $1 \le p < 2$. При $p > 2$ эта задача пока остаётся нерешённой.

Позднее этой тематикой в теории приближения занимались В.В.Арестов и В.Ю.Попов [6], А.Г.Бабенко [9–13], В.И.Бердышев [20], В.В.Жук [63, 64], В.И.Иванов [68–70], А.А.Лигун [84–87], В.Ю.Попов [103], Л.В.Тайков [121–126], В.А.Юдин [172, 173], С.Б.Вакарчук [26–30, 32–36, 38, 41], В.В.Шалаев [169], М.Ш.Шабозов [158, 159, 164] и многие другие математики.

Пусть X есть пространство C или L_p $(1 \le p < \infty)$, а $X^{(r)}$ есть $C^{(r)}$ или

$L_p^{(r)}$ $(C^{(0)} \equiv C,\ L_p^{(0)} \equiv L_p)$. Задача состоит в том, чтобы в неравенстве

$$E_{n-1}(f)_X =$$
$$= \inf\Big\{\|f(x) - T_{n-1}(x)\|_X :\ T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} \le \frac{\chi_r}{n^r}\,\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_X \qquad (1.1.7)$$

указать наименьшую из возможных констант χ_r.

Неравенства (1.1.5) – (1.1.7), а также аналогичные им соотношения в других функциональных пространствах известны в теории приближения как неравенства Джексона – Стечкина (см., например, [10, 70, 172] и приведённую там литературу). Они дают оценку скорости сходимости к нулю наилучшего приближения тригонометрическими полиномами в зависимости от дифференциально-разностных свойств приближаемой функции. Ясно, что наилучшая константа, вообще говоря, зависит как от пространства X, так и от параметров m, n, r и γ. Поэтому её обозначают через $\chi_{m,n,r}(X)$ и задача сводится к отысканию постоянной

$$\chi_{n,r}(X; U_m; \gamma) = \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_X}{U_m(f^{(r)}, \gamma/n)_X} :\ f \in X^{(r)}, f^{(r)} \ne const\right\}, \qquad (1.1.8)$$

$$(r \in \mathbb{Z}_+,\ m, n \in \mathbb{N},\ \gamma \in \mathbb{R}_+),$$

где X есть C или L_p $(1 \le p < \infty)$, U_m – некоторая характеристика гладкости функции $f \in X^{(r)}$, например ω_m или Ω_m.

В случае приближения функции $f \in X^{(r)}$ с помощью линейных операторов A, отображающих $X^{(r)}$ в подпространство $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка $n-1$, имеет место аналогичная задача. Особый интерес представляет здесь вычисление точной константы, соответствующей наилучшему для $X^{(r)}$ линейному методу, и мы приходим к задаче отыскания величины

$$\chi'_{n,r}(X; U_m; \gamma) =$$
$$= \inf\left\{\sup\left\{\frac{n^r\,\|Af - f\|}{U_m(f^{(r)}, \gamma/n)_X} : f \in X^{(r)}, f^{(r)} \ne const\right\} :\ A : X^{(r)} \to \mathcal{T}_{2n-1}\right\}. \qquad (1.1.9)$$

Так как для любого линейного оператора $A: X^{(r)} \to \mathcal{T}_{2n-1}$ и любой $f \in X^{(r)}$ выполняется соотношение

$$\|Af - f\|_X \geq E_{n-1}(f)_X,$$

то всегда $\chi'_{m,n,r}(X) \geq \chi_{m,n,r}(X)$. Наибольший интерес представляет выяснение случаев совпадения этих констант, а также построение наилучших линейных методов, которые реализуют это совпадение. Положим

$$\chi_r(X; U_m; \gamma) = \sup \{\chi_{n,r}(X; U_m; \gamma) : \ n \in \mathbb{N}\},$$

$$\chi'_r(X; U_m; \gamma) = \sup \left\{\chi'_{n,r}(X; U_m; \gamma) : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Н.П.Корнейчук [77] доказал, что $1 - \dfrac{1}{2n} \leq \chi_{n,o}(C, \omega; \pi) \leq 1$ и, следовательно, $\chi_o(C, \omega; \pi) = \sup \{ \chi_{n,o}(C, \omega; \pi) : n \in \mathbb{N} \} = 1$. В дальнейшем, обобщая этот результат, Н.П.Корнейчук [79] показал, что для $\gamma = \pi/k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ имеет место неравенство

$$\frac{k+1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \leq \chi_{n,o}\left(C, \omega; \frac{\pi}{k}\right) \leq \frac{k+1}{2}.$$

Также отметим, что, как показал С.Б.Стечкин [114], в пространстве L_p $(1 \leq p < \infty)$ имеет место неравенство

$$1 \leq \chi'_n(L_p; \omega, \pi) \leq \frac{3}{2}.$$

Н.И.Черных [147] получил соотношение

$$\chi_{n,o}(L_2, \omega; \pi) = \chi'_{n,o}(L_2; \omega, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а в работе В.В.Жука [63] установлено, что

$$\chi_{n,1}(C, \omega) = \chi'_{n,1}(C, \omega) = \chi_{n,1}(L, \omega) = \chi'_{n,1}(L, \omega) = \frac{\pi}{4}.$$

А.А.Лигун [84], используя аппарат функций Стеклова, доказал справедливость следующих равенств:

$$\chi_{n,2\nu-1}(C, \omega) = \chi'_{n,2\nu-1}(C, \omega) = \chi_{n,2\nu-1}(L, \omega) = \chi'_{n,2\nu-1}(L, \omega) = \frac{\mathcal{K}_{2\nu-1}}{2},$$

где

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}, \quad \Big(\mathcal{K}_0 = 1,\ \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2},\ \mathcal{K}_2 = \frac{\pi^2}{8},\ \mathcal{K}_3 = \frac{\pi^3}{24}, \ldots\Big)$$

– константы Фавара-Ахиезера-Крейна.

Отметим, что в работах [64] и [85] найдены конкретные линейные операторы $A_{n,r} : X^{(2\nu-1)} \to \mathcal{T}_{2n-1}$, реализующие в соотношении (1.1.8) и (1.1.9) указанные константы. В 1985 г. А.А.Лигун [86] доказал, что если $p = 1, \infty$; $r = 1, 3, 5, \ldots$ и $\mathfrak{N}$ – произвольное подпространство из L_p, то при всех $\delta \geq \pi\, a_{r+1}(p)$, где $a_r(p) = \Big(\mathcal{K}_r^{-1} E_{n-1}(W_p^{(r)}, \mathfrak{N})_p\Big)^{1/r}$ выполняется неравенство

$$\frac{\mathcal{K}_r}{2} a_r^r(p) \leq \chi_{n,r}(L_p, \omega; \delta) \leq \frac{\mathcal{K}_r}{2} a_{r+1}^r(p).$$

Здесь, как обычно,

$$E_{n-1}(W_p^{(r)}, \mathfrak{N})_p = \sup\Big\{E_{n-1}(f, \mathfrak{N})_p : \ f \in W_p^{(r)}\Big\}.$$

В докладе на международной конференции по теории приближения функций в 1983 г. (г. Киев) Н.И.Черных сообщил, что

$$\chi_{n,o}(L_p; \omega; 2\pi) = 2^{(1-p)/p}, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Л.В.Тайков [123] нашёл, в частности, асимптотическое поведение $\chi_{n,o}(L_2; \omega; \tau)$ при $\tau \to 0$, получив оценки

$$\left(\frac{1}{2(1-\cos\tau)}\right)^{1/2} \leq \chi_{n,r}(L_2; \omega; \tau) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{1/2}, \ n \in \mathbb{N};\ r \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.1.10)$$

для $0 < \tau \leq \pi$. Левую оценку в (1.1.10) реализует функция $f_0(x) = \cos nx$.

В заметке [9] А.Г.Бабенко с помощью соображений, подобных тем, которые применял Н.И.Черных [146], вычислена константа $\chi_{n,o}(L_2; \omega; \tau)$ при любых τ, а именно доказано, что для $\tau = \pi/\nu$, где $\nu \geq 1 + 3n/2$, $\nu \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\chi_{n,o}(L_2; \omega; \tau) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(\tau/2) - 1/2}{\tau \sin(\tau/2)}\right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

С.Б.Вакарчук [35] распространил результат Л.В.Тайкова [123] для модулей непрерывности m-го порядка, доказав при $\tau \to 0$ неравенства

$$\left(\frac{1}{2(1-\cos\tau)}\right)^{m/2} \leq \chi_{n,r}(L_2;\omega_m;\tau) \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{m/2}, \ (m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+).$$

Что же касается вопроса о получении точных констант в неравенстве Джексона для характеристик гладкости $U_m = \Omega_m$, то здесь недавно С.Б.Вакарчуком [34] получен следующий результат:

$$\chi_{n,r}(L_2;\,\Omega_m,\,\tau) = \left\{2\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)\right\}^{-m/2}, \ 0<\tau\leq\pi/2.$$

1.1.4. Определения и обозначения n-поперечников. Классы функций

В этом пункте излагаем необходимые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть X – произвольное банахово пространство, $\mathfrak{M}\subset X$ – некоторый класс функций и пусть $L_n\subset X$ – некоторое подпространство заданной размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M},L_n)_X = \sup\Big\{E(f;L_n)_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\inf\Big\{\|f-g\|_X:\ g\in L_n\Big\}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} \tag{1.1.11}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством L_n заданной размерности n. Величина (1.1.11) характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства L_n в метрике пространства X.

Если обозначить через $\mathcal{L}(X,L_n)$ – множество всех непрерывных операторов $A:X\to L_n$, действующих из X в произвольно заданное подпространство $L_n\subset X$ размерности n, то возникает следующая задача: найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M},L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \in \mathcal{L}(X, L_n)\Big\} \tag{1.1.12}$$

и указать оператор $A_* \subset \mathcal{L}(X, L_n)$, реализующий точную нижнюю грань в равенстве (1.1.12):

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\Big\|f - A_*f\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Задачу (1.1.12) можно рассматривать в более узком смысле: нижнюю грань искать не по всему множеству $\mathcal{L}(X, L_n)$ непрерывных операторов $A\colon X \to L_n$, а только по некоторому классу таких операторов, которые определяются тем или иным способом задания. В частности, можно выделить в $\mathcal{L}(X, L_n)$ класс линейных непрерывных операторов $A\colon X \to L_n$ и рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}(X, L_n)\Big\}. \tag{1.1.13}$$

Если существует оператор $A^* : X \to L_n$, для которого достигается внешняя нижняя грань в (1.1.13), то такой оператор определяет наилучший линейный метод приближения в задаче (1.1.13), то есть

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\Big\|f - A^*f\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Если же в $\mathcal{L}(X, L_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^\perp(X, L_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство L_n, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in L_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n^\perp(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^\perp(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}^\perp(X, L_n)\Big\}. \tag{1.1.14}$$

С величинами (1.1.11) – (1.1.14) связана задача отыскания значения n-поперечников для различных классов функций $\mathfrak{M}$.

Напомним определения n-поперечников, значения которых для конкретных классов $\mathfrak{M}$ вычислим в этой главе.

n-поперечником в смысле А.Н.Колмогорова [131] класса функций $\mathfrak{M}$ в пространстве X называют величину

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, L_n)_X: \ L_n \subset X\Big\}, \tag{1.1.15}$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам заданной размерности n из пространства X.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X$, то величину

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X: \ L_n \subset X\Big\} \tag{1.1.16}$$

называют *линейным n-поперечником* класса $\mathfrak{M}$ в пространстве X.

Аналогичным образом, взяв за основу величину (1.1.14), вводят в рассмотрение *проекционный n-поперечник*

$$\pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X: \ L_n \subset X\Big\}. \tag{1.1.17}$$

Существует ещё две величины, известные в теории приближений под названиями „*n-поперечник по Гельфанду*“ и „*n-поперечник по Бернштейну*“.

Пусть S – единичный шар в пространстве X, то есть

$$S = \{x \in X, \ \|x\|_X \le 1\}.$$

Величину

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\inf\Big\{\mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S: \ \varepsilon > 0\Big\}: \ L^n \subset X\Big\}, \tag{1.1.18}$$

где внешний инфимум берётся по всем подпространствам L^n коразмерности n, называют *n-поперечником по Гельфанду*, а величину

$$b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}: \ \varepsilon > 0\Big\}: \ L_{n+1} \subset X\Big\} \tag{1.1.19}$$

называют *n-поперечником по Бернштейну.*

Очевидно, что между величинами (1.1.15) – (1.1.19) выполняются соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{matrix} \leq \lambda_n(\mathfrak{M}, X) \leq \pi_n(\mathfrak{M}, X). \tag{1.1.20}$$

Если X – гильбертово пространство, то между вышеперечисленными n-поперечниками выполняются неравенства [104, 132]:

$$b_n(\mathfrak{M}; X) \leq d^n(\mathfrak{M}; X) \leq d_n(\mathfrak{M}; X) = \lambda_n(\mathfrak{M}; X) = \pi_n(\mathfrak{M}; X). \tag{1.1.21}$$

Первое неравенство $b_n(\mathfrak{M}; X) \leq d^n(\mathfrak{M}; X)$ в (1.1.21) можно найти в монографии A.Pinkus [104, c.19], а все остальные в монографии В.М.Тихомирова [132, с.239].

Задача о вычислении точных значений различных поперечников является экстремальной задачей вариационного содержания, и её решение требует знания глубоких фактов теории оптимизации, топологии и функционального анализа. Общая постановка задачи о поперечниках множеств была сформулирована А.Н.Колмогоровым [75] в 1936 г. Используя специфику гильбертова пространства, А.Н.Колмогоров получил первый точный результат:

$$d_{2n-1}\Big(W^{(r)}L_2,\, L_2\Big) = d_{2n}\Big(W^{(r)}L_2,\, L_2\Big) = E_n\Big(W^{(r)}L_2\Big)_{L_2} = \frac{1}{n^r}.$$

Затем, в 1954 г., С.Б.Стечкин [111] в метрике пространства C указал порядковые оценки ряда классов непрерывных и дифференцируемых функций.

Однако точный результат для классов дифференцируемых функций в метрике C был получен лишь в 1960 г. В.М.Тихомировым [131], которому принадлежат фундаментальные результаты в разработке методов решения экстремальных задач, в частности в задаче отыскании значений поперечников. Им же был разработан эффективный метод получения оценок снизу поперечников в произвольном банаховом пространстве X, базирующемся на следующем фундаментальном факте, известном как теорема о поперечнике шара [132]:

если S_{n+1} – единичный шар в пространстве $M_{n+1} \subset X$ размерности $n+1$, то $d_n(S_{n+1}, X) = 1$, откуда сразу следует, что если множество $\mathfrak{M} \subset X$ содержит шар RS_{n+1} радиуса R, то $d_n(\mathfrak{M}\, X) \geq R$.

Введём теперь единое обозначение классов функций, которые естественным образом следуют из наших результатов в последующих параграфах этой главы.

Пусть $\Phi(u)$ – произвольная непрерывная возрастающая при $u \geq 0$ функция такая, что $\lim\limits_{u\to 0} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$. Следуя пункту 1.1.3, введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_{p,h}^{(r)}\Big(U_m;\, \varphi\Big) = \left\{ f \in L_2^{(r)} :\ \int\limits_0^h U_m^p(f^{(r)};\, t)_2\, \varphi(t)dt \leq 1 \right\}, \tag{1.1.22}$$

$$W_{p,h}^{(r)}\Big(U_m;\, \varphi,\, \Phi\Big) = \left\{ f \in L_2^{(r)} :\ \int\limits_0^h U_m^p(f^{(r)};\, t)_2\, \varphi(t)dt \leq \Phi^p(h) \right\}, \tag{1.1.23}$$

где U_m – некоторая характеристика гладкости функции $f \in L_2^{(r)}$, например вышеперечисленные модули гладкости порядка m, такие как ω_m или Ω_m, а $\varphi(t)$ – весовая функция на отрезке $[0, h]$, т.е. неотрицательная, суммируемая, не эквивалентная нулевой функции на $[0, h]$. Для введённых классов функций в последующих параграфах вычислим точные значения n-поперечников.

§1.2. Об одном общем неравенстве между наилучшими приближениями и усреднённым с положительным весом модулем непрерывности m-го порядка в L_2

При решении экстремальных задач теории приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2, связанных с нахождением точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)_2 \le \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)}, t/n), \quad t > 0,$$

рассматривались различные экстремальные характеристики, приводящие к уточнению оценок сверху постоянных χ (см.,например, [9–13, 29, 34–36, 38, 41, 68–70, 84–87, 121–126, 146–148, 158, 160, 162, 169, 172–174]). Для компактного изложения полученных ранее результатов, следуя работам [35, 160, 162], введём обозначение:

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) = \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.2.1}$$

где $m, n, r \in \mathbb{N},\ p \in (0, \infty),\ \varphi(t) \ge 0$ – весовая функция на $[0, h]$, причём в (1.2.1) условно полагаем $0/0 \overset{def}{=} 0$.

Величины вида (1.2.1) в разное время изучали:

1. Н.И.Черных [146]: а) $\chi_{1,n,r,2}(\varphi, \pi/n)$, где $\varphi(t) = \sin nt$;

б) $\chi_{m,n,0,2}(\varphi, 2\pi/n)$, где $\varphi(t) = \sin(nt/2) + (\sin nt)/2$;

2. Л.В.Тайков [123]: $\chi_{1,n,r,2}(\varphi, h)$, где $\varphi(t) \equiv 1;\ 0 < t \le h,\ 0 < h \le \pi/(2n)$;

3. Л.В.Тайков [125]: $\chi_{1,n,r,1}(\varphi, \pi/n)$, где $\varphi(t) \equiv 1$;

4. Л.В.Тайков [126]: $\chi_{m,n,r,2}(\varphi, h)$, где $\varphi(t) \equiv 1;\ 0 < t \le h,\ 0 < h \le \pi/n$;

5. А.А.Лигун [85]: $\chi_{m,n,r,2}(\varphi, h)$, где $\varphi(t) \ge 0;\ 0 < t \le h,\ 0 < h \le \pi/n$;

6. Н.Айнуллоев [2]: $\chi_{m,n,r,2}(\varphi, h)$, где $\varphi(t) = \sin^\gamma \beta t,\ 0 \le t \le h$; $0 \le \gamma \le 2r - 1,\ r \in \mathbb{N},\ \beta > 0,\ 0 < \beta h \le \pi$;

7. В.В.Шалаев [169]: $\chi_{m,n,r,2/m}(\varphi, \pi/n)$, где $\varphi(t) = \sin nt$; при $m = 1$ следует результат Н.И.Черных [146];

8. Х.Юссеф [174]: $\chi_{1,n,r,2}(\varphi, h)$, где $\varphi(t) = \sin(\pi t/h)$, $0 < t \le h,\ 0 < h \le \dfrac{\pi}{n}$;

9. С.Б.Вакарчук [35]: $\chi_{m,n,r,2/m}(\varphi, h)$, где $\varphi(t) \equiv 1$, $0 \le t \le h, 0 < h \le \dfrac{\pi}{2n}$;

10. М.Ш.Шабозов [158]: $\chi_{m,n,r,p}(\varphi, h)$, где $\varphi(t) \equiv 1, m, n, r \in \mathbb{N}, 1/r < p \le 2$, $0 < t \le h,\ 0 < h \le \pi/n$.

Рассматривались также другие экстремальные характеристики, в определённом смысле аналогичные (1.2.1) (см.,например, [33, 47, 62, 109]). Целью нашей работы является обобщение на более общий случай неравенства А.А.Лигуна [85] при $0 < p \le 2$, из которого при соответствующем выборе весовой функции $\varphi(t)$ вытекают почти все цитированные выше результаты. Имеет место следующая общая

Теорема 1.2.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N},\ 0 < p \le 2,\ 0 < h \le \pi/n,\ \varphi(t)$ *– весовая функция на* $[0, h]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{A_{n,p}^{r,m}(\varphi; h)\right\}^{-1} \le \chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) \le \left\{\inf_{n\le k<\infty} A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h)\right\}^{-1}, \qquad (1.2.2)$$

где

$$A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h) = 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}, \quad k \ge n,\ k \in \mathbb{N}. \qquad (1.2.3)$$

Доказательство. Воспользуемся следующим упрощённым вариантом неравенства Минковского, приведённым в монографии A.Pinkus [104; с.109]:

$$\left(\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\widetilde{f}_k(t)|^2\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h |\widetilde{f}_k(t)|^p dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}, \ 0 < p \le 2. \qquad (1.2.4)$$

В неравенстве (1.2.4), полагая $\widetilde{f}_k := f_k\varphi^{1/p}$, получаем

$$\left(\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2\right)^{p/2} \varphi(t)dt\right)^{1/p} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h |f_k(t)|^p\, \varphi(t)dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}. \qquad (1.2.5)$$

Поскольку для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ имеет место соотношение

$$\omega_m^2(f^{(r)}; t) = 2^m \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2 \left(1-\cos ku\right)^m : \ |u| \le t\right\} \ge$$

$$\ge 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2 \left(1-\cos kt\right)^m, \tag{1.2.6}$$

то, возведя обе части неравенства (1.2.6) в степень $p/2$, умножая их на функцию φ, интегрируя по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=h$ и применяя соотношение (1.2.5), с учётом формулы (1.1.2) имеем

$$\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{\int\limits_0^h \left[2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2 \Big(1-\cos kt\Big)^m\right]^{p/2} \varphi(t)dt\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^h \left(2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2 \left(1-\cos kt\right)^m [\varphi(t)]^{2/p}\right)^{p/2} dt\right\}^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{2^m \sum_{k=n}^{\infty} \left(k^{rp}\rho_k^p \int\limits_0^h \left(1-\cos kt\right)^{mp/2} \varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left[2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h \left(1-\cos kt\right)^{mp/2} \varphi(t)dt\right)^{1/p}\right]^2\right\}^{1/2} \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left\{A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h)\right\}^2\right)^{1/2} \ge \inf_{n\le k<\infty} A_{k,p}^{r,m}(\varphi; h) E_{n-1}(f)_2, \tag{1.2.7}$$

откуда и следует оценка сверху в неравенстве (1.2.2). Оценку снизу, справедливую при всех $0 < h \le \pi/n$, получаем для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ из следующей цепочки равенств:

$$E_{n-1}(\cos n\cdot)_2 = 1 = \frac{2^{m/2}\left(n^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{A_{n,p}^{r,m}(\varphi;h)} =$$

$$= \frac{\left(\int\limits_0^h \left(\sup\limits_{|u|\le t} 2^m n^{2r}(1-\cos nu)^m\right)^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{A_{n,p}^{r,m}(\varphi;h)} =$$

$$= \frac{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p\left((\cos n\cdot)^{(r)},t\right)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{A_{n,p}^{r,m}(\varphi;h)},$$

а потому имеем

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;h) \ge \frac{E_{n-1}(\cos n\cdot)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p\left((\cos n\cdot)^{(r)},t\right)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \omega_m^p\left((\cos n\cdot)^{(r)},t\right)\varphi(t)dt\right)^{-1/p} = \left\{A_{n,p}^{r,m}(\varphi;h)\right\}^{-1}. \qquad (1.2.8)$$

Требуемое соотношение (1.2.2) теперь следует из сопоставления неравенств (1.2.7) и (1.2.8), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Положим $h = a/n$ и $\varphi(t) = q(nt)$. Тогда

$$A_{k,p}^{r,m}(\varphi;h) = A_{k,p}^{r,m}\left(q(n\cdot);\,\frac{a}{n}\right) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^{a/n}(1-\cos kt)^{mp/2}\,q(nt)dt\right)^{1/p} =$$

$$= 2^{m/2}n^{r-1/p}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{rp}\int\limits_0^a\left(1-\cos\frac{k}{n}t\right)^{mp/2}q(t)dt\right)^{1/p}.$$

Откуда сразу следует, что

$$\inf_{n\le k<\infty} A_{k,p}^{r,m}(\varphi;h) = \inf_{n\le k<\infty} A_{k,p}^{r,m}\left(q(n\cdot);\ \frac{a}{n}\right) =$$

$$= 2^{m/2} n^{r-1/p}\cdot \inf_{x\ge 1}\left(x^{rp}\int\limits_0^a (1-\cos xt)^{mp/2}\, q(t)dt\right)^{1/p}. \qquad (1.2.9)$$

В связи с неравенством (1.2.9) для формулировки последующих результатов параллельно с характеристикой (1.2.1) вводим следующую экстремальную характеристику:

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(q;a) = \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^{r-1/p} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \omega_m^p(f^{(r)}, t/n)\, q(t)dt\right)^{1/p}},$$

более тонко учитывающую структурные свойства функции $f\in L_2^{(r)}$.

Используя рассуждение работы А.А.Лигуна [85] и теорему 1.2.1, сформулируем следующее утверждение.

Следствие 1.2.1. *Пусть* $m,n,r\in\mathbb{N}, 0<p\le 2$ *и* $q(t)$ *– весовая функция на* $0<t<a\le\pi$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\Big\{\Phi_{m,r,p}(a,q;1)\Big\}^{-1/p} \le \widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(q;a) \le \Big\{\inf_{x\ge 1}\ \Phi_{m,r,p}(a,q;x)\Big\}^{-1/p},$$

где

$$\Phi_{m,r,p}(a,q;x) = x^{rp}\int\limits_0^a (1-\cos xt)^{mp/2}\, q(t)dt.$$

При этом, если функция $q(t)$ $(0\le t\le a)$ *такова, что*

$$\inf\Big\{\Phi_{m,r,p}(a,q;x) : x\ge 1\Big\} = \Phi_{m,r,p}(a,q;1),$$

то справедливо равенство

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,p}(q;a) = \Big\{\Phi_{m,r,p}(a,q;1)\Big\}^{-1/p}.$$

В частности, если $q(t)=t^{rp-1}q_1(t),\ 0\le t\le a,\ rp>1$ *и функция* $q_1(t)$ *не возрастает на* $(0,a)$, *то*

$$\inf\Big\{\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t);x) :\ x\ge 1\Big\} = \Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t);1). \qquad (1.2.10)$$

Доказательство. Для доказательства равенства (1.2.10) необходимо отметить, что если

$$q_1(t)=\Big\{q(t),\ 0\le t\le a;\ q(a),\ a\ge t\Big\},$$

то при всех $x\ge 1$ имеем:

$$\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t);x)=\int\limits_0^a(1-\cos xt)^{mp/2}\,(xt)^{rp-1}q_1(t)d(xt)=$$

$$=\int\limits_0^{ax}(1-\cos t)^{mp/2}\,t^{rp-1}q_1(t/x)dt\ge\int\limits_0^{ax}(1-\cos t)^{mp/2}\,t^{rp-1}q_1(t)dt\ge$$

$$\ge\int\limits_0^{a}(1-\cos t)^{mp/2}\,t^{rp-1}q_1(t)dt=\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t);1).$$

Следствие 1.2.1 доказано.

При вычислении точных значений n-поперечников классов функций, непосредственно вытекающих из (1.2.1), и в связи с точностью неравенства (1.2.2) возникает необходимость установления равенства

$$\inf_{n\le k<\infty}\mathcal{A}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi)=\mathcal{A}^{r,m}_{n,h,p}(\varphi)\tag{1.2.11}$$

для любой положительной суммируемой функции φ на промежутке $[0,h]$ при тех же ограничениях на указанных параметрах. В общем случае проверка условия (1.2.11) не всегда удаётся. Для некоторых конкретных весовых функций выполнение условия (1.2.11) доказано в работе [162]. Очевидно, что равенство (1.2.11) зависит от структурных и дифференциальных свойств весовой функции $\varphi\in[0,h]$. Возникает естественный вопрос: какими структурными и дифференциальными свойствами должна обладать функция φ, чтобы выполнялось соотношение (1.2.11)? Ответ на поставленный вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема 1.2.2. *Пусть весовая функция* $\varphi(t)$, *заданная на отрезке* $[0,h]$, *является непрерывной и дифференцируемой. Если при некоторых*

$0 < p \le 2$, $r \in \mathbb{N}$ *и любых* $t \in [0, h]$ *выполнено дифференциальное неравенство*

$$(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0, \tag{1.2.12}$$

то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < h \le \pi/n$ *справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;\, h) = 2^{-m} n^{-r} \left(\int\limits_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t)dt \right)^{-1/p}. \tag{1.2.13}$$

Существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, $f_0^{(r)} \ne const$, *реализующая верхнюю грань в (1.2.1), равная правой части (1.2.13).*

Доказательство. В самом деле, из предпоследней цепочки неравенства (1.2.7) получаем

$$\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)\, \varphi(t)dt \right)^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{ 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left(k^{rp} \int\limits_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t)dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}. \tag{1.2.14}$$

Докажем, что при сделанных предположениях относительно указанных параметров функция

$$y(x) = x^{rp} \int\limits_0^h (1 - \cos xt)^{mp/2} \varphi(t)dt \tag{1.2.15}$$

в области $Q = \Big\{ x : \ x \ge n,\ n \in \mathbb{N} \Big\}$ является монотонно возрастающей и

$$\min \Big\{ y(x) : \ x \in Q \Big\} = y(n) := n^{rp} \int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} \varphi(t)dt. \tag{1.2.16}$$

В самом деле, дифференцируя (1.2.15) и применяя элементарное тождество

$$\frac{d}{dx}(1 - \cos xt)^{mp/2} = \frac{t}{x} \cdot \frac{d}{dt}(1 - \cos xt)^{mp/2},$$

будем иметь

$$y'(x)=rpx^{rp-1}\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp/2}\varphi(t)dt+x^{rp}\int\limits_0^h\frac{d}{dx}(1-\cos xt)^{mp/2}\varphi(t)dt=$$

$$=rpx^{rp-1}\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp/2}\varphi(t)dt+x^{rp-1}\int\limits_0^h\frac{d}{dt}(1-\cos xt)^{mp/2}t\varphi(t)dt. \tag{1.2.17}$$

Выполнив интегрирование по частям в последнем интеграле равенства (1.2.17), с учётом неравенства (1.2.12), окончательно получаем

$$y'(x)=x^{rp-1}\Bigg\{(1-\cos hx)^{mp/2}h\varphi(h)+$$

$$+\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp/2}\Big[(rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\Big]dt\Bigg\}\geq 0, \tag{1.2.18}$$

откуда сразу следует соотношение (1.2.16).

Учитывая равенство (1.2.16), продолжим неравенство (1.2.14) :

$$\cdots\geq 2^{m/2}n^r\left(\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right\}^{1/2}=$$

$$=2^mn^rE_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \tag{1.2.19}$$

Из неравенств (1.2.14) и (1.2.19) следует, что

$$\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\leq 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{1.2.20}$$

Так как последнее неравенство имеет место для любого $f\in L_2^{(r)}$, то мы имеем оценку сверху для величины (1.2.13) :

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;\,h)\leq 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{1.2.21}$$

Оценку снизу величины (1.2.13), справедливую при всех $0 < h \le \pi/n$, получаем для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega_m(f_0^{(r)}; t) = 2^m n^r \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m, \quad 0 < nt \le \pi.$$

Имеем

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;\, h) \ge \frac{E_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f_0^{(r)}; t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= 2^{-m} n^{-r} \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{1.2.22}$$

Требуемое равенство (1.2.13) получаем из сопоставления неравенств (1.2.21) и (1.2.22), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2.

Из доказанной теоремы 1.2.2, в частности, вытекает

Следствие 1.2.2. *Пусть* $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 \le \beta \le \pi$, $0 \le t \le h$, $0 < h \le \pi/n$, $0 \le \gamma \le rp-1$, $r \in \mathbb{N}$. *Тогда при всех* $m, n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\chi_{m,n,r,p}\left(\sin^\gamma(\beta t/h)\,; h\right) =$$

$$= 2^{-m} n^{-r} \left\{\int\limits_0^h (\sin(nt/2))^{mp} \sin^\gamma(\beta t/h)\, dt\right\}^{-1/p}. \tag{1.2.23}$$

В частности, при $\beta = \pi$, $h = \pi/n$ *из (1.2.23) получаем*

$$\chi_{m,n,r,p}(\sin^\gamma nt; \pi/n) = 2^{-(m+\gamma/p)} B^{-1/p}\left(\frac{mp+\gamma+1}{2}, \frac{\gamma+1}{2}\right) n^{-r+1/p},$$

где $B(a,b)$ *– бета-функция Эйлера.*

Доказательство. Для справедливости равенства (1.2.23) достаточно доказать, что при выполнении условий следствия 1.2.2, для $\varphi(t) = \sin^\gamma\dfrac{\beta t}{h}$ неравенство (1.2.12) выполняется. Имеем

$$(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) = (rp-1)\sin^\gamma\frac{\beta t}{h} - t\left(\sin^\gamma\frac{\beta t}{h}\right)' =$$

$$= (rp-1)\sin^\gamma\frac{\beta t}{h} - \frac{\beta t}{h}\cdot\gamma\sin^{\gamma-1}\frac{\beta t}{h}\cos\frac{\beta t}{h} =$$

$$= \sin^{\gamma}\frac{\beta t}{h}\left[(rp-1)-\gamma\cdot\frac{\beta t}{h}\operatorname{ctg}\frac{\beta t}{h}\right] \geq$$

$$\geq \sin^{\gamma}\frac{\beta t}{h}\cdot\min\left\{\left[(rp-1)-\gamma\cdot\frac{\beta t}{h}\operatorname{ctg}\frac{\beta t}{h}\right]:\ t\in[0,h]\right\} =$$

$$= [(rp-1)-\gamma]\sin^{\gamma}\frac{\beta t}{h} \geq 0,$$

поскольку

$$\min\left\{\left[(rp-1)-\gamma\cdot\frac{\beta t}{h}\operatorname{ctg}\frac{\beta t}{h}\right]:\ t\in[0,h]\right\} = (rp-1)-\gamma \geq 0$$

и для $0<\beta\leq\pi,\ 0\leq t\leq h,\ 0<\gamma\leq rp-1$ функция $\sin^{\gamma}\dfrac{\beta t}{h}\geq 0.$

Этим следствие 1.2.2 доказано.

Отметим некоторые важные частные случаи равенства (1.2.23).

a) при $p=2,\ m=1,\ \gamma=1,\ \beta=\pi,\ h=\pi/n,\ m\in\mathbb{N}$ получаем результат Н.И.Черных [146]

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\neq const}} n^{-1/2}\,E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2(f,t)\sin ntdt\right)^{-1/2} = \frac{1}{2};$$

b) при $m,n,r\in\mathbb{N},\ p=2,\ \gamma=0,\ 0<h\leq\pi/n$ получаем результат Л.В.Тайкова [126]

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} 2^m n^r E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^{h}\omega_m^2(f^{(r)},t)dt\right)^{-1/2} = \left(\int\limits_0^{h}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{2m}dt\right)^{-1/2};$$

c) при $p=2/m,\ m\in\mathbb{N},\ \gamma=1,\ \beta=\pi,\ h=\pi/n$ получаем результат В.В.Шалаева [169]

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} 2^m n^{r-m/2}E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)\sin ntdt\right)^{-m/2} = 1;$$

d) при $p=2,\ m,n,r\in\mathbb{N},\ \gamma=1,\ \beta=\pi,\ h=\pi/n$ получаем результат С.Н.Васильева [47]

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} 2^m n^{r-1/2}E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^2(f^{(r)},t)\sin ntdt\right)^{-1/2} = \left\{(m+1)/2\right\}^{1/2};$$

e) при $p=2/m,\ m,n,r\in\mathbb{N},\ \gamma=0,\ \beta=\pi,\ 0<h\le\pi/2n$ получаем результат С.Б.Вакарчука [35]

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} 2^m n^r E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\right)^{-m/2}=\Big\{2n/(nh-\sin nh)\Big\}^{m/2};$$

f) при $1/r<p\le 2,\ m,n,r\in\mathbb{N},\ \gamma=0,\ \beta=\pi,\ 0<h\le\pi/n$ получаем результат М.Ш.Шабозова [158]

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} 2^m n^r E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^h \omega_m^{p}(f^{(r)},t)dt\right)^{-1/p}=\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}.$$

Поскольку для функции $f\in L_2^{(r)}$ её последовательные производные $f^{(s)}$ $(s=0,1,\ldots,r-1)$ также принадлежат пространству L_2, то представляет интерес изучить поведение величины наилучших приближений $E_{n-1}(f^{(s)})$ $(s=0,1,\ldots,r-1)$ на указанном классе $L_2^{(r)}$. Эта задача сформулирована и решена в [41] для модулей непрерывности специального вида, которые были введены в работе [1]. Здесь приводим решение этой задачи, когда структурные характеристики функции $f\in L_2^{(r)}$ характеризуются усреднёнными с весом $\varphi(t)$ значениями модулей непрерывности $\omega_m(f^{(r)},t)_2$. Из результата теоремы 1.2.2 в качестве следствия можно получить следующее более общее утверждение.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$, $0<h\le\pi/n$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $s=0,1,\ldots,r$; $\varphi(t)$ *– весовая функция на отрезке* $[0,h]$, *удовлетворяющая условию*

$$(sp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\ge 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.2.24)$$

Доказательство. Равенство (1.2.24) доказывается гораздо проще. В самом деле, так как

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\sup_{g\in L_2^{(s)}}\frac{2^m n^s E_{n-1}(g)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(g^{(s)};t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}},$$

то согласно теореме 1.2.2 имеем

$$\sup_{g\in L_2^{(s)}}\frac{2^m n^s E_{n-1}(g)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(g^{(s)};t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.3.

Из теоремы 1.2.3 в качестве следствий получаем следующие

Следствие 1.2.3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $s=0,1,\ldots,r$; $\varphi(t)\equiv 1$, $0<t\le h$, $0<h\le\pi/n$. *Тогда*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\,dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}. \tag{1.2.25}$$

Отметим, что равенство (1.2.25) при $s=r$ ранее получено в работе [158].

Следствие 1.2.4. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $p=2/m$, $s=0,1,\ldots,r$; $\varphi(t)=1$, $0<t\le h$, $0<h\le\pi/n$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2} n^{s-m/2} E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)_2\,dt\right)^{m/2}}=\frac{1}{\left(nh-\sin nh\right)^{m/2}}. \tag{1.2.26}$$

Равенство (1.2.26) при $s=r$ и $m=1$ было доказано Л.В.Тайковым [123], а при $s=r$ и любых $m\in\mathbb{N}$ доказано С.Б.Вакарчуком [35].

Следствие 1.2.5. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $p=2/m$, $s=0,1,\ldots,r$; $\varphi(t)=t$, $0<h\le\pi/n$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{h^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h t\,\omega_m^{2/m}(f^{(r)};t)_2\,dt\right)^{m/2}}=\left\{1-\frac{2\sin nh}{nh}+\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}.$$

Следствие 1.2.6. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$, $\varphi(t)=\sin^\gamma(\beta t/h)$, $\gamma\ge 0$, $0<\beta\le\pi$, $0<t\le h$, $0<h\le\pi/n$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^m n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}. \qquad (1.2.27)$$

Отметим, что равенство (1.2.27) при $s=r$, $0<\gamma\le rp-1$, $r\in\mathbb{N}$, $0<\beta\le\pi$, $0<h\le\pi/n$ недавно было доказано в работе М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [162]. В свою очередь, из (1.2.27) при $s=r$, $p=2$, $0<\gamma\le 2r-1$, $\beta=\pi/2$, $h=\pi/n$ получаем следующий результат Н.Айнуллоева [3]:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\sqrt{\pi}\,2^m n^{r-1/2}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^2(f^{(r)};t)_2\sin^\gamma\frac{nt}{2}dt\right)^{1/2}}=\left\{\frac{\Gamma\left(m+1+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m+\gamma+1}{2}\right)}\right\}^{1/2},$$

где $\Gamma(u)$ – гамма-функция Эйлера.

§1.3. Точные значения поперечников некоторых классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности $\omega_m(f,\,t)$ в L_2

В этом параграфе вычислим точные значения вышеперечисленных n-поперечников конкретных классов функций. При определении классов функций структурные свойства функций $f\in L_2^{(r)}$ охарактеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности r-й производной $f^{(r)}$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усредненной величины $\omega_m(f^{(r)};\,t)_2$. С этой целью, полагая в (1.1.22) и (1.1.23) $U_m=\omega_m,\ \varphi(t)=\sin^\gamma\dfrac{\beta}{h}t$ при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $0\le\gamma\le rp-1$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$, $0<\beta\le\pi$ и $0<h\le\pi/n$, определим следующие классы функций

$$W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\right):=W\Big(\omega_m;\,r,\,p,\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\Big)=$$

$$=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)};\,t)_2\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\le 1\right\},\tag{1.3.1}$$

$$W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right):=W\Big(\omega_m;\,r,\,p,\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\Big)=$$

$$=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)};\,t)_2\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\le\Phi^p(h)\right\}.\tag{1.3.2}$$

При выполнении некоторых ограничений относительно мажоранты $\Phi(u)$ вычислим точные значения n-поперечников классов $W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\dfrac{\beta}{h}t\right)$ и $W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\dfrac{\beta}{h}t,\,\Phi\right)$ в пространстве L_2. С этой целью введём обозначение

$$\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^m\overset{def}{=}\left\{\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m,\ \text{если}\ \ nt\le\pi;\quad 1,\ \text{если}\ \ nt>\pi\right\}.$$

Теорема 1.3.1. *При любых* $m,n,r\in\mathbb{N}$, $0\le\gamma\le rp-1$, $0<\beta\le\pi$ *и* $0<h\le\pi/n$ *справедливы равенства*

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t\right);L_2\right)=\delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t\right);L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t\right)\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}, \qquad (1.3.3)$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников: бернштейновский* $b_k(\cdot)$, *колмогоровский* $d_k(\cdot)$, *линейный* $\lambda_k(\cdot)$, *гельфандовский* $d^k(\cdot)$, *проекционный* $\pi_k(\cdot)$.

Доказательство. Из неравенства (1.2.19) для произвольной суммируемой весовой функции $\varphi(t)\ge0$, удовлетворяющей неравенству (1.2.12), вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f)\le2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p},$$

и в силу следствия 1.2.2 для $\varphi(t)=\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t$ запишем

$$E_{n-1}(f)\le$$

$$\le2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)};t)\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}tdt\right)^{1/p}, \qquad (1.3.4)$$

откуда, с учётом определения класса (1.3.1), получаем оценку сверху проекционного n-поперечника

$$\pi_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t\right),\,L_2\right)\le\sup\left\{E_{n-1}(f):\ f\in W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t\right)\right\}\le$$

$$\le2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}. \qquad (1.3.5)$$

С целью получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника класса (1.3.1) вводим в рассмотрение $(2n+1)$-мерную сферу тригонометрических полиномов

$$\sigma_{2n+1}=\left\{T_n(x):\ \|T_n\|=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}\right\}$$

и докажем, что $\sigma_{2n+1}\subset W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\dfrac{\beta}{h}t\right)$.

В работе [126] доказано, что для произвольного полинома $T_n(x)\in\mathcal{T}_{2n-1}$ при $0<t\le\pi/n$ имеет место неравенство

$$\omega_m(T_n^{(r)},t)\le 2^m n^r\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^m\|T_n\|. \tag{1.3.6}$$

Неравенство (1.3.6) возведём в степень p $(0<p\le 2)$, умножим на $\sin^\gamma\dfrac{\beta}{h}t$ и проинтегрируем в пределах $0\le t\le h$ $(0<h\le\pi/n)$, затем, заменив норму полинома по формуле радиуса сферы $T_n\in\sigma_{2n+1}$, получим

$$\int\limits_0^h\omega_m^p(T_n^{(r)};t)\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\le 2^m n^r\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\,\|T_n\|^p=$$

$$=\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1}=1,$$

откуда следует включение $\sigma_{2n+1}\subset W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\dfrac{\beta}{h}t\right)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника, имеем оценку снизу

$$b_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\right),\,L_2\right)\ge b_{2n-1}(\sigma_{2n+1},L_2)=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}. \tag{1.3.7}$$

Сопоставляя неравенства (1.3.5) и (1.3.7), с учётом соотношения (1.1.21), получим утверждение теоремы 1.3.1.

Из доказанной теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 справедливы равенства*

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma} nt\right);L_2\right)=\delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma} nt\right);L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma} nt\right)\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-(m+\gamma/p)}n^{-r+1/p}\left\{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{mp+\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+1\right)}\right\}^{-1/p}, \qquad (1.3.8)$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k-поперечников.

Доказательство. Полагая в равенстве (1.3.3) $\beta=\pi,\ h=\pi/n$ и вычисляя полученный интеграл, имеем

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma} nt\right);L_2\right)=\delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma} nt\right);L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma} nt\right)\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma} nt dt\right)^{-1/p}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(2^{\gamma}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\gamma}\left(\cos\frac{nt}{2}\right)^{\gamma}dt\right)^{-1/p}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\frac{2^{\gamma+1}}{n}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp+\gamma}(\cos t)^{\gamma}\,dt\right)^{-1/p}=$$

$$=2^{-(m+\gamma/p)}n^{-r+1/p}\left\{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{mp+\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+1\right)}\right\}^{-1/p}.$$

При соответствующих значениях параметров p и γ частные результаты, перечисленные в работах [35, 158, 169], вытекают из (1.3.8).

В 1910 году А.Лебегом [83] было введено понятие модуля непрерывности ω для функций $f \in C$, $C \overset{def}{=} C[0, 2\pi]$. Там же для указанной характеристики были получены оценки коэффициентов Фурье. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций в разное время рассматривались А.В.Ефимовым [61], А.Ф.Тиманом [129], Н.П.Корнейчуком [78], В.И.Бердышевым [20], С.Милорадовичем [92, 93], С.А.Теляковским [127, 128], А.И.Степанцом [108], С.Б.Вакарчуком [29, 30, 34, 35, 38, 41], М.Ш.Шабозовым [158–164] и многими другими математиками.

Задача подобного рода для класса функций $W^{(r)}_{p,h}\left(\omega_m; \sin^\gamma \dfrac{\beta}{h}t\right)$ представляет определённый интерес. Например, доказанная теорема 1.3.1 обеспечивает возможность вычисления указанных верхних граней на рассматриваемом классе функций. Условимся, всюду в дальнейшем, если $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций, заданных и определённых на отрезке $[0, 2\pi]$, то положим

$$\Im_n(\mathfrak{N}) = \sup\Big\{\,|a_n(f)| : \ f \in \mathfrak{N}\Big\} = \sup\Big\{\,|b_n(f)| : \ f \in \mathfrak{N}\Big\},$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ суть косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.1 справедливы равенства*

$$\Im_n\left(W^{(r)}_{p,h}\left(\omega_m; \sin^\gamma \frac{\beta}{h}t\right)\right) = 2^{-m} n^{-r} \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt\right)^{-1/p}.$$

Доказательство. В самом деле, в силу ортогональности частичной суммы $S_{n-1}(f; x)$ и функции $\cos nx$, коэффициент Фурье $a_n(f)$ запишем в виде

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} [f(x) - S_{n-1}(f; x)]\cos nx dx. \qquad (1.3.9)$$

Применяя к интегралу в правой части (1.3.9) неравенство Гёльдера, с учётом (1.1.2) и определения класса $W^{(r)}_{p,h}\left(\omega_m; \sin^\gamma \dfrac{\beta}{h}t\right)$, из (1.3.4) получим оценку сверху

$$\sup\left\{\,|a_n(f)|:\ f\in W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\right)\right\}\le$$

$$\le\sup\left\{E_{n-1}(f):\ f\in W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\right)\right\}=E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\right)\right)=$$

$$\le 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}. \qquad (1.3.10)$$

С целью получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_1(x)=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}\cos nx.$$

Легко заметить, что $f_1(x)\in W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\right)$, а потому

$$\sup\left\{\,|a_n(f)|:\ f\in W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\right)\right\}\ge|a_n(f_1)|=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p}. \qquad (1.3.11)$$

Сравнивая неравенства (1.3.10) и (1.3.11), получаем

$$\sup\left\{\,|a_n(f)|:\ f\in W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\right)\right\}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p},$$

что и завершает доказательство теоремы 1.3.2.

Теорема 1.3.3. *Если для любого заданного* $0<\mu\le1$ *и для всех* $\lambda>0$, $0<\beta,u\le\pi,\ 0\le\gamma\le rp-1,\ 0<p\le2$, *функция* $\Phi(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^p(\mu u)\int\limits_0^{\lambda\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta v}{\lambda\pi}dv\le\Phi^p(\lambda u)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta v}{\mu\pi}dv, \qquad (1.3.12)$$

то и с любым $m,n,r\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)=\delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right)\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\mu\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma}\frac{n\beta}{\mu\pi}tdt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right),$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* k*-поперечников* $b_k(\cdot),d_k(\cdot),d^k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ *и* $\pi_k(\cdot)$.

Доказательство. Оценку сверху для проекционного n-поперечника с учётом определения класса $W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right)$ и характеристики (1.2.1) получим из равенства (1.2.11) при $h=\mu\pi/n$ $(0<\mu\le 1)$:

$$\pi_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)\le\pi_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)\le$$

$$\le\sup\left\{E_{n-1}(f):f\in W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right\}\le$$

$$\le 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\mu\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma}\frac{n\beta}{\mu\pi}tdt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right).\qquad(1.3.13)$$

Следуя схеме доказательства теоремы 1.3.1, с целью получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника класса $W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right)$, введём в рассмотрение $(2n+1)$-мерную сферу полиномов

$$\sigma_{2n+1}=\left\{T_n(x):\|T_n\|=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\mu\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma}\frac{n\beta}{\mu\pi}tdt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right)\right\}$$

и докажем, что $\sigma_{2n+1}\subset W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^{\gamma}\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right)$.

Неравенство (1.3.6) возведём в степень p $(0<p\le 2)$, умножим на $\sin^{\gamma}(\beta t/\lambda u)$ и проинтегрируем по t в промежутке $[0,\lambda u]$, затем сделаем замену переменной $nt=v$ в правой части и заменим норму полинома по формуле радиуса сферы σ_{2n+1}. В итоге после всех этих операций получаем

$$\int\limits_0^{\lambda u}\omega_m^p(T_n^{(r)},t)\sin^\gamma\frac{\beta t}{\lambda u}dt\le\frac{\Phi^p\left(\frac{\mu\pi}{n}\right)\int\limits_0^{\lambda u}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta t}{\lambda u}dt}{\int\limits_0^{\mu\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{n\beta}{\mu\pi}tdt}=$$

$$=\frac{\Phi^p\left(\frac{\mu\pi}{n}\right)\int\limits_0^{\lambda nu}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta v}{\lambda nu}dv}{\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta v}{\mu\pi}dv}.$$

Введя обозначения $u=\pi/n$ и используя условие (1.3.12) теоремы, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^{\lambda u}\omega_m^p(T_n^{(r)},t)\sin^\gamma\frac{\beta t}{\lambda u}dt\le\frac{\Phi^p(\mu u)\int\limits_0^{\lambda\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta v}{\lambda\pi}dv}{\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta v}{\mu\pi}dv}\le\Phi^p(\lambda u),$$

откуда следует включение $\sigma_{2n+1}\subset W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right)$. Отсюда, в силу определения бернштейновского n-поперечника, имеем оценку снизу

$$b_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)\ge$$

$$\ge b_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)\ge b_{2n}(\sigma_{2n+1},L_2)=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\mu\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{n\beta}{\mu\pi}tdt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right).\qquad(1.3.14)$$

Сопоставляя неравенства (1.3.13) и (1.3.14), с учётом соотношения (1.1.21), получим утверждение теоремы 1.3.3.

Замечание. Сделав замену переменной $nt=u$, утверждение теоремы 1.3.3 запишем в виде

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)=\delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\left(\omega_m;\,\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t,\,\Phi\right),\,L_2\right)=$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}_{p,h}\left(\omega_m;\, \sin^\gamma \frac{\beta}{h}t,\, \Phi\right)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m} n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{\mu\pi}t dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right).$$

Условия теоремы 1.3.3 выглядят неестественными и труднопроверяемыми. Но это не так. Легко проверить, что условие (1.3.12) является необходимым и достаточным условием, для того чтобы совокупность функций

$$\left\{2^{-m} n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{\mu\pi}t dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right)\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\sin nx\\ \cos nx\end{matrix}\right\}$$

принадлежала классу $W^{(r)}_{p,h}\left(\omega_m;\, \sin^\gamma \frac{\beta}{h}t,\, \Phi\right)$.

Ради простоты, при $\gamma = 0$ выясним значения α, при которых функция $\Phi_*(u) = u^\alpha$ удовлетворяет этим условиям. С этой целью запишем неравенство (1.3.12) в эквивалентной форме

$$\frac{\int\limits_0^{\lambda\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp}dv}{\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}dv} \le \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha p}, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \mu \le 1. \tag{1.3.15}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3.4. *Для того чтобы неравенство (1.3.15) имело место с любыми заданными* $\lambda > 0$, $0 < \mu \le 1$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, *необходимо и достаточно, чтобы число* $\alpha = \alpha(\mu; m, p)$ *определялось по формуле*

$$\alpha = \alpha(\mu; m, p) = \mu\pi\left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}\left\{p\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}dv\right\}^{-1}. \tag{1.3.16}$$

Доказательство. Приравнивая производные по λ от левой и правой частей неравенства (1.3.15) при $\lambda = \mu$, получаем (1.3.16). Из равенства (1.3.16) при любых $0 < \mu \le 1$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$ определим границы значения числа α. Докажем неравенство (1.3.15) с ограничениями

$$\frac{1}{p} \le \alpha(\mu; m, p) \le \mu^{-mp}\left(m + \frac{1}{p}\right).$$

В самом деле, из равенства (1.3.16), оценивая $\alpha(\mu; m, p)$, получаем:

$$\frac{1}{p} \le \alpha(\mu; m, p) = \frac{\mu\pi\left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}}{p\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}dv} \le \frac{\pi}{2p\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{\pi}\mu v\right)^{mp}dv} = \mu^{-mp}\left(m + \frac{1}{p}\right).$$

Поскольку согласно этому неравенству $\alpha < \mu^{-mp}\left(m + \frac{1}{p}\right)$, $0 < \mu \le 1$, то для достаточно малых $\lambda > 0$ неравенство (1.3.15) выполняется.

Из определения $\alpha = \alpha(\mu; m, p)$ следует другая эквивалентная форма неравенства (1.3.15) :

$$\frac{(1/\pi)\int\limits_0^{\lambda\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp}dv}{\left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}} \le \frac{\mu}{\alpha p}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha p}. \tag{1.3.17}$$

Обе части неравенства (1.3.17) совпадают на концах интервала $\lambda \in (0, \mu)$ вместе со своими производными по λ. Если допустить знак равенства в (1.3.17) на данном интервале, то производные обеих частей неравенства (1.3.17)

$$\frac{\left(\sin\frac{\lambda\pi}{2}\right)_*^{mp}}{\left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}}, \qquad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha p-1}$$

будут совпадать на четырех различных точках отрезка $[0, \mu]$.

Таким образом, функция

$$r(\lambda) = \frac{\left(\sin\frac{\lambda\pi}{2}\right)_*}{\left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(\alpha p-1)/mp}$$

имеет четыре нуля на $[0,\mu]$. Это означает, что производная

$$r'(\lambda)=\frac{\dfrac{\pi}{2}\left(\cos\dfrac{\lambda\pi}{2}\right)_*}{\left(\sin\dfrac{\mu\pi}{2}\right)}-\frac{\alpha p-1}{\mu m p}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(\alpha p-1-mp)/mp}$$

имеет три различных нуля на интервале $(0,\mu)$, и мы пришли к противоречию. Этим неравенство (1.3.15) доказано для $\lambda\in(0,\mu]$.

Если предположить, что неравенство (1.3.15) не имеет места для $\lambda>\mu$, то обязательно найдётся $\lambda=\mu^*>\mu$, для которой в (1.3.15) будет реализовано равенство. Это следует из того, что левая часть в (1.3.15) является линейной функцией от λ при $\lambda>1$, а правая часть – возрастающая выпуклая вниз функция, поскольку по определению $\alpha p>1$. Таким образом, функция $r(\lambda)$ будет иметь четыре нуля на полуинтервале $[0,\mu^*)$, а её производная $r'(\lambda)$ - по крайне мере, три различных нуля при $0<\lambda<\mu^*$, и мы опять пришли к противоречию. Этим неравенство (1.3.15) доказано.

Следствие 1.3.2. *Для любых натуральных $m,n,r,\ 0<p\le 2$,*

$$\alpha=\alpha(1;m,p)=\frac{\sqrt{\pi}}{p}\,\Gamma\left(\frac{mp}{2}+1\right)\left\{\Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right)\right\}^{-1},$$

$\Gamma(b)$ – гамма-функция Эйлера, справедливы равенства

$$\delta_{2n}\Big(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\Phi_*)\,,\,L_2\Big)=\delta_{2n-1}\Big(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\Phi_*)\,,\,L_2\Big)=$$

$$=E_{n-1}\Big(W_{p,h}^{(r)}(\omega_m;\,\Phi_*)\Big)_{L_2}=2^{-m}(\alpha p)^{1/p}\,\pi^{\alpha-1/p}\,n^{-r-\alpha+1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k-поперечников $b_k(\cdot),d_k(\cdot),d^k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ и $\pi_k(\cdot)$.

Наряду с определением класса (1.3.2) при $\beta=nh$, $0<h\le 2\pi$ также вводим в рассмотрение класс функций $f\in L_2^{(r)}$, при $m,n,r\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$ и $0\le\gamma\le rp-1$ удовлетворяющих условию

$$\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)};\,t)\sin^\gamma ntdt\right)^{1/p}\le\Phi(h),$$

которое обозначим через $W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big)$. Положим

$$(nh-\pi)_+ = \Big\{\, 0,\ \text{если}\ nh \le \pi;\ nh-\pi,\ \text{если}\ nh > \pi \Big\}.$$

Теорема 1.3.5. *Пусть* $m,n,r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$ *и* $0 \le \gamma \le rp-1$. $\Phi \in C[0,2\pi]$ *и для некоторой* $h_* \in [0,\pi/n]$ *достигается нижняя грань*

$$\inf_{0\le h\le 2\pi} \frac{\Phi(h)}{\left(\int\limits_0^{\min(h,\pi/n)} \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma nt dt + \frac{(nh-\pi)_+}{n}\right)^{1/p}} = Q. \qquad (1.3.18)$$

Тогда справедливы равенства

$$\delta_{2n}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\right) = 2^{-m}n^{-r}Q,$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot), d_k(\cdot), d^k(\cdot), \lambda_k(\cdot), \pi_k(\cdot)$.

Доказательство. Из неравенства (1.3.4) для любого $h \in [0,\pi/n]$, как и при доказательстве теоремы 1.3.3, получаем

$$\pi_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\right) \le$$

$$\le 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma nt dt\right)^{-1/p} \Phi(h),$$

откуда сразу следует неравенство

$$\pi_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\right) \le 2^{-m}n^{-r}Q. \qquad (1.3.19)$$

С целью получения оценки снизу для бернштейновского n-поперечника положим

$$S_{2n+1} = \Big\{T_n(x):\ T_n \in \mathcal{T}_{2n-1},\ \|T_n\| = 2^{-m}n^{-r}Q\Big\}$$

и покажем, что $S_{2n+1} \subset W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big)$.

Для $h \in [0, 2\pi]$ из неравенства (1.3.6) сразу вытекает, что

$$\omega_m(T_n^{(r)}, h) \leq \begin{cases} 2^m n^r \left(\sin \dfrac{nh}{2}\right)^m \|T_n\|, & nh \leq \pi \\ 2^m n^r \|T_n\|, & nh > \pi. \end{cases} \tag{1.3.20}$$

Используя неравенство (1.3.20), имеем

$$\left(\int_0^h \omega_m^p(T_n^{(r)}; t)\,|\sin nt|^\gamma dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_0^{\pi/n} \omega_m^p(T_n^{(r)}; t)\, \sin^\gamma ntdt + \int_{\pi/n}^h \omega_m^p(T_n^{(r)}; t)|\,\sin nt|^\gamma dt\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq 2^m n^r \|T_n\| \left(\int_0^{\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma ntdt + \int_{\pi/n}^h |\sin nt|^\gamma dt\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma ntdt + \left(h - \frac{\pi}{n}\right)\right)^{1/p} Q \leq \Phi(h).$$

Последнее неравенство означает, что $S_{2n+1} \subset W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big)$ и

$$b_{2n-1}\left(W_{p,h}^{(r)}\Big(\omega_m;\, \sin^\gamma nt,\, \Phi\Big);\, L_2\right) \geq b_{2n-1}(S_{2n+1},\, L_2) = 2^{-m} n^{-r} Q. \tag{1.3.21}$$

Утверждение теоремы 1.3.5 следует из неравенств (1.3.19) и (1.3.21). Возникает естественный вопрос: при каких значениях α функция $\Phi(h) = h^\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3.5? Очевидно, что для этого достаточно, чтобы для всех $h \in [\pi/n, 2\pi]$ выполнялось неравенство

$$\frac{d}{dh}\left\{h^\alpha \left(\int_0^{\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma ntdt + \left(h - \frac{\pi}{n}\right)\right)^{-1/p}\right\} \geq 0. \tag{1.3.22}$$

Дифференцируя неравенство (1.3.22), имеем

$$\alpha p \left\{\int_0^{\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma ntdt + \left(h - \frac{\pi}{n}\right)\right\} - h \geq 0. \tag{1.3.23}$$

Неравенство (1.3.23) запишем в следующем виде

$$\alpha p\left\{\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma nt dt-\frac{\pi}{n}\right\}\geq h(1-\alpha p). \qquad (1.3.24)$$

Но так как

$$\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma nt dt-\frac{\pi}{n}\leq 0,$$

то необходимо, чтобы было $1-\alpha p\leq 0$, то есть $\alpha\geq 1/p$. Очевидно, что для всех $h\in[\pi/n,2\pi]$ имеем:

$$\max\Big\{h(1-\alpha p):\ h\in[\pi/n,2\pi]\Big\}=\frac{\pi}{n}(1-\alpha p).$$

Поэтому из (1.3.24) получим

$$\alpha\geq\frac{1}{p}\left\{\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma nt dt\right\}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{p}\left\{\frac{\pi}{2^\gamma}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{mp}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{mp+\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}\right\}, \qquad (1.3.25)$$

где $\Gamma(u)$ – гамма-функция Эйлера.

Таким образом, доказано, что для того чтобы для функции $\Phi(h)=h^\alpha$, $\alpha\geq 0$ при всех $h\in[\pi/n,2\pi]$ выполнялось условие (1.3.18), необходимо и достаточно, чтобы число α удовлетворяло неравенству (1.3.25), которое от n не зависит. В заключение отметим, что утверждение теоремы 1.3.5 в случае $\gamma=0$ ранее было доказано A.Pinkus [104].

§1.4. Дальнейшие результаты о значении n-поперечников

В данном параграфе рассматривается задача оптимизации неравенства Джексона – Стечкина с целью отыскания минимальной константы относительно всего множества приближающихся подпространств фиксированной размерности N. Отметим, что в случае первого модуля непрерывности в пространстве $C(0,2\pi]$ с равномерной нормой Н.П.Корнейчук [77] вычислил значение минимальной константы Джексона и показал, что задача о минимальной константе сводится к задаче вычисления n-поперечника по Колмогорову соответствующего класса функций. В случае пространства L^2 аналогичная задача рассмотрена Н.А.Барабошкиной [16], где найденные ею нижние оценки для минимальных констант Джексона совпадают с известными оценками сверху, установленными Н.И.Черных [146, 147], В.А.Юдиным [172] и С.Н.Васильевым [47].

Обозначим через $W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h}$, $m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0<p\leq 2, 0<h\leq\pi$ обозначим среднее в p-ой степени значение модуля непрерывности порядка m от функции $f^{(r)}$ с весом $\varphi(t)$:

$$W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h}=\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{-1/p}, \tag{1.4.1}$$

а через $L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$ – множество функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых выполняется условие $W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h}\leq 1$. Очевидно, что в силу свойства монотонности модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)};t)$ для произвольной суммируемой весовой функции $\varphi(t)\geq 0$ $(0<t\leq h)$ из (1.4.1) вытекает неравенство

$$C(m,r,p,h)\,\omega_m(f^{(r)};h)\leq W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h}\leq\omega_m(f^{(r)};h),$$

где $C(m,r,p,h)$ – положительная константа, которая зависит от значений указанных в скобке параметров. В этих обозначениях отыскание наименьшей константы в неравенстве Джексона – Стечкина равносильно задаче вычисления точной верхней грани

$$\mathbb{K}_{m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2, \Im_N\right) = \sup\left\{\frac{E(f,\Im_N)_2}{W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h}} :\ f\in L_2^{(r)}\right\}.$$

Здесь мы будем искать минимальную константу относительно всего множества приближающих подпространств $\Im_N \subset L_2$ фиксированной размерности N. Этим мы покажем, что полученный результат не может быть улучшен за счёт перехода к другим подпространствам той же размерности

$$\mathbb{K}_{N,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \inf\left\{\mathbb{K}_{m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2, \Im_N\right) :\ \Im_N\subset L_2\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sup\left\{\frac{E\left(f,\Im_N\right)_2}{W_m\left(f^{(r)};\varphi\right)_{p,h}} :\ f\in L_2^{(r)}\right\} :\ \Im_N\subset L_2\right\}.$$

Положим также

$$E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right)_2 = \sup\left\{\|f - S_{n-1}(f)\|_2 :\ f\in L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $h, p > 0,\ r\in\mathbb{Z}_+,\ m, n\in\mathbb{N}$. *Тогда имеют место равенства*

$$\mathbb{K}_{N,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = d_N\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi), L_2\right).$$

Доказательство. Следуя схеме рассуждений из монографии Н.П.Корнейчука [81, с.385], полагаем, что $f\in L_2^{(r)}$, $\varphi(t)\geq 0$ – суммируемая на $[0,\ h]$ функция, $W_m(f^{(r)},\varphi)_{p,h} = \alpha > 0$. Положив $f_1(x) = \alpha^{-1}f(x)$, получим $W_m(f_1^{(r)},\varphi)_{p,h} = 1$, то есть $f_1\in L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$. Учитывая положительную однородность функционалов $E(f,\Im_N)_2$ и $W_m(f^{(r)},\varphi)_{p,h}$, при любом $0<p\leq 2$ и фиксированном $h>0$ имеем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{E\left(f,\Im_N\right)_2}{W_m\left(f^{(r)};\varphi\right)_{p,h}} \leq \sup_{f\in L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)} E\left(f,\Im_N\right)_2. \tag{1.4.2}$$

Переходя в неравенстве (1.4.2) к нижним граням по всем подпространствам $\Im_N\subset L_2$ размерности N, получаем

$$\mathbb{K}_{N,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) \leq d_N\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi), L_2\right). \tag{1.4.3}$$

С другой стороны, для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$ в силу определения класса $L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$ справедливо неравенство

$$E\left(f,\Im_N\right)_2 \le \frac{E\left(f,\Im_N\right)_2}{W_m\left(f^{(r)};\varphi\right)_{p,h}}$$

и, так как это верно для каждого подпространства $\Im_N \subset L_2$, то

$$d_N\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi),L_2\right) \le \mathbb{K}_{N,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)},L_2\right). \tag{1.4.4}$$

Утверждение теоремы 1.4.1 вытекает из сопоставлений неравенств (1.4.3) и (1.4.4).

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.2.2. Тогда при всех* $m,n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < h \le \pi/n$ *справедливы равенства*

$$\mathbb{K}_{2n,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)},L_2\right) = \mathbb{K}_{2n-1,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)},L_2\right) = E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right)_2 =$$
$$= \delta_{2n}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi),L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi),L_2\right) =$$
$$= 2^{-m}n^{-r}\left\{\int_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* k*-поперечников* $b_k(\cdot), d^k(\cdot), d_k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ *и* $\pi_k(\cdot)$. *Все* k*-поперечники реализуются частичными суммами ряда Фурье* $S_{k-1}(f;t)$.

Доказательство. В самом деле, из (1.2.19) вытекает, что

$$E_{n-1}(f) \le 2^{-m}n^{-r}\frac{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\frac{\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)\,\varphi(t)dt}{\int_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p}\left(\frac{\int_0^h \varphi(t)dt}{\int_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}$$

верно при выполнении неравенства (1.2.12). Отсюда для проекционного поперечника класса $L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$ получаем оценку сверху

$$\pi_{2n}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi),L_2\right)\le\pi_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi),L_2\right)\le$$

$$\le E_{n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)\right)_2\le$$

$$\le 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.4.5)$$

С целью получения оценки снизу для бернштейновского n-поперечника класса $L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$ введём в рассмотрение шар

$$\mathbb{B}_{2n+1}=\left\{T_n\in\Im_{2n+1}:\ \|T_n\|\le\frac{2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\right\}$$

в $(2n+1)$-мерном подпространстве $\Im_{2n+1}$ тригонометрических полиномов и покажем, что $\mathbb{B}_{2n+1}\subset L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$. В работе [126] доказано, что для произвольного полинома $T_n\in\Im_{2n+1}$ при $0<h\le\pi/n$ имеет место неравенство

$$\omega_m\left(T_n^{(r)},t\right)\le 2^m n^r\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m\|T_n\|. \qquad (1.4.6)$$

Обе части неравенства (1.4.6) возведём в степень p $(0<p\le 2)$ и проинтегрируем полученное соотношение по t в пределах от 0 до h, откуда непосредственно получаем

$$\left(\frac{\int\limits_0^h \omega_m^p\left(T_n^{(r)};t\right)\,\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p} \le 2^m n^r \left(\frac{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right)^{1/p} \cdot \|T_n\| \le 1,$$

а потому $\mathbb{B}_{2n+1} \subset L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi)$. В силу определения бернштейновского n-поперечника имеем оценки снизу

$$b_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi),L_2\right) \ge b_{2n}\left(L_2^{(r)}(m,p,h;\varphi),L_2\right) \ge b_{2n}\left(\mathbb{B}_{2n+1},L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.4.7)$$

Сопоставляя неравенства (1.4.5) и (1.4.7), с учётом соотношения (1.1.21) завершаем доказательство теоремы 1.4.2. Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1.4.1. *Пусть* $\varphi_*(t) = \sin^\gamma((\beta t)/h);\ 0 \le \gamma \le rp-1$, $r \ge 1$, $0 < p \le 2$. *Тогда имеют место равенства*

$$\mathbb{K}_{2n,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)},L_2\right) = \mathbb{K}_{2n-1,m,p,h,\varphi}\left(L_2^{(r)},L_2\right) =$$

$$= \delta_{2n}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi_*),L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(L_2^{(r)}(p,h,m;\varphi_*),L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^\gamma\frac{\beta}{h}tdt\right)^{-1/p},$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* k*-поперечников.*

Отметим, что результат следствия 1.4.1 ранее был доказан в работе [62].

§1.5. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 и значение поперечников некоторых функциональных классов

В этом параграфе некоторые результаты, полученные в предыдующих параграфах, обобщаются на случай дробного производного по Вейлю. Следует отметить, что ряд экстремальных задач теории аппроксимации, связанный с понятием дробной производной в смысле Вейля в пространствах L_p, $1 \le p \le \infty$, ранее рассматривался в работе А.И.Козко [74] и для классов функций с усреднённым значением модуля непрерывности m-го порядка, принадлежащих пространству L_2, в работах М.Г.Есмаганбетова [62], М.Ш.Шабозова и С.Д.Темурбековой [165].

В последнее время часто используются различные модификации классического модуля непрерывности m-го ($m \in \mathbb{N}$) порядка (1.1.3). Результаты, полученные в данном параграфе, связаны с понятием модуля непрерывности дробного порядка. Это понятие было введено почти одновременно в 1977 году в работах P.L.Butzer, H.Dyckhoff, E.Goerlich, R.L.Stens [24] и R.Tabersky [119]. Следуя обозначениям [24, 119], определим разность дробного порядка β ($\beta \in \mathbb{R}_+$) функции $f(x)$ в точке x ($x \in \mathbb{R}$) с шагом h ($h \in \mathbb{R}$) равенством

$$\Delta_h^\beta f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \binom{\beta}{\nu} f(x + (\beta - \nu)h), \tag{1.5.1}$$

где

$$\binom{\beta}{\nu} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-\nu+1)}{\nu!} \quad \text{для } \nu > 1,$$

$$\binom{\beta}{\nu} = \beta \quad \text{для} \quad \nu = 1 \quad \text{и} \quad \binom{\beta}{\nu} = 1 \quad \text{для} \quad \nu = 0.$$

Приведём следующие свойства разности (1.5.1), доказанные в [24, 119, 134]:

1) $\|\Delta_h^\beta f(\cdot)\|_{L_p} \le C(\beta)\|f\|_{L_p}$, где $C(\beta)$ – константа, зависящая от $\beta > 0$,

$$\text{причём } C(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\binom{\beta}{k}\right| \le 2^{\{\beta\}}, \text{ где } \{\beta\} = \inf\{k : \ k \ge \beta\}, \ k \in \mathbb{N};$$

2) $\Delta_h^{\gamma}(\Delta_h^{\beta}f)=\Delta_h^{\gamma+\beta}f$; 3) $\|\Delta_h^{\gamma+\beta}f\|_{L_p}\le 2^{\{\beta\}}\|\Delta_h^{\gamma}f\|_{L_p}$; 4) $\lim\limits_{h\to 0+}\|\Delta_h^{\beta}f\|_{L_p}=0$.

Модуль непрерывности произвольного дробного порядка $\beta\in\mathbb{R}_+$ функции $f\in L_p$, $1\le p\le\infty$ определим равенством [24, 119, 134]

$$\omega_\beta(f;t)=\sup\Big\{\ \|\Delta_h^{\beta}f(\cdot)\|_p:\ |h|\le t\ \Big\}=$$

$$=\sup\left\{\ \left\|\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{\beta}{\nu}f(\cdot+(\beta-\nu)h)\right\|_p:\ |h|\le t\ \right\}. \tag{1.5.2}$$

Основные свойства модуля непрерывности (1.5.2) изучены в работах [24, 119, 134]. В частности, модуль непрерывности (1.5.2) функции $f\in L_p$, $1\le p\le\infty$ обладает следующими свойствами:

1) $\lim\limits_{t\to 0}\omega_\beta(f;t)=0$; 2) $\omega_\beta(f;t)\le 2^{\{\beta-\delta\}}\omega_\delta(f;t)$, $0<\delta\le\beta$;

3) $\omega_\beta(f+\varphi;t)\le\omega_\beta(f;t)+\omega_\beta(\varphi;t)$.

Ряд прямых и обратных теорем теории приближения функций $f\in L_p$, $1\le p\le\infty$, связанных с модулем непрерывности дробного порядка (1.5.2), установлен С.Тихоновым [134].

В этом параграфе приводим обобщение и развитие некоторых результатов работ [160, 165] на случай модуля непрерывности произвольного порядка $\beta>0$ для классов дифференцируемых в смысле Вейля функций в пространстве L_2. Найдены некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими многочленами и усреднёнными с весом модулями непрерывности произвольного дробного порядка, вычислены точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих пространству L_2.

Рассмотрим для функции $f\in L_2$ с рядом Фурье (1.1.1) производную порядка $\alpha\ge 0$ в смысле Вейля [49], определённую равенством

$$f^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{\alpha}\left\{a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}.$$

Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha\geq 0$, $L_2^{(0)}\equiv L_2$) обозначим множество функций f, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)}\in L_2$ ($f^{(0)}\equiv f$). Если $S_{n-1}(f^{(\alpha)};x)$ ($\alpha\geq 0$) – частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)}\in L_2$ тригонометрическими полиномами T_{n-1} степени не выше $n-1$ имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)})\equiv E\left(f^{(\alpha)};\Im_{2n-1}\right)=\inf\left\{\|f^{(\alpha)}-T_{n-1}\|:\ T_{n-1}\in\Im_{2n-1}\right\}=$$

$$=\|f^{(\alpha)}-S_{n-1}(f^{(\alpha)})\|=\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{2\alpha}\rho_k^2\right)^{1/2}, \tag{1.5.3}$$

где, по-прежнему, $\rho_k^2:=\rho_k^2(f)=a_k^2(f)+b_k^2(f)$, $k\geq n$. Следуя работам [160, 165], введём в рассмотрение следующую аппроксимационную характеристику

$$\chi_{\beta,\alpha,n,p}(\varphi;h)=\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.5.4}$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\beta>0$, $\alpha\geq 0$, $0<p\leq 2$, $\varphi(t)$ – весовая функция на отрезке $[0,h]$, причём в (1.5.4), ради удобства, условно полагаем $0/0\overset{def}{=}0$.

Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 1.5.1. *Пусть $\beta>0$, $\alpha\geq 0$, $0<p\leq 2$, $0<h\leq\pi/n$, $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(t)$ – неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке $[0,h]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда справедливо неравенство*

$$\left\{A_{n,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h)\right\}^{-1}\leq\chi_{\beta,\alpha,n,p}(\varphi;h)\leq\left\{\inf_{n\leq k<\infty}A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h)\right\}^{-1}, \tag{1.5.5}$$

где

$$A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h)=2^{\beta/2}\left(k^{\alpha p}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{\beta p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p},\quad k\geq n,\ k\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Непосредственным вычислением легко доказать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(\alpha)}$ имеет место соотношение

$$\omega_\beta^2(f^{(\alpha)};t) = 2^\beta \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2\,(1-\cos ku)^\beta:\ |u|\le t\right\} \ge$$

$$\ge 2^\beta \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2\,(1-\cos kt)^\beta. \tag{1.5.6}$$

Воспользуясь далее схемой рассуждения теоремы 1.2.1, из неравенства (1.2.5), учитывая (1.5.6), получаем

$$\left(\int_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{\int_0^h \left[2^\beta \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2\Big(1-\cos kt\Big)^\beta\right]^{p/2} \varphi(t)dt\right\}^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\, 2^{\beta/2}\left(k^{\alpha p}\int_0^h (1-\cos kt)^{\beta p/2}\,\varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\left\{A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h)\right\}^2\right)^{1/2} \ge E_{n-1}(f)\inf_{n\le k<\infty} A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h), \tag{1.5.7}$$

откуда и следует оценка сверху в неравенстве (1.5.5). Оценку снизу, справедливую при всех $0 < h \le \pi/n$, получаем для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(\alpha)}$, для которой $E_{n-1}(f_0) = 1$, $\omega_\beta(f_0^{(\alpha)};t) = 2^{\beta/2}(1-\cos nt)^{\beta/2}n^\alpha$, а потому, согласно определению величины (1.5.4), имеем

$$\chi_{\beta,\alpha,n,p}(\varphi;h) \ge \frac{E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \omega_\beta^p(f_0^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{2^{\beta/2}\left(n^{\alpha p}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{\beta p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{A_{n,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h)\right\}^{-1}. \qquad (1.5.8)$$

Требуемое двойное неравенство (1.5.5) вытекает из сопоставления оценки сверху (1.5.7) и снизу (1.5.8), чем и завершаем доказательство теоремы 1.5.1.

Возвращаясь снова к выражению $A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h)$, введённому в формулировке теоремы 1.5.1, выясним, какими дифференциальными свойствами должна обладать весовая функция φ, чтобы выполнялось равенство

$$\inf_{n\le k<\infty} A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h) = A_{n,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h). \qquad (1.5.9)$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1.5.2. *Пусть* $\beta>0$, $\alpha\ge 0$, $\varphi(t)\ge 0$ *– заданная на отрезке* $[0,h]$ *непрерывно дифференцируемая функция. Если при некоторых* $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<p\le 2$ *и любых* $t\in[0,h]$ *выполнено дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\ge 0, \qquad (1.5.10)$$

то при всех $n\in\mathbb{N}$ *и* $0<h<\pi/n$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^\beta n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.11)$$

Доказательство. Так как

$$A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi,h) = 2^{\beta/2}\left(k^{\alpha p}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{\beta p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p},$$

то достаточно доказать, что при сделанных предположениях относительно функции $\varphi(t)$ и указанных параметрах функция

$$\psi(y)=y^{\alpha p}\int\limits_{0}^{h}(1-\cos yt)^{\beta p/2}\varphi(t)dt \tag{1.5.12}$$

в области $Q_n=\{x:\ x\geq n\}$ является строго возрастающей, а потому

$$\min\{\psi(k):\ k\geq n\}=\psi(n)=n^{\alpha p}\int\limits_{0}^{h}(1-\cos nt)^{\beta p/2}\varphi(t)dt. \tag{1.5.13}$$

Поступая точно так же, как мы доказали неравенство (1.2.18), получаем

$$\psi'(y)=\alpha p y^{\alpha p-1}\int\limits_{0}^{h}(1-\cos yt)^{\beta p/2}\varphi(t)dt+y^{\alpha p-1}\int\limits_{0}^{h}\frac{d}{dt}(1-\cos yt)^{\beta p/2}t\varphi(t)dt=$$

$$=y^{\alpha p-1}\left\{(1-\cos yh)^{\beta p/2}h\varphi(h)+\int\limits_{0}^{h}(1-\cos yt)^{\beta p/2}\left[(\alpha p-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\right]dt\right\}\geq 0,$$

откуда и вытекают равенство (1.5.13) и (1.5.9).

Тем самым, из неравенства (1.5.7) с учётом выполнения неравенства (1.5.10) и равенства (1.5.13) получаем

$$\left(\int\limits_{0}^{h}\omega_{\beta}^{p}(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\geq$$

$$\geq 2^{\beta/2}n^{\alpha}\left(\int\limits_{0}^{h}(1-\cos nt)^{\beta p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}E_{n-1}(f)=$$

$$=2^{\beta}n^{\alpha}\left(\int\limits_{0}^{h}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{1/p}E_{n-1}(f). \tag{1.5.14}$$

Из (1.5.14) для произвольной $f\in L_2^{(\alpha)}$ вытекает неравенство

$$\frac{2^\beta n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \le \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.15)$$

Оценку снизу величины, стоящей в левой части (1.5.11), справедливую при всех $0 < h \le \pi/n$, получаем для функции $f_0(x) = \sin nx \in L_2^{(\alpha)}$, для которой

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega_\beta(f_0^{(\alpha)};t) = 2^\beta n^\alpha \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^\beta, \quad 0 < nt \le \pi. \qquad (1.5.16)$$

Учитывая равенства (1.5.16) и определение величины (1.5.4), имеем:

$$\sup_{f\in L_2^{(\alpha)}} \frac{2^\beta n^\alpha E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \ge \frac{2^\beta n^\alpha E_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f_0^{(\alpha)};t)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{2^\beta n^\alpha \cdot 1}{2^\beta n^\alpha\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.17)$$

Требуемое равенство (1.5.11) получаем из сопоставления неравенств (1.5.15) и (1.5.17), чем и завершаем доказательство теоремы 1.5.2.

Пусть $\varphi(t)$ – весовая функция на отрезке $[0,h]$. Через $W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le \pi$ обозначим среднее в p-ой степени значение модуля непрерывности порядка β от функции $f^{(\alpha)}$ с весом $\varphi(t)$:

$$W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p = \left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p}, \qquad (1.5.18)$$

а через $L_2^{(\alpha)}(\beta,p,h,\varphi)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(\alpha)}$, для которых $W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p \le 1$. Очевидно, что в силу свойства монотонности модуля непрерывности $\omega_\beta(f^{(\alpha)};t)$ для произвольной суммируемой весовой функции $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$ из (1.5.18) вытекает неравенство

$$W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p \leq \omega_\beta(f^{(\alpha)};h).$$

Полученное неравенство указывает на то, что в задачах теории аппроксимации функций $f \in L_2^{(\alpha)}$ усреднённое значение модуля непрерывности (1.5.18) предпочтительнее, чем функционал Джексона – Стечкина $\omega_\beta(f^{(\alpha)};h)$.

Пусть

$$\chi_{\beta,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \Im_N\right) = \sup\left\{\frac{E(f,\Im_N)}{\omega_\beta(f^{(\alpha)};h)} :\ f \in L_2^{(\alpha)}\right\}$$

– наименьшая константа в неравенстве Джексона – Стечкина с модулем непрерывности $\omega_\beta(f^{(\alpha)};h)$, а

$$\chi_{\beta,\alpha,p,h,\varphi}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \Im_N\right) = \sup\left\{\frac{E(f,\Im_N)}{W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p} :\ f \in L_2^{(\alpha)}\right\} \tag{1.5.19}$$

– наименьшая константа в неравенстве Джексона – Стечкина с усреднённым модулем непрерывности. Очевидно, что

$$\chi_{\beta,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \Im_N\right) = \inf_{\varphi} \chi_{\beta,\alpha,p,h,\varphi}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \Im_N\right).$$

Величина $\chi_{\beta,\alpha,p,h}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \Im_N\right)$ очень сложная, а величина (1.5.19) более простая и её удаётся вычислить для широкого класса функций φ, удовлетворяющих условию (1.5.10).

Следуя Н.П.Корнейчуку [81, с.385], для этого класса фунций φ приведём решение задачи о минимизации величины (1.5.19) по всем подпространствам размерности N, то есть вычислим значения инфимума величины (1.5.19) относительно всего множества приближающих подпространств $\Im_N \subset L_2$ размерности N:

$$\chi_{N,\beta,\alpha,p,h,\varphi}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2\right) = \inf\left\{\chi_{\beta,\alpha,p,h,\varphi}\left(L_2^{(\alpha)}, L_2, \Im_N\right) :\ \Im_N \subset L_2\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sup\left\{\frac{E(f,\Im_N)}{W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p} :\ f \in L_2^{(\alpha)}\right\} :\ \Im_N \subset L_2\right\}.$$

Положим также

$$E_{n-1}\left(L_2^{(\alpha)}(\beta,p,h,\varphi)\right)=\sup\left\{\|f-S_{n-1}(f)\|:\ f\in L_2^{(\alpha)}(\beta,p,h,\varphi)\right\}.$$

Теорема 1.5.3. *Пусть* $\alpha\geq 0$, $0<p\leq 2$, $\beta\in\mathbb{R}_+$, $N\in\mathbb{N}$, $0<h\leq\pi$. *Тогда имеет место равенство*

$$\chi_{N,\beta,\alpha,p,h,\varphi}\left(L_2^{(\alpha)};L_2\right)=d_N\left(L_2^{(\alpha)}(\beta,p,h,\varphi);L_2\right).$$

Доказательство теоремы 1.5.1 повторяет схему доказательства теоремы 1.4.1, а потому мы его опускаем.

Обозначим через $W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega$ – класс функций $f\in L_2^{(\alpha)}$ таких, что для $0\leq t\leq h$, $0<h\leq\pi/n$ выполняется условие

$$W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p=\left(\int\limits_0^h\omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\leq\omega(h),$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть неотрицательная неубывающая полуаддитивная на $[0,h]$ $(0\leq h\leq\pi)$ функция такая, что $\omega(0)=0$.

В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 1.5.4. *Пусть* $\alpha,\beta>0$, $0<h\leq\pi/n$ *и выполнено неравенство (1.5.10). Тогда справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega;L_2\right)=\delta_{2n}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega;L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega\right)=\frac{1}{2^\beta n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\left(\sin\dfrac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\omega(h),$$

где $\delta_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников Бернштейна* $b_k(\cdot)$, *Гельфанда* $d^k(\cdot)$, *Колмогорова* $d_k(\cdot)$, *линейного* $\lambda_k(\cdot)$, *проекционного* $\pi_k(\cdot)$. *Все* n*-поперечники реализуются частичными суммами Фурье* $S_{n-1}(f;t)$ *порядка* $n-1$ *ряда Фурье функции* $f\in L_2^{(\alpha)}$.

Доказательство. Для получения оценки сверху воспользуемся неравенством (1.5.15) и для произвольной $f \in L_2^{(\alpha)}$ запишем

$$E_{n-1}(f)_2 \le \frac{1}{2^\beta n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega$ для произвольной функции $f \in W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega$, приходим к неравенству

$$E_{n-1}(f)_2 \le \frac{W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p}{2^\beta n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt}\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{2^\beta n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\omega(h). \tag{1.5.20}$$

Переходя к верхним граням по всем функциям $f \in W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega$ в неравенстве (1.5.20), имеем

$$E_{n-1}(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega)_2 \le \frac{1}{2^\beta n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\omega(h),$$

откуда сразу получаем оценку сверху для проекционного n-поперечника

$$\pi_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^{\omega}_{\beta};L_2\right)\le \pi_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^{\omega}_{\beta};L_2\right)\le E_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^{\omega}_{\beta}\right)_2\le$$

$$\le 2^{-\beta}n^{-\alpha}\left\{\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}\omega(h). \qquad (1.5.21)$$

С целью получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника класса $W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^{\omega}_{\beta}$ введём в рассмотрение шар

$$\mathbb{S}_{2n+1}=\Bigg\{T_n\in\Im_{2n+1}:$$

$$\|T_n\|\le 2^{-\beta}n^{-\alpha}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\omega(h)\Bigg\}$$

в $(2n+1)$-мерном подпространстве $\Im_{2n+1}$ тригонометрических полиномов.

Покажем, что $\mathbb{S}_{2n+1}\in W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^{\omega}_{\beta}$. Воспользовавшись рассуждениями работы [126], легко доказать, что для любого полинома $T_n\in\mathbb{S}_{2n+1}\cap\Im_{2n+1}$ имеет место неравенство

$$\omega_\beta(T_n^{(\alpha)},t)\le 2^{\beta}n^{\alpha}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta}\|T_n\|,\quad 0<nt\le\pi. \qquad (1.5.22)$$

Используя определение класса $W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^{\omega}_{\beta}$ и неравенство (1.5.22), получаем

$$W_\beta(T_n^{(\alpha)};\varphi,h)_p=\left(\frac{\int\limits_0^h\omega_\beta^p\left(T_n^{(\alpha)};t\right)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\le$$

$$\leq 2^{\beta}n^{\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\cdot\|T_n\|\leq\omega(h),$$

а потому $\mathbb{S}_{2n+1}\in W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^{\omega}_{\beta}$. Теперь, воспользуясь определением бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу

$$b_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^{\omega}_{\beta};L_2\right)\geq b_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^{\omega}_{\beta};L_2\right)\geq b_{2n}\left(\mathbb{S}_{2n+1};L_2\right)=$$

$$=2^{-\beta}n^{-\alpha}\left\{\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}\omega(h). \qquad (1.5.23)$$

Сопоставляя оценку сверху (1.5.21) и оценку снизу (1.5.23), с учётом соотношения (1.1.21) завершаем доказательство теоремы 1.5.4.

Следствие 1.5.1. *При всех* $\beta\geq 1$, $\alpha\geq 0$, $0<h\leq\pi/n$, $p=2/\beta$, $\varphi_*(t)=\cos(\pi t/2h)$ *справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{2/\beta,h,\varphi_*}H^{\omega}_{\beta};L_2\right)=\delta_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{2/\beta,h,\varphi_*}H^{\omega}_{\beta};L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{2/\beta,h,\varphi_*}H^{\omega}_{\beta}\right)=\frac{1}{2^{\beta}n^{\alpha}}\left(\frac{\int\limits_0^h\cos\frac{\pi t}{2h}dt}{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^2\cos\frac{\pi t}{2h}dt}\right)^{\beta/2}\omega(h)=$$

$$= \frac{2^\beta}{n^\alpha} \left(\frac{\left(\pi \sin \dfrac{nh}{2}\right)^2 - 2(nh)^2}{\pi^2 - 4(nh)^2} \right)^{\beta/2} \omega(h).$$

В частности, при $nh = \pi$,

$$\delta_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{2/\beta,\pi/n,\varphi_*}H^\omega_\beta; L_2\right) = \delta_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{2/\beta,\pi/n,\varphi_*}H^\omega_\beta; L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(\alpha)}_{2/\beta,\pi/n,\varphi_*}H^\omega_\beta\right) = \frac{2^\beta}{n^\alpha}\left(\frac{1}{3}\right)^{\beta/2} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Имеет место также следующая теорема, обобщающая теорему 1.5.3.

Теорема 1.5.5. *Пусть $\beta, \alpha > 0$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$ и выполняется неравенство (1.5.10). Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{2n,\beta,\alpha,p,h,\varphi}(L^{(\alpha)}_2; L_2) = \chi_{2n-1,\beta,\alpha,p,h,\varphi}(L^{(\alpha)}_2; L_2) =$$

$$= \delta_{2n-1}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^\omega_\beta; L_2\right) = \delta_{2n}\left(W^{(\alpha)}_{p,h,\varphi}H^\omega_\beta; L_2\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников.

ГЛАВА II

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНИХ ν-ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Начало исследований, связанных с аппроксимацией функций на прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, было положено в работах С.Н.Бернштейна, использовавшего для этого в качестве аппарата приближения пространства целых функций конечной степени. В дальнейшем этой проблематике было посвящено много работ, из которых укажем фундаментальные работы Н.Винера, Н.И.Ахиезера, М.Г.Крейна, С.М.Никольского, А.Ф.Тимана, Р.Боаса, И.И.Ибрагимова и др. (см., напр., монографии [8, 23, 67, 100, 129] и приведённую в них литературу). В восьмидесятых годах прошлого столетия появились работы [66,94,103] по приближению функций суммируемыми с квадратом на всей оси целыми функциями, в которых найдены точные константы и сравнительно недавно опубликованные работы, в которых вычислены точные значения средних ν-поперечников для различных классов целых функций (см., например, [32, 89, 90, 151, 156] и приведённую там литературу). Отметим, что теория поперечников в их традиционном определении освещена в монографиях В.М.Тихомирова [132, гл. IV, с.217-264], Н.П.Корнейчука [81, гл. VIII, с.340-390], а также в специально посвященной этой теории монографии А.Пинкуса [104], где подробно изложены почти все результаты о поперечниках, полученные до конца восьмидесятых годов прошлого века.

Определение средних ν-поперечников (по Колмогорову, Бернштейну, Гельфанду и линейных) дано Г.Г.Магарил-Ильяевым [89, 90] и им же вычислены точные значения этих величин для соболевских классов функций на $\mathbb{R}$, а также указаны соответствующие экстремальные подпространства и операторы.

§2.1. Наилучшее приближение целыми функциями экспоненциального типа

В этом параграфе приведём необходимые определения, обозначения общего характера, постановки задач и известные результаты, имеющие непосредственное отношение к исследуемой теме.

Всюду далее под $L_p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$ будем понимать пространство измеримых на всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = ess\,sup\Big\{|f(x)| : \ x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Через $L_p^{(r)}(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty; \ r \in \mathbb{N})$ обозначим множество функций $f \in L_p(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$–я производная $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$. Символом $B_{\sigma,p}$ $(0 < \sigma < \infty; 1 \leq p \leq \infty)$ обозначим сужение на $\mathbb{R}$ множества всех целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R})$. Величину

$$A_\sigma(f)_p := \inf\Big\{\|f - g_\sigma\|_p : \ g_\sigma \in B_{\sigma,p}\Big\}, \ 1 \leq p \leq \infty$$

называют наилучшим приближением функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ элементами множества $B_{\sigma,p}$. Модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ называют величину

$$\omega_m(f,t)_p \overset{def}{=} \sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})} : \ |h| \leq t\Big\} \ \ (0 \leq t < +\infty),$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k f(x + kh)$$

— m-я разность функции f в точке x с шагом h.

Будем рассматривать одну экстремальную задачу для установления неулучшаемых неравенств Джексона – Стечкина, связывающих наилучшие приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ посредством целых функций $g_\sigma \in B_{\sigma,2}$ с модулями непрерывности высших порядков указанных функций или их производных.

Известно [67, с.64-70], что любая функция вида

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{izu} \varphi(u) du, \quad \varphi(u) \in L_2(-\sigma; \sigma)$$

принадлежит пространству $B_{\sigma,2}$, причём $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L_2(-\sigma;\sigma)}$, а также известно [66, 103], что если

$$F(f; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt$$

– преобразование Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, то целая функция

$$F_\sigma(f; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \chi_\sigma(t) F(f; t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt} F(f; t) dt,$$

где $F(f; t)$ – преобразование Фурье функции f, а $\chi_\sigma(t)$ – характеристическая функция интервала $(-\sigma, \sigma)$, принадлежит классу $B_{\sigma,2}$ и наименее отклоняется от f в смысле метрики $L_2(\mathbb{R})$. При этом

$$A_\sigma(f)_2 = \|f - F_\sigma(f)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{|t| \geq \sigma} |F(f; t)|^2 dt \right)^{1/2}. \tag{2.1.1}$$

Из (2.1.1) и соответствующего обратного преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(f; t) e^{-ixt} dt$$

следует, что для любого $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$

$$A_\sigma(f^{(r)})_2 = \left(\int\limits_{|t| \geq \sigma} |F(f; t)|^2 t^{2r} dt \right)^{1/2} \geq \sigma^r A_\sigma(f)_2.$$

В [103] доказано, что если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то имеет место равенство

$$\omega_m^2(f;t)_2 = 2^m \sup_{|h|\le t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(f;x)|^2 (1-\cos hx)^m dx. \tag{2.1.2}$$

При решении экстремальных задач теории приближения $f \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями иногда удобнее использовать следующую характеристику гладкости

$$\Omega_m(f;t)_p = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}^p dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/p}, \tag{2.1.3}$$

где $0 < t < \infty$, $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$,

$$\Delta_{h_j}^1 f = f(\cdot + h_j) - f(\cdot),\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Впервые характеристика гладкости (2.1.3) для решения ряда задач конструктивной теории функций в пространстве 2π-периодических функций, принадлежащих $L_p[0, 2\pi]$ $(0 < p < 1)$, была использована К.В.Руновским [105], который доказал, что при всех $0 < p < \infty$ имеет место соотношение слабой эквивалентности $\Omega_m(f;t)_p \asymp \omega(f;t)_p$.

В случае $m = 1$ ранее характеристика $\Omega_1(f;t)_p$ была использована Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым и П.Освальдом [116] для изучения поведения наилучшего приближения функций полиномами по системе Хаара в пространстве L_p $(0 < p < 1)$.

В задачах аппроксимации функций $f \in L_p(\mathbb{R})$ целыми функциями $g_\sigma \in B_{\sigma,p}$, указанная характеристика нашла применение в ряде работ С.Б.Вакарчука [32, 42, 43], С.Б.Вакарчука и В.Г.Доронина [40]. В работе [32] С.Б.Вакарчук, в частности, доказал, что

$$\Xi_{\sigma,r,m}(t) \overset{def}{=} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r A_\sigma(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)}; t/\sigma)_2} = \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \right\}^{-m/2}. \tag{2.1.4}$$

Если полагать

$$\Theta_{\sigma,r,m}(\psi;h) \overset{def}{=} \sup\left\{\frac{2^m A_\sigma^2(f)_2}{\int\limits_0^h \Omega_m^2(f^{(r)};t)\psi(t)dt}: \quad f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})\right\},$$

где $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$ и $0<h\le 3\pi/4$, $\psi(t)\ge 0$ – суммируемая не эквивалентная нулю функция на отрезке $[0,h]$, то основной результат работы [40] заключается в следующем утверждении.

Теорема A. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<h\le 3\pi/4$ и ψ – некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке $[0,h]$ функция, тождественно не равная нулю. Тогда выполняются следующие неравенства*

$$\Big\{\mathcal{D}_{\sigma,r,m}(\psi;h)\Big\}^{-1} \le \Theta_{\sigma,r,m}(\psi;h) \le \Big\{\inf_{\sigma\le t<\infty}\mathcal{D}_{t,r,m}(\psi;h)\Big\}^{-1}, \tag{2.1.5}$$

где

$$\mathcal{D}_{t,r,m}(\psi;h) = t^{2r}\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m \psi(t)dt.$$

Отметим, что неравенство (2.1.5) является своеобразным обобщением известного неравенства А.А.Лигуна [85], доказанного для наилучшего полиномиального приближения множеств 2π-периодических функций $f\in L_2^{(r)}[0,2\pi]$, на случай наилучшего приближения функций $f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ целыми функциями $g_\sigma\in B_{\sigma,2}$.

Наша цель в данной главе состоит в обобщении неравенства (2.1.5) и получении ряда более общих результатов в этом направлении.

С этой целью введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику вида

$$\chi_{\sigma,m,r,q}(\psi;h) = \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,\psi(t)dt\right)^{1/q}}, \tag{2.1.6}$$

где $m \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < q \leq 2$; $\sigma, h \in \mathbb{R}_+$ и $\psi(t)$ – весовая функция на $[0, h]$, т.е. неотрицательная, суммируемая, не эквивалентная нулевой функции на $[0, h]$.

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 2.1.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq \pi/\sigma$, $0 < q \leq 2$ *и* $\psi(t)$ *– весовая функция на отрезке* $[0, h]$. *Тогда выполняются следующие неравенства*

$$\left\{\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi; h, \sigma)\right\}^{-1} \leq \chi_{\sigma,m,r,q}(\psi; h) \leq \left\{\inf_{\sigma \leq t < \infty} \mathcal{B}_{m,r,q}(\psi; h, t)\right\}^{-1}, \qquad (2.1.7)$$

где

$$\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi; h, t) = \left(t^{rq} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin tx}{tx}\right)^{mq/2} \psi(x)dx\right)^{1/q}, \quad t \geq \sigma. \qquad (2.1.8)$$

Доказательство. Выше мы отметили, что для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ существует только одна целая функция $F_\sigma(f, x) \in B_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в метрике $L_2(\mathbb{R})$ и имеет вид

$$F_\sigma(f; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \chi_\sigma(t) F(f; t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt} F(f; t)dt,$$

где $F(f; t)$ – преобразование Фурье функции f, а $\chi_\sigma(t)$ – характеристическая функция интервала $(-\sigma, \sigma)$. Поскольку

$$\Delta^1_{h_j} f(x) = f(x + h_j) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{ith_j} - 1\right) F(f; t) e^{ixt} dt, \quad (j = \overline{1, m}),$$

то мы имеем

$$\Delta^m_{\overline{h}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{m} \left(e^{ith_j} - 1\right) F(f; t) e^{ixt} dt. \qquad (2.1.9)$$

Из равенства (2.1.9), используя свойства преобразования Фурье и равенство Парсеваля, получаем

$$\left\|\Delta^m_{\overline{h}} f(\cdot)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = 2^m \left\|F(f; \cdot) \prod_{j=1}^{m} (1 - \cos(\cdot)h_j)^{1/2}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(f;t)|^2 \prod_{j=1}^{m} (1-\cos th_j)\, dt. \tag{2.1.10}$$

Для фиксированного $\tau,\ 0<\tau\le\pi/(2\sigma)$, используя соотношение (2.1.10), находим

$$\Omega_m^2(f^{(r)};\tau)_2 = \left(\frac{2}{\tau}\right)^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{2r}\,|F(f;t)|^2 \left\{\prod_{j=1}^{m}\int\limits_0^{\tau}(1-\cos th_j)\,dh_j\right\} dt =$$

$$= 2^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{2r}\,|F(f;t)|^2 \left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m dt.$$

Из полученного равенства следует, что при любом $|t|\ge\sigma$ справедливо неравенство

$$\Omega_m^2(f^{(r)};\tau)_2 \ge 2^m \int\limits_{|t|\ge\sigma} t^{2r}\,|F(f;t)|^2 \left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m dt. \tag{2.1.11}$$

Воспользуясь далее континуальным аналогом неравенства Минковского, приведённым в [144, с.32]:

$$\left(\int\limits_0^h \left(\int\limits_{|t|\ge\sigma} |\varphi(t,\tau)|^2 d\tau\right)^{q/2} dt\right)^{1/q} \ge \left(\int\limits_{|t|\ge\sigma} \left(\int\limits_0^h |\varphi(t,\tau)|^q dt\right)^{2/q} d\tau\right)^{1/2}, \tag{2.1.12}$$

где $0<q\le 2$, с учётом неравенство (2.1.11), получаем

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)_2\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q} \ge$$

$$\ge \left(\int\limits_0^h \left[2^m \int\limits_{|t|\ge\sigma} t^{2r}|F(f;t)|^2 \left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^m dt\right]^{q/2} \psi(\tau)d\tau\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left[2^m \int\limits_{|t|\ge\sigma} t^{2r}|F(f;t)|^2 \left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^m \Big(\psi(\tau)\Big)^{2/q} dt\right]^{q/2} d\tau\right)^{1/q} \ge$$

$$\geq 2^{m/2}\left(\int\limits_{|t|\geq\sigma}\left[\int\limits_{0}^{h} t^{rq}|F(f;t)|^{q}\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right]^{2/q}dt\right)^{1/2}=$$

$$=2^{m/2}\left(\int\limits_{|t|\geq\sigma}|F(f;t)|^{2}\left[t^{rq}\int\limits_{0}^{h}\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right]^{2/q}dt\right)^{1/2}=$$

$$=2^{m/2}\left(\int\limits_{|t|\geq\sigma}|F(f;t)|^{2}\Big\{\mathcal{B}^{2}_{m,r,q}(\psi;h,t)\Big\}dt\right)^{1/2}\geq$$

$$\geq 2^{m/2}\Big\{\inf_{\sigma\leq t<\infty}\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,t)\Big\}\left(\int\limits_{|t|\geq\sigma}|F(f;t)|^{2}dt\right)^{1/2}=$$

$$=2^{m/2}A_{\sigma}(f)_{2}\left\{\inf_{\sigma\leq t<\infty}\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,t)\right\}.$$

Из последнего неравенства сразу следует, что

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,A_{\sigma}(f)_{2}}{\left(\int\limits_{0}^{h}\Omega_{m}^{q}(f^{(r)};t)\,\psi(t)dt\right)^{1/q}}\leq\left\{\inf_{\sigma\leq t<\infty}\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,t)\right\}^{-1} \qquad (2.1.13)$$

и, так как неравенство (2.1.13) выполняется для произвольной $f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, то отсюда вытекает требуемая оценка сверху

$$\chi_{\sigma,m,r,q}(\psi;h)\leq\left\{\inf_{\sigma\leq t<\infty}\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,t)\right\}^{-1}. \qquad (2.1.14)$$

Для установления оценки снизу экстремальной характеристики (2.1.6) вводим в рассмотрение целую функцию экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$:

$$g_{\varepsilon}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\sin(\sigma+\varepsilon)x}{x}-\frac{\sin\sigma x}{x}\right\},\quad 0<\varepsilon\leq\sigma_{*},$$

где $\sigma_* := \min(\sigma, 1)$. Поскольку преобразование Фурье функции

$$\varphi(x) = \frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$$

равно

$$F(\varphi; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{ixt}dx =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \text{если} \quad |x| < a; \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \text{если} \quad |x| = a; \\ 0, & \text{если} \quad |x| > a, \end{cases}$$

то преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(x)$ имеет вид

$$F(g_\varepsilon; x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} g_\varepsilon(t)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\sin(\sigma+\varepsilon)t}{t} - \frac{\sin \sigma t}{t} \right\} e^{ixt}dt =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sigma < |x| < \sigma + \varepsilon \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad |x| = \sigma + \varepsilon \quad \text{или} \quad |x| = \sigma \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \sigma + \varepsilon \quad \text{или} \quad |x| < \sigma. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

Из (2.1.1) следует, что

$$A_\sigma^2(g_\varepsilon)_2 = \int\limits_{|t| \geq \sigma} |F(g_\varepsilon; t)|^2 dt =$$

$$= \int\limits_{-(\sigma+\varepsilon)}^{-\sigma} |F(g_\varepsilon; t)|^2 dt + \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} |F(g_\varepsilon; t)|^2 dt = 2\varepsilon. \tag{2.1.16}$$

Очевидно, что $g_\varepsilon \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ и так как функция $\sin x/x$ на отрезке $(0, \pi]$ является монотонно убывающей и имеет место формула

$$F(g_\varepsilon^{(r)}; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (it)^r g_\varepsilon(t) e^{ixt}dt = (ix)^r F(g_\varepsilon; x),$$

то, используя это равенство, запишем

$$\Omega_m^2(g_\varepsilon^{(r)};\tau)_2 = 2^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|F(g_\varepsilon^{(r)};t)\right|^2 \left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m dt =$$

$$= 2^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{2r}\left|F(g_\varepsilon;t)\right|^2 \left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m dt =$$

$$= 2^m \int\limits_{-(\sigma+\varepsilon)}^{-\sigma} t^{2r}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m dt + 2^m \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} t^{2r}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m dt =$$

$$= 2^{m+1} \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} t^{2r}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m dt \le$$

$$\le 2^{m+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}\left\{1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right\}^m =$$

$$= 2^{m+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}\left\{1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right\}^m. \qquad (2.1.17)$$

С учётом равенства (2.1.16) из неравенства (2.1.17) имеем

$$\Omega_m^2(g_\varepsilon^{(r)};\tau) \le 2^m A_\sigma^2(g_\varepsilon)_2(\sigma+\varepsilon)^{2r}\left\{1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right\}^m. \qquad (2.1.18)$$

Возведя обе части неравенства (2.1.18) в степень $q/2$ $(0 < q \le 2)$, умножив на неотрицательную неэквивалентную нулю функцию ψ и интегрируя от $\tau = 0$ до $\tau = h$, будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(g_\varepsilon^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q} \le$$

$$\le 2^{m/2}A_\sigma(g_\varepsilon)_2(\sigma+\varepsilon)^r \left(\int\limits_0^h \left\{1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right\}^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}.$$

Откуда

$$\frac{2^{m/2} A_\sigma(g_\varepsilon)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(g_\varepsilon^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}} \geq$$

$$\geq \left((\sigma+\varepsilon)^{rq}\int\limits_0^h \left\{1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right\}^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}. \qquad (2.1.19)$$

Правая сторона (2.1.19) при $\varepsilon \to 0$ монотонно возрастает и ограничивается сверху числом $\left\{\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,\sigma)\right\}^{-1}$. Вычислим верхнюю грань по всем $\varepsilon \in (0,\sigma_*)$ от выражения, содержащегося в правой части неравенства (2.1.19). Очевидно, что указанная верхняя грань не будет превышать левую часть соотношения (2.1.13). Поскольку для любого сколь угодно малого числа $\delta > 0$ можно подобрать число $\varepsilon_* := \varepsilon(\delta) \in (0,\sigma_*)$ так, что

$$(\sigma+\varepsilon_*)^{-r}\left(\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon_*)}{\tau(\sigma+\varepsilon_*)}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q} >$$

$$> \left(\sigma^{rq}\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q} - \delta,$$

то из определения верхней грани множества имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma_*}\left\{(\sigma+\varepsilon)^{-r}\left(\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}\right\} =$$

$$= \left(\sigma^{rq}\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}. \qquad (2.1.20)$$

Таким образом, из соотношений (2.1.19) и (2.1.20) получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,A_\sigma(f^{(r)})_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}}\geq\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma_*}\frac{2^{m/2}\,A_\sigma(g_\varepsilon^{(r)})_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^q(g_\varepsilon^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma_*}\left\{(\sigma+\varepsilon)^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}\right\}=$$

$$=\left(\sigma^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\tau\sigma}{\tau\sigma}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}=\Big\{\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,\sigma)\Big\}^{-1}. \qquad (2.1.21)$$

Сравнивая оценку сверху (2.1.14) и оценку снизу (2.1.21), получаем требуемое неравенство (2.1.7), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.1.

Из доказанной теоремы 2.1.1 в свою очередь вытекает

Теорема 2.1.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда при любом* $0<h\leq 3\pi/(4\sigma)$ *справедливы равенства*

$$\chi_{\sigma,m,r,q}(\psi;h)=\Big\{\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,\sigma)\Big\}^{-1}:=$$

$$:=\left(\sigma^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\tau\sigma}{\tau\sigma}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}. \qquad (2.1.22)$$

Доказательство. Для доказательства (2.1.22) достаточно показать, что при $t\geq\sigma$, $0<\tau\leq h$, $0<h\leq 3\pi/(4\sigma)$ имеет место неравенство

$$t^{rq}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^{mq/2}\geq\sigma^{rq}\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему

$$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{2r/m}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)\geq 1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau},$$

которое в свою очередь будет вытекать из неравенства

$$1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\geq 1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau},$$

или

$$\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\geq\frac{\sin t\tau}{t\tau}. \qquad (2.1.23)$$

Докажем неравенство (2.1.23). Имеем $\sigma\tau\leq\sigma h\leq 3\pi/4$ и

$$\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\geq\frac{\sin\dfrac{3\pi}{4}}{\dfrac{3\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}>\frac{1}{2\pi}. \qquad (2.1.24)$$

Если $\sigma\tau\leq t\tau\leq\pi$, то неравенство (2.1.23) вытекает из убывания $\dfrac{\sin x}{x}$ на $[0,\pi]$. Пусть $t\tau>\pi$. Так как локальные максимумы $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x>\pi$ убывают и первый локальный максимум достигается в точке $\gamma\in(2\pi,3\pi)$, то согласно (2.1.24)

$$\frac{\sin t\tau}{t\tau}\leq\frac{\sin\gamma}{\gamma}\leq\frac{\sin\gamma}{2\pi}\leq\frac{1}{2\pi}<\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}.$$

Тем самым неравенство (2.1.23) и вместо с ним равенство (2.1.22) доказаны.

Теорему 2.1.2, справедливую для всех $\psi\geq 0$ и $0<h\leq 3\pi/(4\sigma)$, дополним следующим утверждением.

Теорема 2.1.2′. *Пусть* $m,\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma>0$, $0<h\leq\pi/\sigma$, $0<q\leq 2$ *и* $\psi(t)$ *– неотрицательная, непрерывно дифференцируемая на* $[0,h]$ *функция, для которой*

$$(rq-1)\psi(t)-t\psi'(t)\geq 0.$$

Тогда

$$\chi_{\sigma,m,r,q}(\psi;h)=\Big\{\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,\sigma)\Big\}^{-1}.$$

Доказательство теоремы 2.1.2$'$ аналогично доказательству теоремы 1.2.2, а потому мы его опускаем.

Отметим два наиболее важных частных случая равенства (2.1.22), которые играют ключевую роль при вычислении значений средних поперечников:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\,\sigma^{r-1/q}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,d\tau\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^{\sigma h}\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^{mq/2}d\tau\right)^{-1/q}. \tag{2.1.25}$$

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\,\sigma^{r-2/q}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau\Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,d\tau\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^{\sigma h}\tau\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^{mq/2}d\tau\right)^{-1/q}. \tag{2.1.26}$$

В равенстве

$$\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,t) = \left(t^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q},$$

полагая $h=a/\sigma$ $(0<a<\pi)$ и $\psi(\tau)=g(\sigma\tau)$, имеем

$$\mathcal{B}_{m,r,q}\Big(g(\sigma\cdot);a/\sigma,t\Big) = \left(t^{rq}\int\limits_0^{a/\sigma}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^{mq/2}g(\sigma\tau)d\tau\right)^{1/q} =$$

$$= \sigma^{r-1/q}\left(\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{rq}\int\limits_0^a\left(1-\frac{\sin(t\tau/\sigma)}{(t\tau/\sigma)}\right)^{mq/2}g(\tau)d\tau\right)^{1/q},$$

где $\sigma\le t<\infty$. Таким образом, из полученного равенства следует, что

$$\inf_{\sigma\le t<\infty}\mathcal{B}_{m,r,q}(\psi;h,t) = \sigma^{r-1/q}\inf_{x\ge 1}\mathcal{D}_{m,r,q}(g;a,x), \tag{2.1.27}$$

где ради удобства положено

$$\mathcal{D}_{m,r,q}(g;a,x) = \left(x^{rq}\int\limits_0^a\left(1-\frac{\sin x\tau}{x\tau}\right)^{mq/2}g(\tau)d\tau\right)^{1/q}. \tag{2.1.28}$$

Из равенств (2.1.27) и (2.1.28) непосредственно вытекают следующие

Следствие 2.1.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \le 2$ *и* $g(\tau)$ *– некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0, a]$ *функция, где* $0 < a < \pi$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\Big\{\mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, 1)\Big\}^{-1} \le \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\,\sigma^{r-1/q}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \Omega_m^q(f^{(r)}; \tau/\sigma)\,g(\tau)d\tau\right)^{1/q}} \le$$

$$\le \Big\{\inf_{x \ge 1} \mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, x)\Big\}^{-1}. \qquad (2.1.29)$$

Очевидно, что если

$$\inf_{x \ge 1} \mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, x) = \mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, 1), \qquad (2.1.30)$$

то имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\,\sigma^{r-1/q}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \Omega_m^q(f^{(r)}; \tau/\sigma)\,g(\tau)d\tau\right)^{1/q}} = \frac{1}{\mathcal{D}_{m,r,q}(g; a, 1)}.$$

Следствие 2.1.2. *Пусть* $g_*(t) = t^{rq-1}g_1(t)$ $(0 < q \le 2,\ r \in \mathbb{N})$ *– неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, a]$, $0 < a < \pi$ *функция,* $g_1(t)$ *– невозрастающая на* $[0, a]$ *функция. Тогда имеет место (2.1.30) и справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\,\sigma^{r}\,A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \Omega_m^q(f^{(r)}; \tau/\sigma)\,\tau^{rq-1}g_1(\tau)d\tau\right)^{1/q}} = \frac{1}{\mathcal{D}_{m,r,q}(g_*; a, 1)}. \qquad (2.1.31)$$

Доказательство. Чтобы установить равенство (2.1.31), с учётом неравенств (2.1.29), достаточно доказать равенство (2.1.30). Полагаем

$$g^*(t) := \Big\{\, g_1(t),\ \text{если } 0 < t \le a; \quad g_1(a),\ \text{если } a \le t < \infty \Big\}.$$

Для любых $x \ge 1$ имеем:

$$\mathcal{D}_{m,r,q}(g^*;a,x)=\left(x^{rq}\int\limits_0^a\left(1-\frac{\sin x\tau}{x\tau}\right)^{mq/2}\tau^{rq-1}g_1(\tau)d\tau\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\int\limits_0^a\left(1-\frac{\sin x\tau}{x\tau}\right)^{mq/2}(x\tau)^{rq-1}g_1(\tau)d(x\tau)\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\int\limits_0^{ax}\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^{mq/2}\tau^{rq-1}g_*(\tau/x)d\tau\right)^{1/q}\geq$$

$$\geq\left(\int\limits_0^{ax}\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^{mq/2}\tau^{rq-1}g_*(\tau)d\tau\right)^{1/q}\geq$$

$$\geq\left(\int\limits_0^{a}\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^{mq/2}\tau^{rq-1}g_1(\tau)d\tau\right)^{1/q}=\mathcal{D}_{m,r,q}(g^*;a,1),$$

откуда и вытекает равенство (2.1.30) и тем самым равенство (2.1.31) доказано.

Хорошо известно [17, с.236], что если $f^{(r)}\in L_2(\mathbb{R})$, то все промежуточные производные $f^{(r-s)}\in L_2(\mathbb{R})$ $(s=1,2,\ldots,r-1)$, а потому было бы интересно отыскать значение величины (2.1.6), когда в этом соотношении вместо величины наилучших приближений $A_\sigma(f)_2$ вводится в рассмотрение $A_\sigma(f^{(r-s)})$ $(s=1,2,\ldots,r-1)$ – наилучшее приближение промежуточных производных $f^{(r-s)}$ элементами $g_\sigma\in B_{\sigma,2}$ в норме пространства $L_2^{(r)}(\mathbb{R})$.

Справедлива следующая

Теорема 2.1.3. *Пусть $m,r\in\mathbb{N}$, $0<q\leq 2$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<h\leq 3\pi/(4\sigma)$, $\psi(\tau)$ – весовая функция на отрезке $[0,h]$ функция. Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^s\,A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}}=\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q},\tag{2.1.32}$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots, r$. *Если, в частности,* $m, r \in \mathbb{N}$, $q = 2/m$, $0 < h \leq 3\pi/(4\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ *и* $\psi(\tau) \equiv 1$, *то*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\,\sigma^{s-m/2} A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\displaystyle\int_0^h \Omega_m^{2/m}(f^{(r)};\tau)\,d\tau\right)^{m/2}} = \Big(\sigma h - Si(\sigma h)\Big)^{-m/2}. \qquad (2.1.33)$$

где $Si(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$ *– интегральный синус.*

Если же, $m, r \in \mathbb{N}$, $q = 2/m$, $0 < h \leq 3\pi/(4\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ *и* $\psi(\tau) \equiv \tau$, *то имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{s-m} A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\displaystyle\int_0^h \tau\Omega_m^{2/m}(f^{(r)};\tau)\,d\tau\right)^{m/2}} = \Big[(\sigma h)^2 - 2(1 - \cos\sigma h)\Big]^{-m/2}. \qquad (2.1.34)$$

Доказательство. Наилучшее приближение промежуточных производных посредством целых функций экспоненциального типа σ представим в следующем виде

$$A_\sigma^2(f^{(r-s)})_2 = \int_{|t| \geq \sigma} t^{2(r-s)} |F(f;t)|^2 dt = \int_{|t| \geq \sigma} |F(f;t)|^{2(1-s/r)} t^{2(r-s)} |F(f;t)|^{2s/r} dt.$$

Применяя к правой части полученного равенства неравенство Гёльдера для интегралов, получаем

$$A_\sigma^2(f^{(r-s)})_2 \leq \left(\int_{|t| \geq \sigma} |F(f;t)|^2 t^{2r} dt\right)^{1-s/r} \left(\int_{|t| \geq \sigma} |F(f;t)|^2 dt\right)^{s/r} =$$

$$= \Big(A_\sigma(f^{(r)})_2\Big)^{2(1-s/r)} \Big(A_\sigma(f)_2\Big)^{2s/r}. \qquad (2.1.35)$$

Теперь заметим, что из равенства (2.1.22) вытекает неравенство

$$A_\sigma(f)_2 \leq$$

$$\leq \left(2^{mq/2}\sigma^{rq}\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}, \tag{2.1.36}$$

из которого при $r=0$ имеем

$$A_\sigma(f)_2 \leq \left(2^{mq/2}\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f;\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}.$$

Заменяя в этом неравенстве f на $f^{(r)}$, запишем

$$A_\sigma(f^{(r)})_2 \leq$$

$$\leq \left(2^{mq/2}\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}. \tag{2.1.37}$$

Используя приведённые неравенства (2.1.36) и (2.1.37), из (2.1.35) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ получим оценку сверху

$$\frac{2^{m/2}\,\sigma^s\,A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}} \leq \left(\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}. \tag{2.1.38}$$

Для получения соответствующей оценки снизу снова вводим в рассмотрение функцию $g_\varepsilon(t) \in L_2(\mathbb{R})$, использованную нами при получения аналогичной оценки при доказательстве теоремы 2.1.1.

В самом деле, учитывая соотношения (2.1.15) и (2.1.16), согласно теореме о среднем значение интеграла, для $0\leq\eta\leq\varepsilon$ получаем

$$A_{\sigma}(g_{\varepsilon}^{(r-s)})=\left(\int\limits_{|t|\geq\sigma}|F(g_{\varepsilon};t)|^{2}t^{2(r-s)}dt\right)^{1/2}=$$

$$=\left(2\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon}t^{2(r-s)}dt\right)^{1/2}=\Big(2\varepsilon(\sigma+\eta)^{2(r-s)}\Big)^{1/2}\geq\sqrt{2\varepsilon}\,\sigma^{r-s}. \tag{2.1.39}$$

Из неравенства (2.1.17), с учётом (2.1.39) имеем:

$$\left(\int\limits_{0}^{h}\Omega_{m}^{q}(g_{\varepsilon}^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}\leq$$

$$\leq 2^{m/2}\sqrt{2\varepsilon}\,(\sigma+\varepsilon)^{r}\left(\int\limits_{0}^{h}\left(1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}\leq$$

$$\leq 2^{m/2}A_{\sigma}(g_{\varepsilon}^{(r-s)})_{2}\,\sigma^{s-r}\sqrt{2\varepsilon}\,(\sigma+\varepsilon)^{r}\left(\int\limits_{0}^{h}\left(1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}.$$

Откуда

$$\sup_{f\in L_{2}^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{s}\,A_{\sigma}(f^{(r-s)})_{2}}{\left(\int\limits_{0}^{h}\Omega_{m}^{q}(f^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}}\geq$$

$$\geq\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma_{*}}\frac{2^{m/2}\,\sigma^{s}\,A_{\sigma}(g_{\varepsilon}^{(r-s)})_{2}}{\left(\int\limits_{0}^{h}\Omega_{m}^{q}(g_{\varepsilon}^{(r)};\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma_{*}}\left(\frac{\sigma}{\sigma+\varepsilon}\right)^{r}\left(\int\limits_{0}^{h}\left\{1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right\}^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}=$$

$$=\left(\int\limits_{0}^{h}\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}. \tag{2.1.40}$$

Сравнивая оценку сверху (2.1.38) и оценку снизу (2.1.40), получаем требуемое равенство (2.1.32), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.3.

Следствие 2.1.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.3. Тогда при всех* $s = 0, 1, 2, \ldots, r$; $\psi(\tau) \equiv 1$ *и* $\psi(\tau) \equiv \tau$ *соответственно имеют место равенства*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\,\sigma^{s-1/q}\,A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)d\tau\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^{\sigma h}\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^{mq/2}d\tau\right)^{-1/q}, \qquad (2.1.41)$$

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\,\sigma^{s-2/q}\,A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau\Omega_m^q(f^{(r)};\tau)d\tau\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^{\sigma h}\tau\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^{mq/2}d\tau\right)^{-1/q}. \qquad (2.1.42)$$

Отметим, что равенства (2.1.25) и (2.1.26) вытекают из соответствующих равенств (2.1.41) и (2.1.42) при значении $s = r$, а при $q = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ из (2.1.41) и (2.1.42) вытекают равенства (2.1.33) и (2.1.34).

§2.2. Точные значения средних ν-поперечников некоторых классов функций, определённых на всей оси

Прежде чем привести полученные нами результаты в этом направлении, приведём нужные нам в дальнейшем определения и обозначения общего характера из работ Г.Г.Магарил-Ильяева [89, 90].

Общеизвестно, что до недавнего времени подпространство $B_{\sigma,p}$ $(0 < \sigma < \infty;\ 1 \leq p \leq \infty)$ было в некотором смысле единственным аппаратом приближения в $L_p(\mathbb{R})$ и только лишь с конца прошлого века все чаще в качестве аппроксимирующего множества используются сплайны (см., например, [60, 91, 117, 118]). Если рассматривать задачу приближения $f \in L_p(\mathbb{R})$, то целые функции и сплайны являются бесконечномерными образованиями и величины, характеризующие соответствующие приближения, выражаются в терминах, отражающих внутреннюю структуру аппарата аппроксимации, например: степень целой функции экспоненциального типа, плотность распределения узлов сплайна. Возникает естественный вопрос: как сравнивать между собой подобные способы приближения?

Введение Г.Г.Магарил-Ильяевым [89, 90] определения средней размерности, являющейся определенной модификацией соответствующего понятия, данного ранее В.М.Тихомировым [133], позволило определить асимптотические характеристики подпространств, подобные поперечникам, где роль размерности играет средняя размерность. В результате этого оказалось возможным сравнить аппроксимативные свойства подпространства $B_{\sigma,p},\ 1 \leq p \leq \infty$ с аналогичными характеристиками иных подпространств из $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p \leq \infty$ той же размерности и решать в $L_p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p \leq \infty$ экстремальные задачи теории аппроксимации вариационного содержания.

Пусть $\mathbb{B}L_p(\mathbb{R}) = \{\varphi \in L_p(\mathbb{R}) : \ \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq 1\}$ – единичный шар в $L_p(\mathbb{R})$; $Lin(L_p(\mathbb{R}))$ является совокупностью всех линейных подпространств в $L_p(\mathbb{R})$;

$$Lin_n(L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \Big\{\mathcal{J} \in Lin(L_p(\mathbb{R})) : dim\mathcal{J} \leq n\Big\},\ n \in \mathbb{Z}_+;$$

$$d(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, L_p(\mathbb{R})) \overset{def}{=} \sup\Big\{\inf\{\|f-\varphi\|_p : \varphi \in \mathfrak{N}\} : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}$$

– наилучшее приближение множества $\mathfrak{M} \subset L_p(\mathbb{R})$ множеством $\mathfrak{N} \subset L_p(\mathbb{R})$. Под $\mathfrak{N}_T, T > 0$ понимаем сужение множества $\mathfrak{N} \subset L_p(\mathbb{R})$ на отрезок $[-T, T]$, а через $Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{J} \in Lin(L_p(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_p([-T, T])$ при любом $T > 0$. Если $\mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $T, \ \varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $M \in Lin_n(L_p([-T, T])$, для которых

$$d((\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T, M, L_p([-T, T])) < \varepsilon.$$

Пусть

$$D_\varepsilon(T, \mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \exists M \in Lin_n(L_p([-T, T])),$$

$$d((\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T, M, L_p([-T, T])) < \varepsilon\}.$$

В [89] доказано, что данная функция не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) \overset{def}{=} \lim\{\liminf\{D_\varepsilon(T, \mathcal{J}, L_p(\mathbb{R}))/(2T) : T \to \infty\} : \varepsilon \to 0\},$$

где $\mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{J}$ в $L_p(\mathbb{R})$. В работах [89, 90] доказано, что

$$\overline{dim}(B_{\sigma,p}; L_p(\mathbb{R})) = \sigma/\pi, \ (1 \le p \le \infty).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ – центрально-симметричное подмножество из $L_p(\mathbb{R})$ и $\nu > 0$ – произвольное число. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R})) \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \inf\Big\{\sup\{\inf\Big\{\|f-\varphi\|_p : \varphi \in \mathcal{J}\} : f \in \mathfrak{M}\Big\} :$$

$$\mathcal{J} \in Lin_c(L_p(\mathbb{R})), \overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) \le \nu\Big\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называют экстремальным. Средним линейным ν-поперечником множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=} \inf\{\sup\{\|f - \Lambda f\| : f \in \mathfrak{M}\} : (X, \Lambda)\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, Λ) таким, что X есть нормированное пространство, непрерывно вложенное в $L_p(\mathbb{R})$; $\mathfrak{M} \subset X$; $\Lambda : X \longrightarrow L_p(\mathbb{R})$ является непрерывным линейным оператором, для которого $Im\,\Lambda \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $\overline{dim}(Im\,\Lambda, L_p(\mathbb{R})) \leq \nu$. Пару (X^*, Λ^*), на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной.

Величину

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R})) \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \sup\Big\{\sup\Big\{\rho > 0 : \mathcal{J} \cap \rho\,\mathbb{B}L_p(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}\Big\} : \mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}), \overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) > \nu,$$

$$\overline{d}_\nu(\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}), L_p(\mathbb{R})) = 1\Big\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{J}$ при вычислении внешней точной верхней грани, означает, что рассматриваются только те пространства, для которых верен аналог теоремы В.М.Тихомирова о поперечнике шара [81, с.341]. В [89,90] доказывается, что указанному требованию удовлетворяет, например, пространство $B_{\sigma,p}$, если $\sigma > \nu\pi$.

Между вышеперечисленными экстремальными характеристиками множества $\mathfrak{M}$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства [32, 90]

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leq \overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leq \overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})). \qquad (2.2.1)$$

Всюду далее наилучшее приближение класса $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ подпространством $B_{\sigma,2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ обозначим

$$A_\sigma(\mathfrak{M})_2 := \sup\Big\{A_\sigma(f)_{L_2(\mathbb{R})} : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Для пары $(L_2^{(r)}(\mathbb{R}), \Lambda)$, где $\Lambda: L_2^{(r)}(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ – непрерывный линейный оператор, для которого $Im\,\Lambda \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $\overline{dim}(Im\,\Lambda, L_p(\mathbb{R})) \le \nu$, полагаем

$$\mathcal{E}_\nu(\mathfrak{M}; (L_2(\mathbb{R}), \Lambda)) \stackrel{def}{=} \sup\Big\{\|f - \Lambda f\|: \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Отметим, что точные значения и асимптотически точные значения средних поперечников для некоторых классов функций вычислены Г.Г.Магарил-Ильяевым [89, 90], С.Б.Вакарчуком [32] и в работах [151, 156].

Другое направление исследования теории приближения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ целыми функциями экспоненциального сферического типа развита в недавно опубликованных работах Д.В.Горбачева [50, 51].

Рассматриваемые в данной работе классы функций определяются следующим образом.

Пусть по-прежнему ψ – весовая функция на $[0, h]$. Через $W_q^{(r)}(\Omega; \psi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \le 2$, обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ при любом $h \in (0, \pi]$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}; t)_2\, \psi(t) dt \le 1.$$

Пусть $\Phi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ $(t \ge 0)$ – произвольные непрерывные возрастающие функции такие, что $\Phi_i(0) = 0$. Символом $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, r-тые производные которых удовлетворяют условию

$$\left(\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}; t)_2\, dt\right)^{1/q} \le \Phi_1(h)$$

для любого $h \in (0, \pi]$. Аналогичным образом для $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, $0 < h \le \pi$, через $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_2)$ определим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, r-тые производные которых удовлетворяют ограничению

$$\left(\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}; t)_2\, dt\right)^{1/q} \le \Phi_2(h).$$

Наконец, для любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \leq 2$ и $h \in \mathbb{R}_+$ полагаем

$$W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3) = \left\{ f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}) : \ \frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t\Omega_m^q(f^{(r)}, t)_2 \, dt \leq \Phi_3^q(h) \right\}.$$

При выполнении ряда ограничений относительно параметров r, q, h и мажоранты Φ_i $(i = 1, 2, 3)$ найдены точные значения вышеперечисленных средних поперечников классов $W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1)$, $W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_2)$ и $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_3)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и указаны соответствующие экстремальные подпространства. Следуя работам [32, 36, 157], полагаем

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)_* := \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad 0 < x < t_*; \\ 1 - \dfrac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если} \quad x \geq t_*, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

где через t_* обозначена величина аргумента $x \in (0, \infty)$ функции $\sin x/x$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $x = \operatorname{tg} x$. Простые вычисления показывают, что $4,49 < t_* < 4,51$.

В формулировке нижеследующих теорем через $\overline{\pi}_\nu(\cdot)$ обозначим любой из средних поперечников: бернштейновский $\overline{b}_\nu(\cdot)$, колмогоровский $\overline{d}_\nu(\cdot)$ или линейный $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$.

Теорема 2.2.1. *Если для всех $\mu > 0$, $0 < h \leq \pi$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$ мажоранта $\Phi_1(u)$ удовлетворяет условию*

$$\Phi_1^q\left(\frac{h}{\mu}\right) \int\limits_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2} dt \leq \Phi_1^q(h) \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt, \tag{2.2.3}$$

то для любого $\nu > 0$ имеют место равенства

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}^*))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q} \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi_1(1/\nu). \tag{2.2.4}$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi})$, где $\Lambda^*_{\nu\pi}$ определяется из условия

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi} f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot) F(f, \cdot),$$

(F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi, \nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$.

Доказательство. Из результатов работы [89] следует, что

$$\overline{dim}(B_{\nu\pi,2}; L_2(\mathbb{R})) = \nu.$$

Из неравенства (2.1.14) для произвольного $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеем

$$A_\sigma(f) \le$$

$$\le 2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}, t)_2 dt\right)^{1/q}\left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.2.5)$$

Полагая в правой части (2.2.5) $h = \pi/\sigma$ и используя определение класса $W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1)$, получаем оценку сверху среднего линейного поперечника

$$\overline{\delta}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1),\, L_2(\mathbb{R})) \le A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q} \Phi_1(1/\nu). \qquad (2.2.6)$$

Получим оценку снизу для среднего ν-поперечника по Бернштейну класса $W_q^{(r)}(\Omega_m;\, \Phi_1)$. Для этого положим $\sigma_1 \stackrel{def}{=} \nu\pi(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное число, и рассмотрим шар

$$S_{\sigma_1,\rho_1} \stackrel{def}{=} B_{\sigma_1,2} \cap \rho_1\, \mathbb{B}L_2(\mathbb{R}) = \left\{g_{\sigma_1} \in B_{\sigma_1,2} :\ \|g_{\sigma_1}\| \le \rho_1\right\}$$

радиуса

$$\rho_1 = 2^{-m/2}\sigma_1^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi/\sigma_1} \left(1 - \frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q} \Phi_1(\pi/\sigma_1).$$

При этом, как вытекает из результатов работы [89, 90],

$$\overline{d}_\nu(B_{\sigma_1,2} \cap \mathbb{B}L_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1.$$

Согласно теореме Винера – Пэли [67, с.66], произвольный элемент $g_{\sigma_1} \in B_{\sigma_1,2}$ представим в следующем виде:

$$g_{\sigma_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} e^{ixt} \varphi(t) dt.$$

Имеет место равенство

$$\|g_{\sigma_1}\|^2 = \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |\varphi(t)|^2 dt := \|\varphi\|^2_{L_2[-\sigma_1,\sigma_1]}.$$

Поскольку

$$\Delta^m_{\overline{h}}(g_{\sigma_1}, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} e^{ixt} \prod_{j=1}^{m} (e^{ih_j t} - 1) \varphi(t) dt,$$

то мы получаем

$$\|\Delta^m_{\overline{h}} g_{\sigma_1}(\cdot)\|^2 = 2^m \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \prod_{j=1}^{m} (1 - \cos h_j t) |\varphi(t)|^2 dt. \tag{2.2.7}$$

Из (2.2.7), согласно определению величины (2.1.3) с учётом равенства (2.2.2), имеем

$$\Omega_m(g_{\sigma_1}, u)_2 = \left\{ \frac{2^m}{u^m} \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \left(\prod_{j=1}^{m} \int\limits_0^u (1 - \cos h_j t) dh_j \right) |\varphi(t)|^2 dt \right\}^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2} \left\{ \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \left(1 - \frac{\sin ut}{ut} \right)^m |\varphi(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{m/2} \left(1 - \frac{\sin \sigma_1 u}{\sigma_1 u} \right)^{m/2} \|g_{\sigma_1}\|^2. \tag{2.2.8}$$

Используя известное неравенство [100, с.137]

$$\|g^{(r)}_{\sigma_1}\| \leq \sigma_1^r \|g_{\sigma_1}\|,$$

верное для любого $g_{\sigma_1} \in B_{\sigma_1,2}$, из (2.2.8) получаем

$$\Omega_m(g_{\sigma_1}^{(r)}, u)_2 \le 2^{m/2}\sigma_1^r \left(1 - \frac{\sin\sigma_1 u}{\sigma_1 u}\right)_*^{m/2} \|g_{\sigma_1}\|. \tag{2.2.9}$$

Покажем, что шар S_{σ_1,ρ_1} принадлежит классу $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1)$. С этой целью обе части неравенства (2.2.9) возведём в степень $q\,(0 < q \le 2)$ и проинтегрируем по u в пределах от 0 до h :

$$\int_0^h \Omega_m^q(g_{\sigma_1}^{(r)}, u)_2 du \le 2^{mq/2}\sigma_1^{rq}\|g_{\sigma_1}\|^q \int_0^h \left(1 - \frac{\sin\sigma_1 u}{\sigma_1 u}\right)_*^{mq/2} du. \tag{2.2.10}$$

Учитывая, что $g_{\sigma_1} \in S_{\sigma_1,\rho_1}$, из (2.2.10) получаем

$$\int_0^h \Omega_m^q(g_{\sigma_1}^{(r)}, u)_2 du \le \frac{\displaystyle\int_0^h \left(1 - \frac{\sin\sigma_1 u}{\sigma_1 u}\right)_*^{mq/2} du}{\displaystyle\int_0^{\pi/\sigma_1} \left(1 - \frac{\sin\sigma_1 u}{\sigma_1 u}\right)^{mq/2} du} \Phi_1^q\left(\frac{\pi}{\sigma_1}\right). \tag{2.2.11}$$

Сделаем в правой части (2.2.11) замену переменной $\sigma_1 u = v$:

$$\int_0^h \Omega_m^q(g_{\sigma_1}^{(r)}, u)_2 du \le \frac{\displaystyle\int_0^{\sigma_1 h} \left(1 - \frac{\sin v}{v}\right)_*^{mq/2} dv}{\displaystyle\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin v}{v}\right)^{mq/2} dv} \Phi_1^q\left(\frac{\pi}{\sigma_1}\right). \tag{2.2.12}$$

Полагая $\pi/h\sigma_1 = 1/\mu$, из (2.2.12) и ограничения (2.2.3) получаем

$$\int_0^h \Omega_m^q(g_{\sigma_1}^{(r)}, u)_2 du \le \frac{\displaystyle\int_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin v}{v}\right)_*^{mq/2} dv}{\displaystyle\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin v}{v}\right)^{mq/2} dv} \Phi_1^q\left(\frac{h}{\mu}\right) \le \Phi_1^q(h),$$

а это означает, что $S_{\sigma_1,\rho_1} \subset W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1)$. Воспользовавшись определением ν-поперечника по Бернштейну, запишем

$$\overline{b}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1),\, L_2(\mathbb{R})) \ge \overline{b}_\nu(S_{\sigma_1,\rho_1}, L_2(\mathbb{R})) \ge$$

$$\geq \frac{\Phi_1(1/\nu(1+\varepsilon))(\nu(1+\varepsilon))^{-r}}{2^{m/2}\pi^r\left(\int\limits_0^{1/(\nu(1+\varepsilon))}\left(1-\frac{\sin\nu\pi(1+\varepsilon)t}{\nu\pi(1+\varepsilon)t}\right)^{mq/2}dt\right)^{1/q}}. \tag{2.2.13}$$

Левая часть неравенства (2.2.13) не зависит от $\varepsilon > 0$, которое в силу нашего выбора является произвольным числом. Устремляя ε к нулю, из (2.2.13) имеем

$$\overline{b}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1),\,L_2(\mathbb{R})) \geq$$

$$\geq 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r}\left(\int\limits_0^{1/\nu}\left(1-\frac{\sin\nu\pi t}{\nu\pi t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right) =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{2.2.14}$$

Сопоставляя неравенства (2.2.6) и (2.2.14), с учётом соотношений (2.2.1) получаем равенство (2.2.4). Теорема 2.2.1 доказана.

Условие (2.2.3) теоремы 2.2.1 выглядит неестественным. Однако это не так. Покажем, что среди степенных функций $\Phi_1^*(u) = u^{\alpha/q}$, возрастающих на положительной полуоси, существует та, для которой выполняется неравенство (2.2.3) при любых значениях $\mu > 0$, $h \in (0,\pi]$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Для того, чтобы неравенство (2.2.3) имело место с любыми заданными* $\mu > 0,\ 0 < h \leq \pi,\ m, r \in \mathbb{N},\ 0 < q \leq 2$, *необходимо и достаточно, чтобы число* $\alpha = \alpha(m,q)$ *определялось по формуле*

$$\alpha = \pi\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right\}^{-1}. \tag{2.2.15}$$

Доказательство. Покажем, что функция $\Phi_1^*(t) = t^{\alpha/q}$, где α определяется из (2.2.15), удовлетворяет ограничению (2.2.3).

Для нахождения границы числа $\alpha := \alpha(m, q)$ воспользуемся следующим элементарным неравенством [106, с.129,132]

$$\left(\frac{t}{\pi}\right)^{mq} \leq \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} \leq \left(\frac{t}{\pi}\right)^{mq/2}, \tag{2.2.16}$$

верным для всех $0 \leq t \leq \pi$, Используя левую часть неравенства (2.2.16), с одной стороны имеем

$$\alpha = \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt} \leq \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}\right)^{mq} dt} = \frac{1}{\int\limits_0^1 t^{mq} dt} = mq + 1,$$

а с другой стороны, пользуясь правой частью (2.2.16), получаем

$$\alpha = \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt} \geq \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}\right)^{mq/2} dt} = \frac{1}{\int\limits_0^1 t^{mq/2} dt} = \frac{mq}{2} + 1,$$

откуда

$$\frac{mq}{2} + 1 \leq \alpha \leq mq + 1. \tag{2.2.17}$$

Подставляя Φ_1^* в (2.2.3), получим следующее неравенство:

$$\mu^\alpha \geq \int\limits_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2} dt \left(\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1}. \tag{2.2.18}$$

С учётом (2.2.15), неравенство (2.2.18) примет вид

$$\frac{\pi}{\alpha}\mu^\alpha \geq \int\limits_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2} dt, \quad 0 \leq \mu < +\infty.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \frac{\pi}{\alpha}\mu^\alpha - \int\limits_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2} dt \tag{2.2.19}$$

и покажем, что для всех $\mu \in [0, +\infty)$ функция $\varphi(\mu) \geq 0$. Рассуждения проведём для трёх случаев: $0 \leq \mu \leq 1, \quad 1 < \mu \leq t_*/\pi, \quad t_*/\pi < \mu < +\infty$.

Пусть сначала $0 \leq \mu \leq 1$. В силу первого замечательного предела условимся, что при $t = 0$ функция $\sin t/t$ принимает значение, равное 1.

Запишем функцию φ в окрестности нуля

$$\varphi(\mu) = \frac{\pi}{\alpha}\mu^\alpha \left[1 - \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{mq/2} \cdot \frac{2}{mq+1} O(\mu^{mq+1-\alpha})\right]. \tag{2.2.20}$$

Из (2.2.20) в связи с неравенством (2.2.17) следует, что в бесконечно малой окрестности нуля функция φ является положительной. Покажем, что на интервале $(0, 1)$ функция φ знакопостоянна. Рассуждая методом от противного, предположим, что существует точка $\xi \in (0, 1)$, в которой функция φ меняет знак. Поскольку из (2.2.19) следует, что $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, в силу теоремы Ролля заключаем, что производная

$$\varphi'(\mu) = \pi \left[\mu^{\alpha-1} - \left(1 - \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu}\right)^{mq/2}\right] \tag{2.2.21}$$

должна иметь не менее двух различных нулей на интервале $(0, 1)$ и, кроме того, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. Ясно, что столько же нулей, как следует из (2.2.21) на интервале $(0, 1)$, имеет функция

$$\varphi_*(\mu) = \mu^{2(\alpha-1)/mq} - 1 + \frac{\sin \mu\pi}{\pi\mu} := \frac{1}{\pi\mu}\varphi_1(\mu), \tag{2.2.22}$$

или, что то же,

$$\varphi_1(\mu) = \pi\mu^{2(\alpha-1)/mq+1} - \pi\mu + \sin \pi\mu. \tag{2.2.23}$$

С учётом вышесказанного из (2.2.23) имеем $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0$. Следовательно, функция φ_1 должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее четырёх разделённых нулей. Но тогда, из той же теоремы Ролля следует, что производная

$$\varphi_1'(\mu) = \pi[2(\alpha-1)/mq + 1]\mu^{2(\alpha-1)/mq} - \pi + \pi \cos \pi\mu \tag{2.2.24}$$

на интервале $(0,1)$ должна иметь не менее трёх нулей и, как следует из (2.2.24) и левой части неравенства (2.2.17), ещё $\varphi_1'(0) = 0$. Но это значит, что вторая производная

$$\varphi_1''(\mu) = \pi[2(\alpha-1)/mq+1](2(\alpha-1)/mq)\mu^{2(\alpha-1)/mq-1} - \pi^2 \sin \pi\mu \qquad (2.2.25)$$

обязана обращаться в нуль на интервале $(0,1)$ не менее, чем в трёх различных точках и так как из левой части неравенства (2.2.17) вытекает, что

$$2(\alpha-1)/(mq) - 1 > 0,$$

то имеем также $\varphi''(0) = 0$, а потому производная третьего порядка

$$\varphi_1'''(\mu) = \pi[2(\alpha-1)/(mq)+1](2(\alpha-1)/mq)[2(\alpha-1)/(mq)-1]\mu^{2(\alpha-1)/(mq)-2} -$$
$$-\pi^3 \cos \pi\mu \qquad (2.2.26)$$

внутри интервала $(0,1)$ обязана иметь не менее трёх разделённых нулей. Из формулы (2.2.26) следует, что производная $\varphi_1'''(\mu)$ на интервале $(0,1)$ является разностью двух функций, первая из которых принимает лишь положительные значения и является выпуклой вверх, а вторая является убывающей и выпуклой вверх и положительной на интервале $(0,1/2)$ и отрицательной и выпуклой вниз на интервале $(1/2,1)$. Из геометрических соображений ясно, что вторая производная $\varphi_1''(\mu)$ на интервале $(0,1)$ не может иметь более двух нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость соотношения (2.2.18) в случае a).

Переходя к рассмотрению случая б), заметим, что, как следует из (2.2.25), при $\mu \in (1, t_*/\pi]$, функция $\varphi_1''(\mu)$ на этом интервале принимает только положительное значение, а следовательно, $\varphi_1'(\mu)$ – монотонно возрастающая функция на $(1, t_*/\pi]$. Поскольку в силу (2.2.24)

$$\varphi_1'(1) = \pi(2(\alpha-1)/mq - 1) > 0,$$

то $\varphi_1'(\mu) > 0$ для любого $\mu \in [1, t_*/\pi]$. Из равенства (2.2.23) имеем $\varphi_1(1) = 0$, что и означает неотрицательность функции $\varphi_1(\mu)$ на отрезке $[1, t_*/\pi]$. Учитывая соотношения (2.2.21) – (2.2.23), заключаем, что производная $\varphi'(\mu) \geq 0$, когда $1 \leq \mu \leq t_*/\pi$. Так как $\varphi(1) = 0$, то в рассматриваемом случае $\varphi(\mu) \geq 0$ на всём отрезке $[1, t_*/\pi]$, что и означает выполнение неравенства (2.2.18) в случае б).

Наконец, пусть $t_*/\pi \leq \mu < +\infty$. Используя соотношение (2.2.2), из (2.2.19) получаем

$$\varphi(\mu) = \frac{\pi}{\alpha}\mu^{\alpha} - \int\limits_0^{t_*} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt - (\mu\pi - t_*)\left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mq/2}.$$

Отсюда имеем

$$\varphi'(\mu) = \pi \left[\mu^{\alpha-1} - \left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mq/2}\right] > 0, \quad \mu \in [t_*/\pi;\ +\infty).$$

Это означает, что на рассматриваемом множестве точек $t_*/\pi \leq \mu < +\infty$ неравенство (2.2.18) также выполняется. Теорема 2.2.2 полностью доказана.

Из доказанной теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *Если для всех* $\mu > 0$, $0 < h \leq \pi$, $m \in \mathbb{N}$ *мажоранта* $\Phi_1(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(h/\mu)}\right)^{2/m} \geq (\pi - Si(\pi))^{-1} \int\limits_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* dt, \tag{2.2.27}$$

где $Si(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin x}{x} dx$ *– интегральный синус, то при всех* $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq m/2$ *и* $\nu > 0$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_{\nu}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\, \Phi_1), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\, \Phi_1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\, \Phi_1); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+m/2}\,(\pi - Si(\pi))^{-m/2}\,\Phi_1(1/\nu).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi})$, *где* $\Lambda^*_{\nu\pi}$ *определяется из условия*

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi} f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot) F(f, \cdot),$$

(F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi, \nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$.

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (2.2.27), не пусто. Условию (2.2.27) удовлетворяет, например, функция

$$\Phi_1^*(h) = h^{\alpha m/2},\ m \in \mathbb{N},\ \alpha = \pi/(\pi - Si(\pi)).$$

Отметим, что доказанная теорема 2.2.1 может быть обобщена следующим образом.

Теорема 2.2.3. *Если для любого $\lambda \in (0,1]$ и для всех $\mu > 0$, $0 < h \le \pi$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$ мажоранта $\Phi_1(u)$ удовлетворяет условию*

$$\Phi_1^q\left(\frac{\lambda}{\mu}h\right)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2}dt \le \Phi_1^q(h)\int\limits_0^{\lambda\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt,$$

то для любого $\nu > 0$ имеют место равенства

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_1); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^{\lambda\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_1(\lambda/\nu).$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi})$, где $\Lambda^*_{\nu\pi}$ определяется из условия

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi}f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f, \cdot),$$

(F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi, \nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\Phi_1), L_2(\mathbb{R}))$.

Доказательство теоремы 2.2.3 не приводим, поскольку в идейном отношении повторяет схему доказательства аналогичной теоремы 2.2.1.

Теорема 2.2.4. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < q \le 2$ и мажоранта $\Phi_2(u)$ при любых значениях $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/\sigma)}\right)^q \ge \frac{\pi}{\sigma h}\left\{\int\limits_0^{\sigma h}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2}dt\right\}\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right\}^{-1}. \tag{2.2.28}$$

Тогда для любого $\nu > 0$ имеют место равенства

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_2(1/\nu). \tag{2.2.29}$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi})$, где $\Lambda^*_{\nu\pi}$ определяется из условия

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi}f,\cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f,\cdot),$$

(F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi,\nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2), L_2(\mathbb{R}))$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2), L_2(\mathbb{R}))$.

Доказательство. Доказательство теоремы 2.2.4 в общих чертах повторяет схему доказательство теоремы 2.2.1, а потому мы приводим основные отличительные моменты доказательства. Из неравенства (2.1.14) для произвольного $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеем

$$A_\sigma(f)_2 \le 2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)},t)_2dt\right)^{1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2)$, при $h = \pi/\sigma$ получаем оценку сверху на указанном классе функций

$$\mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2))_{L_2(\mathbb{R})} \le$$

$$\leq 2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\sigma}\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_2(\pi/\sigma)=$$

$$=2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_2(\pi/\sigma). \qquad (2.2.30)$$

Так как согласно [89] средняя размерность

$$\overline{dim}(B_{\nu\pi,2};L_2(\mathbb{R}))=\nu,$$

то из (2.2.30), где $\sigma=\nu\pi$, с учётом определения класса $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2)$ получаем оценку для всех ν-поперечников

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2),\,L_2(\mathbb{R}))=$$

$$=\mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2);(L_2(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})}=A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2))_{L_2(\mathbb{R})}\leq$$

$$\leq 2^{-m/2}(\nu\pi)^{-r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_2(1/\nu). \qquad (2.2.31)$$

Установим оценку снизу рассматриваемой характеристики, использовав соотношения между ν-поперечниками (2.2.1) и оценив снизу бернштейновский ν-поперечник $\overline{b}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2);\,L_2(\mathbb{R}))$. С этой целью, положив $\sigma_1:=\nu\pi(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ – произвольное число, вводим в рассмотрение шар

$$S^*_{\sigma_1,\rho_*}:=B_{\sigma_1,2}\cap\rho_*\,\mathbb{B}L_2(\mathbb{R})=\left\{g_{\sigma_1}\in B_{\sigma_1,2}:\ \|g_{\sigma_1}\|\leq\rho_*\right\}$$

радиуса

$$\rho_*=2^{-m/2}\sigma_1^{-r}\left(\frac{\sigma_1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\sigma_1}\left(1-\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_2(\pi/\sigma_1)=$$

$$=2^{-m/2}(\nu\pi(1+\varepsilon))^{-r}\left(\nu(1+\varepsilon)\int\limits_0^{1/\nu(1+\varepsilon)}\left(1-\frac{\sin\nu\pi(1+\varepsilon)t}{\nu\pi(1+\varepsilon)t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\cdot$$

$$\cdot\Phi_2\left(\frac{1}{\nu(1+\varepsilon)}\right):=\rho_*(\varepsilon).$$

Как и при доказательстве теоремы 2.2.1, проделав все необходимые выкладки, для любого $g_{\sigma_1}\in B_{\sigma_1,2}$ получаем

$$\Omega_m(g_{\sigma_1}^{(r)},t)_2\le 2^{m/2}\sigma_1^r\left(1-\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right)_*^{m/2}\|g_{\sigma_1}\|. \qquad (2.2.32)$$

Из (2.2.32) и условия (2.2.28) будем иметь

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^q(g_{\sigma_1}^{(r)},t)_2dt\le 2^{mq/2}\sigma_1^{rq}\|g_{\sigma_1}\|^q\,\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right)_*^{mq/2}dt=$$

$$=2^{mq/2}\sigma_1^{rq}\|g_{\sigma_1}\|^q\,\frac{1}{\sigma_1 h}\int\limits_0^{\sigma_1 h}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2}dt\le$$

$$\le\frac{\pi}{\sigma_1 h}\int\limits_0^{\sigma_1 h}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2}dt\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right\}^{-1}\Phi_2^q\left(\frac{\pi}{\sigma_1}\right)\le\Phi_2^q(h),$$

которое означает, что $S_{\sigma_1,\rho_*}^*\subset W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2)$. Используя определение бернштейновского ν-поперечника, запишем

$$\overline{b}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\Phi_2),\,L_2(\mathbb{R}))\ge\overline{b}_\nu(S_{\sigma_1,\rho_*}^*,L_2(\mathbb{R}))\ge$$

$$\ge\sup\Big\{\rho_*(\varepsilon):\ \varepsilon>0\Big\}=\rho_*(0)\overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=}2^{-m/2}(\nu\pi)^{-r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_2(1/\nu). \qquad (2.2.33)$$

Сравнивая соотношения (2.2.31) и (2.2.33), получаем требуемые равенства (2.2.29). Покажем, что существует мажорантная функция, удовлетворяющая условию (2.2.28). Положим

$$\Phi_2^*(t)=t^{\alpha/q},\quad \text{где}\quad \alpha=\pi\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right\}^{-1}-1.$$

Очевидно, что $mq/2 \le \alpha \le mq$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$. Тот факт, что функция $\Phi_2(t)$ удовлетворяет ограничениям (2.2.28), получаем повторением аналогичного факта неравенства (2.2.18) с заменой α на $\alpha+1$, чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.4.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.5. *Если для всех* $\mu > 0$, $0 < h < \pi$, $q = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ *мажоранта* Φ_3 *удовлетворяет условию*

$$\left\{\frac{\Phi_3(h)}{\Phi_3(h/\mu)}\right\}^{2/m} \ge \frac{8}{\pi^2-8}\cdot\frac{1}{\mu^2}\int\limits_0^{\mu\pi/2} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* dt, \qquad (2.2.34)$$

то для любого $r \in \mathbb{Z}_+$, $\nu > 0$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_3), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_3))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_\nu\Big(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_3); (L^{(r)}_2(\mathbb{R}),\Lambda)\Big) =$$

$$= 2^{-m/2}(\nu\pi)^{-r}\left(\pi^2/(\pi^2-8)\right)^{m/2}\Phi_3\left(1/(2\nu)\right). \qquad (2.2.35)$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}),\Lambda^*_{\nu\pi})$, *где* $\Lambda^*_{\nu\pi}$ *определяется из условия*

$$F(\Lambda^*_{\nu\pi}f,\cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f,\cdot)$$

(F *– преобразование Фурье в* $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ *– характеристическая функция интервала* $(-\nu\pi,\nu\pi)$*), будет экстремальной для среднего линейного поперечника* $\overline{\delta}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_3)$, *а пространство* $B_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_3)$.

Доказательство. Для произвольной $f \in L^{(r)}_2$ из равенства (2.2.11) вытекает неравенство

$$\frac{2^{m/2}A_\sigma(f)_2}{\left(\int\limits_0^h t\,\Omega^q_m(f^{(r)};t)dt\right)^{1/q}} \le \sigma^{-r}\left(\int\limits_0^h t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q},$$

или, что тоже самое,

$$A_\sigma(f)_2 \leq \frac{\left(\int\limits_0^h t\,\Omega_m^q(f^{(r)};t)dt\right)^{1/q}}{2^{m/2}\sigma^r\left(\int\limits_0^h t\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{mq/2}dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^q(f^{(r)};t)dt\right)^{1/q}}{2^{m/2}\sigma^r\left(\frac{2}{(\sigma h)^2}\int\limits_0^{\sigma h} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{1/q}}.$$

Откуда, с учётом определения класса $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3)$, получаем

$$A_\sigma(W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3))_2 \leq 2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\frac{2}{(\sigma h)^2}\int\limits_0^{\sigma h} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_3(h).$$

В этом неравенстве, полагая $\sigma h = \pi/2$, $q = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$A_\sigma(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3))_2 \leq 2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\frac{8}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)dt\right)^{-m/2}\Phi\left(\frac{\pi}{2\sigma}\right) =$$

$$= 2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)^{m/2}\Phi_3\left(\frac{\pi}{2\sigma}\right). \qquad (2.2.36)$$

Имея ввиду, что $\overline{dim}(B_{\nu\pi,2};L_2(\mathbb{R})) = \nu$ [89], из (2.2.36) при $\sigma = \nu\pi$, с учётом определения класса $W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3)$, получаем оценку сверху среднего линейного поперечника

$$\overline{\delta}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3);L_2(\mathbb{R})) \leq \mathcal{E}_\nu\Big(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3);(L_2^{(r)}(\mathbb{R}),\Lambda)\Big) =$$

$$= A_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_3))_{L_2(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq 2^{-m/2}(\nu\pi)^{-r}\left(\pi^2/(\pi^2-8)\right)^{m/2}\Phi_3\left(1/(2\nu)\right). \qquad (2.2.37)$$

Получим оценку снизу для среднего ν-поперечника по Бернштейну класса $W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_3)$. Для этого положим $\sigma_1 \overset{def}{=} \nu\pi(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное число, и рассмотрим шар

$$S_{\sigma_1,\rho_1^*} \overset{def}{=} B_{\sigma_1,2} \cap \rho_1^*\,\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}) = \left\{g_{\sigma_1} \in B_{\sigma_1,2} : \|g_{\sigma_1}\| \leq \rho_1^*\right\}$$

радиуса

$$\rho_1^* = 2^{-m/2}\sigma_1^{-r}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)^{m/2}\Phi_3\left(\frac{\pi}{2\sigma_1}\right).$$

Из результатов работ [89, 90] вытекает, что

$$\overline{d}_\nu(B_{\sigma_1,2} \cap \mathbb{B}L_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1.$$

Рассмотрим произвольный элемент $g_{\sigma_1} \in B_{\sigma_1,2}$, который представим в виде

$$g_{\sigma_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} e^{ixt}\varphi(t)dt.$$

Используя неравенство

$$\Omega_m(g^{(r)}_{\sigma_1},\tau)_2 \leq 2^{m/2}\sigma_1^r\left(1-\frac{\sin\sigma_1\tau}{\sigma_1\tau}\right)^{m/2}_{*}\|g_{\sigma_1}\|, \qquad (2.2.38)$$

доказанное нами в работе [163], покажем, что шар S_{σ_1,ρ_1^*} принадлежит классу $W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_3)$. С этой целью обе части неравенства (2.2.38) возведём в степень $2/m$, умножив на τ и проинтегрировав по τ от 0 до h, получим

$$\int\limits_0^h \tau\Omega_m^{2/m}(g^{(r)}_{\sigma_1},\tau)d\tau \leq 2\sigma_1^{2r/m}\|g_{\sigma_1}\|_2^{2/m}\int\limits_0^h \tau\left(1-\frac{\sin\sigma_1\tau}{\sigma_1\tau}\right)_{*}d\tau. \qquad (2.2.39)$$

Учитывая, что $g_{\sigma_1} \in S_{\sigma_1,\rho_1^*}$, из (2.2.39) имеем

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h \tau\Omega_m^{2/m}(g^{(r)}_{\sigma_1};\tau)d\tau \leq$$

$$\leq \frac{2}{h^2}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)\Phi_3^{2/m}\left(\frac{\pi}{2\sigma_1}\right)\int\limits_0^h \tau\left(1-\frac{\sin\sigma_1\tau}{\sigma_1\tau}\right)_* d\tau. \qquad (2.2.40)$$

Произведя замену переменной $\sigma_1 u = t$ в правой части (2.2.40), находим

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h \tau\Omega_m^{2/m}(g_{\sigma_1}^{(r)};\tau)d\tau \leq$$

$$\leq \frac{2}{(\sigma_1 h)^2}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)\Phi_3^{2/m}\left(\frac{\pi}{2\sigma_1}\right)\int\limits_0^{\sigma_1 h} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* dt. \qquad (2.2.41)$$

Полагая $\sigma_1 h = \mu\pi/2$, из неравенства (2.2.41) и ограничения (2.2.34) получаем

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h \tau\Omega_m^{2/m}(g_{\sigma_1}^{(r)};\tau)d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{8}{\pi^2-8}\right)\Phi_3^{2/m}\left(\frac{h}{\mu}\right)\int\limits_0^{\mu\pi/2} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* dt \leq \Phi_3^{2/m}(h),$$

а это означает, что $S_{\sigma_1,\rho_1^*} \subset W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3)$. Воспользовавшись определением ν-поперечника по Бернштейну, запишем

$$\overline{b}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3);L_2(\mathbb{R})) \geq \overline{b}_\nu(S_{\sigma_1,\rho_1^*};L_2(\mathbb{R})) \geq$$

$$\geq 2^{-m/2}(\pi\nu(1+\varepsilon))^{-r}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)^{m/2}\Phi_3\left(\frac{1}{2\nu(1+\varepsilon)}\right). \qquad (2.2.42)$$

Так как левая часть неравенства (2.2.42) не зависит от $\varepsilon > 0$, то, устремляя ε к нулю, из (2.2.42) будем иметь

$$\overline{b}_\nu(W_{2/m}^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3);L_2(\mathbb{R})) \geq 2^{-m/2}(\nu\pi)^{-r}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)^{m/2}\Phi_3\left(\frac{1}{2\nu}\right). \qquad (2.2.43)$$

Сопоставляя неравенства (2.2.37) и (2.2.43), с учётом соотношений (2.2.1) получаем требуемое равенство (2.2.35). Элементарное вычисление показывает, что функция $\Phi_3^*(t) = t^{\alpha m/2}$, где $\alpha = 4(4-\pi)/(\pi^2-8)$, удовлетворяет ограничению (2.2.34) при любом $\sigma > \nu\pi$, чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.5.

Приведём одно общее утверждение для класса функций $W_q^{(r)}(\Omega_m;\psi)$, зависящее от произвольной суммируемой не эквивалентной нулю на $(0,\pi]$ $(0 < h < \pi)$ функции ψ.

Теорема 2.2.6. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < q \le 2$ и число h $(0 < h \le 3\pi/4)$ удовлетворяет условию $\sigma h \in t_*$. Тогда для любого $\nu > 0$ имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}^*))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} \psi(t/\pi\nu)dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.2.44)$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}^*)$, где $\Lambda_{\nu\pi}^*$ определяется из условия

$$F(\Lambda_{\nu\pi}^* f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f, \cdot),$$

(F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi, \nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi), L_2(\mathbb{R}))$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi), L_2(\mathbb{R}))$.

Доказательство. Из равенства (2.1.22) для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $0 < h \le 3\pi/4$ будем иметь неравенство

$$A_\sigma(f)_2 \le$$

$$\le 2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}, t)_2\,\psi(t)dt\right)^{1/q}\left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{mq/2}\psi(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.2.45)$$

Учитывая определение класса $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi)$, из неравенства (2.2.45) получаем оценку сверху для всех перечисленных выше ν-поперечников

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi), L_2(\mathbb{R})) \le A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}\psi(t/\pi\nu)dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.2.46)$$

С целью получения оценки снизу средних ν-поперечников класса $W_q^{(r)}(\Omega_m;\,\psi)$ введём в рассмотрение шар

$$S^*_{\sigma,\rho_0} \overset{def}{=} B_{\sigma,2}\cap\rho_0\,\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}) = \Big\{g_\sigma\in B_{\sigma,2}:\ \|g_\sigma\|\le\rho_0\Big\}$$

радиуса

$$\rho_0 = 2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{mq/2}\psi(t)dt\right)^{-1/q}.$$

При этом

$$\overline{d}_\nu(B_{\pi\nu,2}\cap\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1.$$

Проделав все необходимые выкладки как и в предыдущих теоремах, для любого $g_\sigma\in B_{\sigma,2}$ в силу ограничения $\sigma h\le t_*$ получаем

$$\Omega_m(g_\sigma^{(r)},\tau)_2 \le 2^{m/2}\sigma^r\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{m/2}\|g_\sigma\|. \qquad (2.2.47)$$

Пользуясь неравенством (2.2.47), легко показать, что $S^*_{\sigma,\rho_0}\subset W_m^{(r)}(\Omega_m;\psi)$. Возведя обе части неравенства (2.2.47) в степень q $(0<q\le 2)$ и умножая на неотрицательную суммируемую функцию ψ, затем проинтегрировав по переменному t в пределах от $t=0$ до $t=h$, получаем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^q(g_\sigma^{(r)};t)_2\,\psi(t)dt \le 2^{mq/2}\sigma^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{mq/2}\psi(t)dt\,\|g_\sigma\|_2^q\le 1.$$

Последнее неравенство означает, что $S^*_{\sigma,\rho_0} \subset W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\psi)$, а потому, согласно определению ν-поперечника Бернштейна, запишем

$$\overline{b}_\nu(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\psi),\,L_2(\mathbb{R})) \geq \overline{b}_\nu(S^*_{\sigma,\rho_0}, L_2(\mathbb{R})) =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r}\left(\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin\nu\pi t}{\nu\pi t}\right)^{mq/2}\psi(t)dt\right)^{-1/q}.$$

В последнем неравенстве, полагая $h=\pi/\sigma,\ \sigma=\pi\nu$, получаем

$$\overline{b}_\nu(W^{(r)}_q(\Omega_m;\,\psi),\,L_2(\mathbb{R})) \geq$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}\psi(t/\pi\nu)dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.2.48)$$

Сравнивая неравенства (2.2.46) и (2.2.48), получаем требуемое равенство (2.2.44). Теорема 2.2.6 доказана.

Следствие 2.2.2. *При выполнении всех условий теоремы 2.2.6, когда* $\psi(t)\equiv 1$ *и* $\psi(t)\equiv t$, *соответственно при* $r\geq m/2$, $m\in\mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\overline{\pi}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,1), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,1); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r-m/2}\Big(\nu\pi h - Si(\nu\pi h)\Big)^{-m/2},$$

$$\overline{\pi}_\nu(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,t), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,t))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\,t); (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi}))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= (\pi\nu)^{-r-m}\Big[(\nu\pi h)^2 - 2(1-\cos\nu\pi h)\Big]^{-m/2}.$$

В завершение этого параграфа рассмотрим задачу отыскания точных значений верхних граней наилучших приближений $A_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}$ ($r \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, \ldots, r$) на рассмотренных классах функций $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_i)$ ($i = 1, 2, 3$), определяемых заданными мажорантными функциями Φ_i ($i = 1, 2, 3$).

Теорема 2.2.7. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.1, $r \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $s = 0, 1, \ldots, r$. Тогда имеют место равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)\Big\} =$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s+1/q}\left(\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q} \Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right). \qquad (2.2.49)$$

Доказательство. Полагая в равенстве (2.2.5) $h = \pi/\sigma$ и подбирая число $\nu \in \mathbb{R}_+$ так, чтобы имело место $\sigma = \nu\pi$, с учётом определения класса $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)$ получаем оценку сверху

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)\Big\} \leq$$

$$\leq 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s+1/q}\left(\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q} \Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right). \qquad (2.2.50)$$

Нам остаётся получить аналогичную оценку снизу для выражения, заданного в левой части равенства (2.2.49). С этой целью рассмотрим функцию

$$g_{\varepsilon_*}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\sin(\sigma + \varepsilon_*)x}{x} - \frac{\sin \sigma x}{x}\right\}, \quad \varepsilon_* > 0$$

экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon_*$, рассмотренную нами при доказательстве теоремы 2.1.1. Если полагать $\varepsilon_* = \nu\pi\varepsilon$, то мы имеем

$$\sigma + \varepsilon_* = \nu\pi(1 + \varepsilon) = \sigma_*. \qquad (2.2.51)$$

Поскольку по тереме Винера – Пэли

$$\|g_{\varepsilon_*}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = 2\int\limits_\sigma^{\sigma+\varepsilon_*} |\mathcal{F}(g_{\varepsilon_*}; \tau)|^2 d\tau = 2\varepsilon_*, \qquad (2.2.52)$$

то, как следует из равенства

$$\rho_* = 2^{-m/2}\sigma_*^{-s}\left(\int\limits_0^{\sigma_* h}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_1(h) \tag{2.2.53}$$

и формул (2.2.51) и (2.2.52), целая функция

$$\widetilde{g}_{\varepsilon_*}(x) := \frac{\rho_*}{\sqrt{2\varepsilon_*}}\, g_{\varepsilon_*}(x) \tag{2.2.54}$$

является элементом шара

$$\mathcal{B}_{\sigma_*}(\rho_*) = \Big\{\, g_{\varepsilon_*} \in \mathcal{B}_{\sigma,2}:\ \|g_{\varepsilon_*}\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \rho_* \Big\},$$

который, как легко проверить, принадлежит классу $W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)$.

Используя неравенство

$$A_\sigma(g_\varepsilon^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})} \ge \sqrt{2\varepsilon}\,\sigma^{r-s},$$

доказанное нами в параграфе 2.1 (формула (2.1.39) и (2.2.54), сразу получаем

$$A_\sigma(\widetilde{g}_{\varepsilon_*}^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})} \ge \rho_*(\pi\nu)^{r-s.} \tag{2.2.55}$$

Учитывая неравенство (2.2.55), равенства (2.2.53) и (2.2.51), имеем

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)\Big\} \ge A_{\nu\pi}(\widetilde{g}_{\varepsilon_*}^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})} \ge$$

$$\ge 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s+1/q}\left((1+\varepsilon)\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{2.2.56}$$

В неравенстве (2.2.56) от ε зависит только правая часть. Поэтому, вычисляя верхнюю грань по всем $\varepsilon > 0$, от её правой части, будем иметь

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1)\Big\} \ge$$

$$\ge 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s+1/q}\left(\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{2.2.57}$$

Сопоставляя оценку сверху (2.2.50) и оценку снизу (2.2.57), приходим к требуемому равенству (2.2.49). Теорема 2.2.7 доказана.

Следствие 2.2.3. *В условиях теоремы 2.2.7 имеют место равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f\in W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_1)\Big\}=$$

$$=2^{-m/2}\,\pi^{-s}\nu^{-s+m/2}\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)^{-m/2}\Phi_1\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

По вышеприведённой схеме доказательства теоремы 2.2.7 также доказываются следующие утверждения.

Теорема 2.2.8. *При выполнении всех условий теоремы 2.2.4, для любых $r\in\mathbb{N}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$ и $s=0,1,\ldots,r$ справедливы равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f\in W^{(r)}_{q}(\Omega_m;\Phi_2)\Big\}=$$

$$=2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi_2\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

и, в частности, при $q=2/m$, имеем

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f\in W^{(r)}_{2/m}(\Omega_m;\Phi_2)\Big\}=$$

$$=2^{-m/2}(\pi\nu)^{-s}\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)^{-m/2}\Phi_2\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Теорема 2.2.9. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.5. Тогда для любых $r\in\mathbb{N}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$ и $s=0,1,\ldots,r$ выполняются равенства*

$$\sup\Big\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}:\ f\in W^{(r)}_{q}(\Omega_m;\Phi_3)\Big\}=$$

$$=2^{-m/2}(\nu\pi)^{-s}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)^{m/2}\Phi_3\left(\frac{1}{2\nu}\right).$$

ГЛАВА III

ПОПЕРЕЧНИКИ МНОЖЕСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ И НАИЛУЧШИЕ ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

К настоящему времени в задаче отыскания точных значений n-поперечников классов аналитических в круге функций в различных банаховых пространствах получен ряд окончательных результатов. Следует отметить, что первые результаты, связанные с вычислением точных значений колмогоровских n-поперечников в пространстве Харди H_q, $1 \leq q \leq \infty$, принадлежат В.М.Тихомирову [131] (случай $q = \infty$) и Л.В.Тайкову [121] (случай $1 \leq q < \infty$). Работы В.М.Тихомирова и Л.В.Тайкова базируются на основополагающего результата К.И.Бабенко [14], в котором был получен линейный метод аппроксимации одного класса функций, аналитических в единичном круге функций, пригодный для оценок n-поперечников сверху и, использованный позднее многими другими математиками. Развивая эту тематику, Л.В.Тайков [122, 124], Н.Айнуллоев и Л.В.Тайков [5] получили точные значения колмогоровских n-поперечников в метрике пространства Харди для некоторых классов аналитических в единичном круге функций, граничные значения которых представлены свёрткой, либо усреднённые модули непрерывности или гладкости их граничных значений мажорируются заданными функциями. Эти идеи стали очень плодотворными и в дальнейшем указанная тематика развивалась в работах М.З.Двейрина [56], М.З.Двейрина и И.В.Чебаненко [57], Ю.А.Фаркова [138, 139], С.Д.Фишера и М.И.Стесина [142], A.Pinkus [104], С.Б.Вакарчука [25], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [37], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [39], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова [150] и других.

Аналогичные вопросы в пространстве Бергмана изучались сравнительно недавно в работах С.Б.Вакарчука [26], М.Ш.Шабозова [152], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова [153, 154], М.Ш.Шабозова и М.Р.Лангаршоева [155, 166].

Особый интерес представляет построение наилучших линейных методов приближения как ранее изученных, так и изучаемые новых классов аналитических функций и связанных с этим задач вычисления точных значений различных n-поперечников, в частности, отыскания точных значений гельфандовских и линейных n-поперечников. В этом направлении исследований уже получен ряд окончательных результатов в работах Л.В.Тайкова [120], J.T.Scheick [170], В.И.Белого [18], В.И.Белого и М.З.Двейрина [19], М.З.Двейрина [55], К.Ю.Осипенко [101, 102], С.Б.Вакарчука [26, 27, 30, 31], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [37], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [39], в которых найдены наилучшие линейные методы приближения различных классов аналитических в круге функций. Тем не менее ещё для многих классов аналитических функций даже в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ значения n-поперечников и наилучшие линейные методы приближения не найдены.

Целью настоящей главы является изложение новых результатов, связанных с вычислением точных значений различных n-поперечников классов аналитических в единичном круге функций, и построение наилучших линейных методов приближения рассматриваемых классов.

§3.1. Наилучшее приближение аналитических в единичном круге функций

3.1.1. Наилучшее полиномиальное приближение аналитических функций в H_q, $q \geq 1$

Приведём необходимые определения и обозначения, используемые нами в дальнейшем. Как и в предыдущих главах, обозначим: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных чисел вещественной оси, $\mathcal{A}(U_\rho)$ – множество функций комплексного переменного $f(z)$, аналитических в круге

$$U_\rho := \Big\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| < \rho \Big\} \quad (0 < \rho \leq 1, \ U_1 = U).$$

Через H_q $(1 \leq q \leq \infty)$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim \Big\{ M_q(f, \rho) : \ \rho \to 1 - 0 \Big\},$$

где

$$M_q(f, \rho) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right\}^{1/q}.$$

Хорошо известно, что норма функции $f \in H_q$ реализуется на её угловых граничных значениях $F(t) := f(e^{it})$, которые существуют почти для всех $t \in [0, 2\pi]$. В случае $q = \infty$ дополнительно будем предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге $\bar{U}_\rho = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq \rho\}$.

Символом $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty, \ 0 < \rho \leq 1, \ H_{q,1} = H_q)$ обозначим банахово пространство Харди функций $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$, для которых

$$\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} \stackrel{def}{=} \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty.$$

Через $f_a^{(r)}(z)$ $(r \in \mathbb{N}, \ f_a^{(0)}(z) \equiv f(z))$ обозначим производную r-го порядка $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho\, exp(it)$:

$$f_a^{(1)}(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial t} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = f'(z) z i,$$

$$f_a^{(r)}(z) := \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a' \qquad (r \geq 2,\ r \in \mathbb{N}),$$

а обычную r-ую производную по переменному z обозначим

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r},\ r \in \mathbb{N}.$$

Под $H_{q,a}^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty,\ H_{q,a}^{(0)} \equiv H_{q,a})$ будем понимать класс функций $f \in \mathcal{A}(U)$, у которых $f_a^{(r)}$ принадлежит пространству H_q $(1 \leq q \leq \infty)$. Аналогичным образом $H_q^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty,\ H_q^{(0)} \equiv H_q)$ означает класс функций $f \in \mathcal{A}(U)$, у которых $f^{(r)} \in H_q$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty)$.

Через $\mathscr{P}_n$ обозначим множество комплексных алгебраических полиномов степени не выше n, а символом

$$E_{n-1}(f)_q := E(f, \mathscr{P}_{n-1}) = \inf\Big\{\|f - p_{n-1}\|_q :\ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\Big\}$$

– наилучшее приближение функции $f \in H_q$ элементами подпространства $\mathscr{P}_{n-1}$ в пространстве H_q.

Всюду далее структурные свойства функции $f \in H_q$ $(1 \leq q \leq \infty)$ будем характеризовать скоростью убывания к нулю модуля непрерывности граничных значений r-ых производных $F_a^{(r)}(t)$ (или $F^{(r)}(t)$, $r \in \mathbb{N}$):

$$\omega(F_a^{(r)}; t)_q := \sup\left\{\left\|F_a^{(r)}\left(x + \frac{h}{2}\right) - F_a^{(r)}\left(x - \frac{h}{2}\right)\right\|_q :\ |h| \leq t\right\},$$

$$\left(\omega(F^{(r)}; t)_q := \sup\left\{\left\|F^{(r)}\left(x + \frac{h}{2}\right) - F^{(r)}\left(x - \frac{h}{2}\right)\right\|_q :\ |h| \leq t\right\}\right),$$

или модуля гладкости граничных значений указанных производных

$$\omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q := \sup\Big\{\|F_a^{(r)}(x+h) - 2F_a^{(r)}(x) + F_a^{(r)}(x-h)\|_q :\ |h| \leq t\Big\},$$

$$\Big(\omega_2(F^{(r)}; 2t)_q := \sup\Big\{\|F^{(r)}(x+h) - 2F^{(r)}(x) + F^{(r)}(x-h)\|_q :\ |h| \leq t\Big\}\Big),$$

задавая скорость убывания посредством мажоранты некоторой усреднённой величины, содержащей $\omega(F_a^{(r)}; t)_q$ $(\omega(F^{(r)}; t)_q)$ или $\omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q$ $(\omega_2(F^{(r)}; 2t)_q)$.

3.1.2. Описание классов аналитических функций в H_q

Пусть $\Phi_i(u)$ и $\Psi_i(u)$ $(i = 1,2;\ u \geq 0)$ – произвольные возрастающие непрерывные функции такие, что $\Phi_i(0) = \Psi_i(0) = 0$. Используя функции $\Phi_i(u)$ и $\Psi_i(u)$ в качестве мажоранты, введём в рассмотрение следующие классы аналитических функций.

Через $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty)$ обозначим класс функций $f \in H_{q,a}^{(r)}$, при любом $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(F_a^{(r)}; 2t)_q\, dt \leq \Phi_1(h),$$

а через $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty)$ – класс функций $f \in H_q^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega(F^{(r)}; 2t)_q\, dt \leq \Phi_2(h).$$

Аналогичным образом через $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \leq q \leq \infty)$ обозначим класс функций $f \in H_{q,a}^{(r)}$, для которых

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q\, dt \leq \Psi_1(h),$$

а $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ соответствующий класс функций $f \in H_q^{(r)}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(F^{(r)}; 2t)_q\, dt \leq \Psi_2(h).$$

Положим также

$$(\sin t)_* := \Big\{\sin t,\ \text{если}\ \ 0 < t \leq \pi/2;\ \ 1,\ \text{если}\ \ t \geq \pi/2\Big\}, \tag{3.1.1}$$

$$(1 - \cos t)_* := \Big\{1 - \cos t,\ \text{если}\ 0 < t \leq \pi;\ \ 2,\ \text{если}\ t \geq \pi\Big\}. \tag{3.1.2}$$

3.1.3. Определение тригонометрического n-поперечника

В пункте 1.1.4 параграфа 1.1 мы привели определения колмогоровского, линейного, проекционного, гельфандовского и бернштейновского n-поперечников. К этой серии n-поперечников добавим ещё один, так называемый тригонометрический n-поперечник, введённый в 1974 г. Р.С.Исмагиловым [72].

Пусть X – банахово пространство функций, аналитических в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Величину

$$d_n^T(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\{m_k\}_{k=1}^n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{\{c_k\}_{k=1}^n} \left\| f(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k z^{m_k} \right\|_X ,$$

где $m_1 < m_2 < \ldots < m_n, \ m_k \in \mathbb{Z}_+, \ k = \overline{1, n},$ называют тригонометрическим n-поперечником компакта $\mathfrak{M}$ в банаховом пространстве X. При вычислении тригонометрического n-поперечника мы опираемся на следующее утверждение, которое легко вытекает из одного результата, приведённого в [57, с.66].

Лемма 3.1.1. *Пусть $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ – произвольные неотрицательные целые числа, $m_i \neq m_j$ при $i \neq j$. Тогда имеет место равенство*

$$\inf \left\{ \left\| z^{m_0} - \sum_{k=1}^{n} a_k z^{m_k} \right\|_{H_{q,\rho}} : \ a_i \in \mathbb{C} \right\} = \left\| z^{m_0} \right\|_{H_{q,\rho}}, \quad (1 \le q \le \infty, \, 0 < \rho \le 1).$$

Учитывая определение тригонометрического n-поперечника и того факта, что [31]

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \le d_n^T(\mathfrak{M}, X) \le \lambda_n(\mathfrak{M}, X),$$

соотношения (1.1.20) между n-поперечниками запишем в следующем удобном для дальнейшего нам виде

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{matrix} \le d_n^T(\mathfrak{M}, X) \le \lambda_n(\mathfrak{M}, X). \qquad (3.1.3)$$

3.1.4. Наилучшее полиномиальное приближение аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди H_q

Наши дальнейшие исследования об отыскании наилучших линейных методах приближения изучаемых нами классов функций основаны на следующих известных результатах Л.В.Тайкова [122, 124], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [5], Н.Айнуллоева [4] и некоторых их обобщениях.

В работе [122] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in H_{q,a}^{(r)} \cap H_q^{(r)}$ $(1 \le q \le \infty,\ r \ge 1,\ r \in \mathbb{N})$ имеют место точные неравенства

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{1}{2n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(F_a^{(r)}; 2t)_q dt, \tag{3.1.4}$$

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{n-r}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega(F^{(r)}; 2t)_q dt,\ n > r,\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.1.5}$$

а в [124] указана зависимость между наилучшим приближением функции $f(z) \in H_{q,a}^{(r)} \cap H_q^{(r)}$ $(1 \le q \le \infty,\ r \ge 1,\ r \in \mathbb{N})$ и усреднённым значений модулей гладкости производных r-ых порядков:

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{1}{(\pi-2)n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q dt, \tag{3.1.6}$$

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{n-r}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega_2(F^{(r)}; 2t)_q dt, \tag{3.1.7}$$

где в (3.1.5) и (3.1.7) введено обозначение

$$\alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1),\ n > r;\ n, r \in \mathbb{N},$$

причём все неравенства (3.1.4) – (3.1.7) обращаются в равенства для функции

$$f_0(z) = az^n \in H_{q,a}^{(r)} \cap H_q^{(r)},\ a \in \mathbb{C},\ n, r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty.$$

Отметим, что для некоторых классов функций, усреднённые модули непрерывности и гладкости которых мажорируются значением заданных функций в некоторой фиксированной системе точек, в работах [4, 5, 122, 124] найдены только точные значения лишь колмогоровского n-поперечника. Наша цель в этой главе – вычисление точных значений всех вышеперечисленных в неравенстве (3.1.3) n-поперечников для классов функций, введённых в пункте 3.1.2, и указание наилучших линейных методов приближения этих классов функций.

§3.2. Наилучшие линейные методы приближения и точные значения поперечников классов $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$ и $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$ в пространстве $H_{q,\rho}\,(1\le q\le\infty,\,0<\rho\le 1)$

Будем придерживаться следующей схеме изложения. Начнём с того, что при некотором ограничении на мажорант Φ_i $(i=1,2)$ сначала вычислим точные значения n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$ и $d_n^T(\cdot)$ для классов $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$ (теорема 3.2.1) и $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$ (теорема 3.2.4) в пространстве H_q, затем распространим полученные результаты на пространство $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty,\,0<\rho\le 1)$ (теоремы 3.2.2 и 3.2.5). Благодаря найденным наилучшим линейным методам (теоремы 3.2.3 и 3.2.6), распространим результаты теорем 3.2.2 и 3.2.5 на гельфандовские и линейные n-поперечники. Справедлива следующая

Теорема 3.2.1. *Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{N}$ и мажоранта Φ_1 при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2n))}\ge\frac{\pi}{2nh}\int\limits_0^{nh}(\sin t)_* dt. \tag{3.2.1}$$

Тогда имеют место равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_q\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_q\right)=d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_q\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)\right)_{H_q}=\frac{\pi}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.2.2}$$

Множество функций $\{\Phi_1\}$, удовлетворяющих условию (3.2.1), не пусто.

Доказательство. Учитывая определение класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$, из неравенства (3.1.4) для произвольной $f(z)\in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$ имеем

$$E_{n-1}(f)_q\le\frac{1}{2n^{r-1}}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(F_a^{(r)};2t)_q dt=$$

$$=\frac{\pi}{4n^r}\left(\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(F_a^{(r)};2t)_q dt\right)\le\frac{\pi}{4n^r}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.2.3}$$

Воспользовавшись соотношением (3.1.3), из неравенства (3.2.3) получаем оценку сверху для указанных n-поперечников

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_q\right)\le d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_q\right)\le d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_q\right)\le$$
$$\le E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)\right)_{H_q}\le\frac{\pi}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (3.2.4)$$

С целью получения оценки снизу указанных n-поперечников, равной правой части неравенства (3.2.4), во множестве $\mathscr{P}_n\cap H_q$ рассмотрим шар

$$\sigma_{n+1}:=\left\{p_n\in\mathscr{P}_n:\ \|p_n\|_q\le\frac{\pi}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$$

и покажем, что шар $\sigma_{n+1}\subset W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$. Для этого используем неравенство [5]

$$\omega(p_{n,a}^{(r)};2t)_q\le 2n^r(\sin nt)_*\|p_n\|_q, \qquad (3.2.5)$$

справедливое для произвольного полинома $p_n\in\mathscr{P}_n$. Из (3.2.5), учитывая определение класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$, для любого $p_n\in\sigma_{n+1}$ и произвольного числа $h\in\mathbb{R}_+$, в силу неравенство (3.2.1), получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega(p_{n,a}^{(r)};2t)_q dt\le 2n^r\|p_n\|_q\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h(\sin nt)_* dt\le$$
$$\le 2n^r\cdot\frac{\pi}{4}n^{-r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}(\sin t)_* dt=$$
$$=\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\frac{\pi}{2nh}\cdot\int\limits_0^{nh}(\sin t)_* dt\le\Phi_1(h),$$

откуда и следует, что $\sigma_{n+1}\subset W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$. Согласно определению бернштейновского n-поперечника, имеем оценку снизу

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_q\right)\ge b_n\left(\sigma_{n+1};H_q\right)\ge\frac{\pi}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (3.2.6)$$

Сравнивая оценки сверху (3.2.4) и снизу (3.2.6), получаем равенство (3.2.2).

Приводим пример функции, удовлетворяющей условию (3.2.1). Положим $\Phi_1^*(t)=t^\alpha$, где

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-1\approx 0.57, \qquad (3.2.7)$$

и покажем, что функция Φ_1^* удовлетворяет ограничению (3.2.1). Подставляя Φ_1^* в (3.2.1), получаем следующее неравенство

$$\left(\frac{2nh}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \frac{\pi}{2nh}\int\limits_0^{nh}(\sin t)_* dt,$$

или, что то же,

$$\left(\frac{2nh}{\pi}\right)^{\alpha+1} \geq \int\limits_0^{nh}(\sin t)_* dt, \tag{3.2.8}$$

которое ещё требуется доказать. Полагая $2nh = \mu\pi, \ \ 0 \leq \mu < \infty$ и учитывая равенство (3.1.1), из (3.2.8) получаем эквивалентное неравенство

$$\mu^{\alpha+1} \geq \begin{cases} 1 - \cos\dfrac{\mu\pi}{2}, & \text{если} \quad 0 \leq \mu \leq 1, \\ 1 + \dfrac{\pi}{2}(\mu - 1), & \text{если} \quad 1 \leq \mu < \infty. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Исходя из первого неравенства в (3.2.9), для $\mu \in [0,1]$ вводим в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - 1 + \cos\frac{\mu\pi}{2} \tag{3.2.10}$$

и докажем, что $\varphi(\mu) \geq 0$ для $0 \leq \mu \leq 1$. Заметим, что в достаточно малой окрестности нуля при $\mu \to 0+0$ функция φ положительна, поскольку в силу равенства (3.2.7)

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1}\big[1 - \frac{\pi^2}{8}\cdot O(\mu^{1-\alpha})\big] > 0,$$

и докажем, что при всех $\mu \in [0,1]$ функция φ является таковой. Если предположить смену знака $\varphi(\mu)$ на интервале $(0,1)$, то существует точка $\eta \in (0,1)$ такая, что $\varphi(\eta) = 0$ и, кроме того, из (3.2.10) очевидно, что $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля существуют точки η_1 и η_2, $0 < \eta_1 < \eta < \eta_2 < 1$ такие, что для производной первого порядка

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)\mu^{\alpha} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\mu\pi}{2} := (\alpha+1)\left(\mu^{\alpha} - \sin\frac{\mu\pi}{2}\right)$$

в силу выбора α из (3.2.7) выполняются равенства $\varphi'(\eta_1) = \varphi'(\eta_2) = 0$ и, кроме того, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. Но тогда производная второго порядка

$$\varphi''(\mu) = (\alpha+1)\left[\alpha\mu^{\alpha-1} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2}\right]$$

на интервале $(0,1)$ имеет не менее трёх нулей, но это невозможно, поскольку функция

$$\alpha\mu^{\alpha-1}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2}$$

представлена разностью между выпуклой вниз и выпуклой вверх функций и по этой причине не может иметь больше двух нулей на интервале $(0,1)$. Таким образом первое неравенство в (3.2.9) имеет место для всех $\mu\in[0,1]$.

Введя в рассмотрение функцию

$$\varphi_*(\mu)=\mu^{\alpha+1}-1-\frac{\pi}{2}(\mu-1)$$

для значений $\mu\in[1,+\infty)$, получаем

$$\varphi_*'(\mu)=(\alpha+1)\mu^{\alpha}-\frac{\pi}{2}:=\frac{\pi}{2}(\mu^{\alpha}-1)\geq 0. \qquad (3.2.11)$$

Так как $\varphi_*(1)=0$, то из (3.2.11) следует, что $\varphi_*(\mu)\geq 0$ для $1\leq\mu<\infty$ и тем самым второе неравенство в (3.2.9) имеет место, чем и завершаем доказательство теоремы 3.2.1. Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 3.2.1. *В условиях теоремы 3.2.1 справедливы равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1^*);H_q\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1^*);H_q\right)=d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1^*);H_q\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1^*)\right)_{H_q}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pi/2}n^{-(r-1)-\pi/2}.$$

Полученные результаты в теореме 3.2.1 для бернштейновского и колмогоровского n-поперечников распространим на более общий случай $H_{q,\rho}$ $(1\leq q\leq\infty,\ 0<\rho\leq 1)$.

Теорема 3.2.2. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$ и мажоранта Φ_1 при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (3.2.1). Тогда при любых $1\leq q\leq\infty$, $0<\rho\leq 1$ справедливы равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_{q,\rho}\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_{q,\rho}\right)=d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_{q,\rho}\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)\right)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (3.2.12)$$

Доказательство. Оценку сверху для указанных в теореме n-поперечников с учётом неравенства [55, с.49]

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} \le \rho^n E_{n-1}(f)_{H_q} \tag{3.2.13}$$

получаем из (3.2.4). В самом деле, переходя к верхней грани по всем функциям $f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)$ из (3.2.13) и (3.2.4) получаем

$$E_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)\right)_{H_{q,\rho}} \le \rho^n E_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)\right)_{H_q} \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

откуда сразу получаем оценку сверху

$$b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) \le d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) \le d_n^T\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) \le$$
$$\le E_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.2.14}$$

Для получения оценки снизу в множестве $\mathscr{P}_n \cap H_{q,\rho}$ введём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$\sigma_{n+1}^* := \left\{p_n \in \mathscr{P}_n :\ \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$$

и докажем включение $\sigma_{n+1}^* \subset W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)$.

В работе [5] доказано, что для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{P}_n$ имеет место неравенство

$$\omega((p_n)_a^{(r)}; 2t)_{H_q} \le 2(\sin nt)_*\, n^r \|p_n\|_{H_q}. \tag{3.2.15}$$

Из неравенства (3.2.15), учитывая, что (см., например, [104, с.255])

$$\|p_n\|_{H_q} \le \rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,\rho}}, \quad (1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1),$$

для произвольной $p_n \in \mathscr{P}_n \cap \sigma_{n+1}^*$ запишем

$$\omega((p_n)_a^{(r)}; 2t)_{H_q} \le 2(\sin nt)_*\, n^r \rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,\rho}}. \tag{3.2.16}$$

Из (3.2.16) для произвольного полинома $p_n \in \sigma_{n+1}^*$ имеем

$$\omega((p_n)_a^{(r)}; 2t)_{H_q} \le \frac{\pi}{2}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)(\sin nt)_*.$$

Таким образом, согласно определению класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$ и условию (3.2.1), получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega((p_n)_a^{(r)};2t)_q\,dt \le \frac{\pi}{2}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h(\sin nt)_*dt =$$

$$=\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{2nh}\int\limits_0^{nh}(\sin t)_*\,dt \le \Phi_1(h),$$

откуда и следует включение $\sigma_{n+1}^* \subset W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$. Из доказанного включения, соотношения (3.1.3) и определения бернштейновского n-поперечника вытекает оценка снизу

$$d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_{q,\rho}\right) \ge b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1);H_{q,\rho}\right) \ge$$

$$\ge b_n\left(\sigma_{n+1}^*;H_{q,\rho}\right) \ge \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (3.2.17)$$

Сопоставляя оценку сверху (3.2.14) и оценку снизу (3.2.17), приходим к требуемым равенствам (3.2.12), чем и завершаем доказательство теоремы 3.2.2.

Далее докажем, что результат (3.2.12) справедлив и для гельфандовского и линейного n-поперечников. С этой целью для каждой функции

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k \in \mathcal{A}(U)$$

сопоставим в соответствие линейный полиномиальный оператор $(n-1)$-й степени

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;z) := \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;\mathscr{P}_{n-1},z) = c_0+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{k,r-1,\rho}\,c_k(f)z^k,$$

где

$$\lambda_{k,r-1,\rho}=1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\rho^{2(n-k)}\left[1-n\mu_k\left(1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right)\right],\ \ k=\overline{1,n-1};$$

$$\mu_k=\int\limits_0^{\pi/(2n)}\cos kx\cos nx dx.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2.1. *Пусть* $f(z)$ – *произвольная функция из класса* $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$, $r \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого числа* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\left\| f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f; \mathscr{P}_{n-1}) \right\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad 0 < \rho \le 1. \qquad (3.2.18)$$

Если мажорирующая функция Φ_1 *при любых* $h \in \mathbb{R}_+$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет ограничению (3.2.1), то неравенство (3.2.18) точно в том смысле, что существует функция* $f_0(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$, *обращающая его в равенство.*

Доказательство. В работе [31] доказано, что для произвольной функции $f \in H_{q,a}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \le 1$ выполняется неравенство

$$\left\| f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f; \mathscr{P}_{n-1}) \right\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\rho^n}{4n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(F_a^{(r)}; x)_q\, dx. \qquad (3.2.19)$$

Учитывая определение класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$, из правой части (3.2.19) будем иметь

$$\frac{\rho^n}{4n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(F_a^{(r)}; x)_q\, dx = \frac{\rho^n}{2n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(F_a^{(r)}; 2x)_q\, dx =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{4n^r} \left(\frac{2n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(F_a^{(r)}; 2x)_q\, dx \right) \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (3.2.20)$$

Таким образом, из неравенств (3.2.19) и (3.2.20) вытекает (3.2.18). Докажем существование функции $f_0(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$, для которой неравенство (3.2.18) обращается в равенство. Рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \frac{\pi}{4}(in)^{-r}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right) z^n$$

и покажем, что $f_0(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$. При доказательстве теоремы 3.2.2 мы ввели в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$\sigma_{n+1}^* := \left\{ p_n \in \mathscr{P}_n : \ \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\},$$

который содержится в классе $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$. Так как в нашем случае $f_0 \in \sigma_{n+1}^*$ и

$$\|f_0\|_{H_q} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

то $f_0(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)$. Следовательно,

$$\Big\|f_0 - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f_0;\mathscr{P}_{n-1})\Big\|_{H_{q,\rho}} = \|f_0\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

чем и завершаем доказательство леммы 3.2.1.

Теорема 3.2.3. *Если мажоранта Φ_1 удовлетворяет условию (3.2.1), то при любых $n, r \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho \le 1$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1); \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;\mathscr{P}_{n-1})\right)_{H_{q,\rho}} :=$$

$$:= \sup\left\{\|f - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\| :\ f \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1)\right\} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right), \qquad (3.2.21)$$

где $\delta_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot)$, $d_n^T(\cdot)$ или $\lambda_n(\cdot)$.

Доказательство. Используя неравенство (3.2.18), определения линейного и тригонометрического n-поперечников, запишем следующие оценки сверху

$$\left.\begin{array}{c} d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) \\ \lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1); H_{q,\rho}\right) \end{array}\right\} \le$$

$$\le \mathscr{E}_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1); \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;\mathscr{P}_{n-1})\right)_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (3.2.22)$$

Сопоставив полученную оценку сверху (3.2.22) с аналогичными оценки снизу (3.2.17) и учитывая неравенства (3.1.3) между различными n-поперечниками, получим соотношение (3.2.21). Теорема 3.2.3 доказана.

Докажем аналоги теоремы 3.2.1 – 3.2.3 для класса функций $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$ в пространстве $H_{q,\rho}$ $(1 \leq q \leq \infty,\ 0 < \rho \leq 1)$, доказательство которых проводится по приведённой выше схеме и в идейном отношении аналогично доказательству теорем 3.2.1 – 3.2.3.

Всюду далее, введём обозначение

$$\alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1),\ n > r;\ n, r \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.2.4. *Если при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r \geq 1$ мажоранта Φ_2 для любого $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_2(h)}{\Phi_2(\pi/2(n-r))} \geq \frac{\pi}{2(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (\sin t)_*\, dt, \tag{3.2.23}$$

то

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) = d_n^T\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2)\right)_{H_q} = \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\,\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \tag{3.2.24}$$

Множество функций $\{\Phi_2\}$, удовлетворяющих условию (3.2.23), не пусто.

Доказательство. Из неравенства (3.1.5), пользуясь определением класса $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$, имеем

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{n-r}{2\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega(F^{(r)}; 2t)_q\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}} \left(\frac{2(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega(F^{(r)}; 2t)_q\, dt\right) \leq \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\,\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

откуда с учётом соотношения (3.1.3) сразу запишем

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) \leq d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) \leq d_n^T\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) \leq$$

$$\leq E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2)\right) \leq \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\,\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \tag{3.2.25}$$

Для получения оценки снизу введём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$\mathscr{M}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathscr{P}_n : \ \|p_n\|_{H_q} \le \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}} \Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\right\}$$

и докажем включение $\mathscr{M}_{n+1} \subset W^{(r)}H_q(\Phi_2)$.

Используя схему рассуждений Л.В.Тайкова [5, с.345; 124, с.293], для произвольного полинома $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$ из подпространства $\mathscr{P}_n$ получаем неравенство

$$\left\{\int\limits_0^{2\pi} \left| p_n^{(r)}\left(\rho e^{i(x+t/2)}\right) - p_n^{(r)}\left(\rho e^{i(x-t/2)}\right)\right|^q dx\right\}^{1/q} \le$$

$$\le 2\left(\sin\frac{n-r}{2}t\right)_* \left\{\int\limits_0^{2\pi}\left|p_n^{(r)}\left(\rho e^{ix}\right)\right|^q dx\right\}^{1/q}, \quad 0<\rho\le 1. \qquad (3.2.26)$$

Воспользовавшись неравенством С.Н.Бернштейна для полиномов [155, с.9]

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_q} \le \alpha_{n,r}\|p_n\|_{H_q},$$

определением норм в пространстве H_q, $1\le q\le\infty$ и определением модуля непрерывности, из (3.2.26) получим неравенство

$$\omega((p_n)^{(r)}; 2t)_{H_q} \le 2\alpha_{n,r}(\sin(n-r)t)_* \|p_n\|_{H_q}, \qquad (3.2.27)$$

верное для любого полинома $p_n \in \mathscr{P}_n$, а также учитывая определение класса $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$ и ограничение (3.2.23), для произвольной $p_n \in \mathscr{M}_{n+1}$ получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega((p_n)^{(r)}; 2t)_q\, dt \le 2\alpha_{n,r}\|p_n\|_{H_q}\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h (\sin(n-r)t)_* dt \le$$

$$\le \Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\frac{\pi}{2(n-r)h}\int\limits_0^{(n-r)h}(\sin t)_* dt \le \Phi_2(h),$$

означающее выполнение включения $\mathscr{M}_{n+1} \subset W^{(r)}H_q(\Phi_2)$. Отсюда, используя определение бернштейновского n-поперечника, получаем оценку снизу

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_q\right) \ge b_n\left(\mathscr{M}_{n+1}; H_q\right) \ge \frac{\pi}{4\alpha_{n,r}}\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (3.2.28)$$

Сравнивая неравенства (3.2.25) и (3.2.28) приходим к равенствам (3.2.24). Легко убедиться, что ограничение (3.2.23) удовлетворяет, например, функция $\Phi_2^*(t) = t^{\pi/2-1}$, чем и завершаем доказательство теоремы 3.2.4.

Теорема 3.2.5. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ *и мажоранта* Φ_2 *при любом* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению (3.2.23). Тогда при любых* $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$ *справедливы равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n^T\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\,\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (3.2.29)$$

Поскольку доказательство теоремы 3.2.5 повторяет схему доказательства теоремы 3.2.2, поэтому мы её здесь не приводим. Отметим лишь, что при получении оценки снизу бернштейновского n-поперечника вместо неравенства (3.2.16) нужно воспользоваться неравенством (3.2.27).

Распространим результат теоремы 3.2.5 на гельфандовский и линейный n-поперечники. Для этой цели, следуя схеме доказательства леммы 3.2.1, каждой функции $f(z) \in \mathcal{A}(U)$ сопоставим в соответствие линейный полиномиальный оператор $(n-1)$-й степени

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f;z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1 + \frac{\rho^{2(n-k)}\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\gamma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k(f)z^k,$$

где $c_k(f)$ – коэффициенты Тейлора функции $f(z)$, а числа $\gamma_{k,r}$ определены равенством

$$\gamma_{k,r} = (n-r)\int\limits_0^{\pi/(2(n-r))} \cos(k-r)t\cos(n-r)t\,dt, \quad k \geq r, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3.2.2. *Пусть f – произвольная функция из класса $W^{(r)}H_q(\Phi_2)$, $1 \le q \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$, n – любое натуральное число, больше r и $0 < \rho \le 1$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left\| f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f) \right\|_{q,\rho} \le \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}} \Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (3.2.30)$$

Если мажорирующая функция Φ_2 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению (3.2.23), то неравенство (3.2.30) неулучшаемо в том смысле, что существует функция $f_0 \in W^{(r)}H_q(\Phi_2)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le q \le \infty$, для которой обращается в равенство.

Доказательство. Введём следующее обозначение

$$\mathcal{K}_{n,r}(\rho,t) := \frac{1}{2\alpha_{n,r}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^j}{\alpha_{n+j,r}} \cos jt. \qquad (3.2.31)$$

Функция $\mathcal{K}_{n,r}(\rho,t)$ является неотрицательной и интегрируемой (см., например, [104, лемма 2.3, с.251]). Полагаем

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f;z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k + \sum_{k=r}^{n-1}\left(1 - \frac{\rho^{2(n-k)}\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\right) c_k(f)z^k.$$

Для произвольного элемента $f \in W^{(r)}H_q(\Phi_2)$ запишем равенство

$$f(\rho z) - \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f;\rho z) =$$

$$= \frac{\rho^n z^{r-1}}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r-1)}(ze^{-it}) e^{i(n-r)t}\, \mathcal{K}_{n,r}(\rho,t)dt, \quad z \in U, \qquad (3.2.32)$$

которое проверяется непосредственным вычислением путём разложения производной $f^{(r-1)}$ в ряд Тейлора и последующим почленным интегрированием подынтегрального выражения с учётом вида ядра (3.2.31).

С целью получения оценки сверху величины наилучшей полиномиальной аппроксимации функций $f \in H_q^{(r)}$ Л.В.Тайков [122] использовал в качестве промежуточного приближения специальный экстремальный оператор, который в нашем случае имеет вид

$$\mathrm{g}(f^{(r-1)};z) = \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/2(n-r)} \left\{ f^{(r-1)}(ze^{it}) + f^{(r-1)}(ze^{-it}) \right\} \cos(n-r)t dt. \quad (3.2.33)$$

Предложенная функция (3.2.33) принадлежит пространству H_q, поскольку её можно представить в виде следующего ряда Тейлора

$$\mathrm{g}(f^{(r-1)};z) = \sum_{k=r-1}^{\infty} \gamma_{k,r-1}\,\alpha_{k,r-1}\,c_k(f)\,z^{k-r+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k+r-1,r-1}\,\alpha_{k+r-1,r-1}\,c_{k+r-1}(f)\,z^{k}, \quad z \in U. \tag{3.2.34}$$

Для произвольной функции $f \in H_q$ полагаем

$$V_{n-r-1,2}(f;z) = \sum_{k=0}^{n-r-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2(n-r)-k}\right)^2\right) c_k z^k$$

и учитывая вид функции (3.2.34) запишем

$$V_{n-r-1,2}\Big(\mathrm{g}(f^{(r-1)});z\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r-1} \gamma_{k+r-1,r-1}\,\alpha_{k+r-1,r-1}\,c_{k+r-1}(f) \left(1 - \left(\frac{k}{2(n-r)-k}\right)^2\right) z^k.$$

Полагаем

$$H_{q,a}^{(s)} = \Big\{\varphi \in \mathcal{A}(U):\ \varphi_a^{(s)} \in H_q\Big\},$$

где через $\varphi_a^{(s)}(z)$ обозначена s-я производная функции φ по аргументу t комплексного числа $z = \rho\, exp(it)$. При этом $\varphi_a^{(s)}(z) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \dfrac{d\varphi}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dt} = \varphi'(z)zi$ и для $s \geq 2$ $\varphi_a^{(s)}(z) = \Big\{\varphi_a^{(s-1)}(z)\Big\}_a'$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что для произвольной функции $\varphi \in H_{q,a}^{(2)}$ имеет место равенство

$$\varphi(z) - V_{n-r-1,2}(\varphi;z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_a^{(2)}(ze^{-it})\,e^{i(n-r)t}\,G_{2,n-r}(t)dt, \tag{3.2.35}$$

где

$$G_{2,n-r}(t) = \frac{1}{2(n-r)^2} + \sum_{k=n-r+1}^{\infty} \frac{\cos(k-n+r)t}{k^2}$$

– неотрицательная интегрируемая функция [104, лемма 2.2, с.251].

Из равенства (3.2.35) применением обобщённого неравенства Минковского получаем

$$\Big\|\varphi - V_{n-r-1,2}(\varphi)\Big\|_q \le \frac{1}{(n-r)^2}\,\|\varphi_a^{(2)}\|_q. \tag{3.2.36}$$

Для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q(\Phi)$ построим линейный полиномиальный оператор

$$\Omega_{n-1,r-1,\rho}(f;z) =$$
$$= \sum_{k=r-1}^{n-1} \gamma_{k,r-1}\cdot\frac{\alpha_{k,r-1}}{\alpha_{2n-k,r-1}}\rho^{2(n-k)}\left(1-\left(\frac{k-r+1}{2n-k-r+1}\right)^2\right)c_k(f)z^k$$

и, учитывая соотношения (3.2.31) и (3.2.33), непосредственным подсчётом убедимся в интегральном представлении

$$\Omega_{n-1,r-1,\rho}(f;\rho z) =$$
$$= \frac{\rho^n z^{r-1}}{\pi}\int_0^{2\pi} V_{n-r-1,2}\Big(\mathrm{g}(f^{(r-1)});ze^{-it}\Big)e^{i(n-r)t}\,\mathcal{K}_{n,r-1}(\rho,t)dt. \tag{3.2.37}$$

Теперь, полагая

$$\mathscr{L}_{n-1,r-1,\rho}(f;z) \overset{def}{=} V_{n-1,r-1,\rho}(f;z) + \Omega_{n-1,r-1,\rho}(f;z),$$

с учётом (3.2.32) и (3.2.37) имеем

$$f(\rho z) - \mathscr{L}_{n-1,r-1,\rho}(f;z) =$$
$$= \frac{\rho^n z^{r-1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{f^{(r-1)}(ze^{-it}) - \Lambda_{n-r-1,2}\Big(\mathrm{g}(f^{(r-1)});ze^{-it}\Big)\Big\}\,e^{i(n-r)t}\,\mathcal{K}_{n,r}(\rho,t)dt.$$

Отсюда в силу обобщённого неравенства Минковского получаем

$$\left\| f - \mathscr{L}_{n-1,r-1,\rho}(f) \right\|_{q,\rho} \le$$

$$\le \frac{\rho^n(n-r)}{\alpha_{n,r}} \left\{ \left\| f^{(r-1)} - \mathrm{g}(f^{(r-1)}) \right\|_q + \left\| \mathrm{g}(f^{(r-1)}) - \Lambda_{n-r-1,2}\Big(\mathrm{g}(f^{(r-1)})\Big) \right\|_q \right\}. \tag{3.2.38}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (3.2.38), следуя [122, с.80], оценим сверху следующим образом

$$\left\| f^{(r-1)} - \mathrm{g}(f^{(r-1)}) \right\|_q \le \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega(F^{(r)}; 2t)_q (1 - \sin(n-r)t) dt. \tag{3.2.39}$$

Полагая $z = e^{it}$ и учитывая, что норма в пространстве H_q реализуется на угловых граничных значениях функции ради упрощения записи, введём обозначение

$$\mathscr{F}(x \pm t) := f^{(r-1)}(ze^{\pm it}).$$

Приступая к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (3.2.38), следуя рассуждением [5], будем считать, что $f^{(r-1)}$, а значит, и $\mathscr{F}$ есть алгебраический полином некоторой степени m, поскольку совокупность всех полиномов всюду плотна в пространстве H_q. При этом можно одновременно осуществить приближение функции и её производной в H_q, а потому можно полагать, что $\mathscr{F}^{(s)} \in H_q$, где $s = 1, 2$.

Используя неравенство (3.2.36) и обобщённое неравенство Минковского, запишем

$$\left\| \mathrm{g}(f^{(r-1)}) - \Lambda_{n-r-1,2}\Big(\mathrm{g}(f^{(r-1)})\Big) \right\|_q \le \frac{1}{(n-r)^2} \left\| \mathrm{g}(f^{(r-1)})^{(2)}_a \right\|_q. \tag{3.2.40}$$

Продифференцировав дважды обе части равенства (3.2.33) по аргументу z и подставляя внутри нормы в правой части неравенства (3.2.40), перепишем его в виде

$$\left\| \mathrm{g}(f^{(r-1)}) - \Lambda_{n-r-1,2}\Big(\mathrm{g}(f^{(r-1)})\Big) \right\|_q \le$$

$$\leq \frac{1}{2(n-r)}\left\|\int\limits_{0}^{\pi/2(n-r)}\left\{\mathscr{F}^{(2)}(x+t)+\mathscr{F}^{(2)}(x-t)\right\}\cos(n-r)tdt\right\|_{q}.$$

Выполнив интегрирование по частям внутри нормы, продолжим оценку (3.2.40) :

$$\cdots\leq \frac{1}{2}\left\|\int\limits_{0}^{\pi/2(n-r)}\left\{\mathscr{F}'(x+t)-\mathscr{F}'(x-t)\right\}\sin(n-r)tdt\right\|_{q}\leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2(n-r)}\omega(F^{(r)};2t)_{q}\sin(n-r)tdt. \tag{3.2.41}$$

Объединяя обе оценки (3.2.39) и (3.2.41), из (3.2.38) получаем

$$\left\|f-V_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{q,\rho}\leq \frac{\rho^{n}(n-r)}{2\alpha_{n,r}}\int\limits_{0}^{\pi/2(n-r)}\omega(F^{(r)};2t)_{q}dt. \tag{3.2.42}$$

Учитывая определение класса $W^{(r)}H_{q}(\Phi_{2})$, из (3.2.42) имеем

$$\left\|f-V_{n-1,r-1,\rho}(f)\right\|_{q,\rho}\leq \frac{\pi\rho^{n}}{4\alpha_{n,r}}\Phi_{2}\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),\quad n>r,\quad n,r\in\mathbb{N}. \tag{3.2.43}$$

Очевидно, что функция

$$f_{0}(z)=\frac{\pi\rho^{n}}{4\alpha_{n,r}}\Phi_{2}\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)z^{n},\quad z\in U$$

принадлежит классу $W^{(r)}H_{q}(\Phi_{2})$ и для этой функции

$$\left\|f_{0}-V_{n-1,r-1,\rho}(f_{0})\right\|_{q,\rho}=\|f_{0}\|_{q,\rho}=\frac{\pi\rho^{n}}{4\alpha_{n,r}}\Phi_{2}\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

чем и завершаем доказательство леммы 3.2.2.

Теорема 3.2.6. *Пусть мажоранта* $\Phi_2(h)$ *при любом* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию (3.2.23). Тогда для всех* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, *при* $0 < \rho \le 1$ *справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2)\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); \mathscr{L}_{n-1,r-1,\rho}, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \quad (3.2.44)$$

где $\delta_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d_n^T(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ *или* $\lambda_n(\cdot)$.

Доказательство. Из соотношений (3.1.3) между n-поперечниками и неравенством (3.2.43) следует, что при выполнении ограничения (3.2.23) на мажоранту Φ_2 выполняются соотношения

$$d^n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) \le \lambda_n\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); H_{q,\rho}\right) \le$$

$$\le \mathscr{E}_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Phi_2); \mathscr{L}_{n-1,r-1,\rho}, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\alpha_{n,r}}\Phi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \quad (3.2.45)$$

Сопоставляя оценки сверху (3.2.45) с равенствами (3.2.29) приходим к требуемым соотношениям (3.2.44). Теорема 3.2.6 доказана.

§3.3. Наилучшие линейные методы приближения и точные значения поперечников классов $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ и $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ в пространстве $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty,\ 0<\rho\le 1)$

Теорема 3.3.1. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$ и мажоранта Ψ_1 при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1\big(\pi/(2n)\big)}\ge\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}(1-\cos t)_*dt. \tag{3.3.1}$$

Тогда при всех $1\le q\le\infty$ имеют место равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_q\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_q\right)=d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_q\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right)_{H_q}=\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.3.2}$$

Множество функций $\{\Psi_1\}$, удовлетворяющих условию (3.3.1), не пусто.

Доказательство. Из неравенства (3.1.6) сразу получаем оценку сверху для наилучших приближений класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ множеством полиномов $\mathscr{P}_n$:

$$E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right)_q=\sup\left\{E_{n-1}(f)_q:\ f\in W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right\}\le$$

$$\le\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{n^r}\sup\left\{\left(\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2(F_a^{(r)};2t)dt\right):\ f\in W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right\}\le$$

$$\le\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Отсюда, в силу соотношения (3.1.3) между указанными n-поперечниками, получаем оценку сверху

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_q\right)\le d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_q\right)\le d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1);H_q\right)\le$$

$$\le E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right)_{H_q}\le\frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.3.3}$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника вводим в рассмотрение шар

$$\mathscr{D}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathscr{P}_n : \ \|p_n\| \le \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}$$

и докажем, что шар $\mathscr{D}_{n+1}$ содержится внутри класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$.

Пусть $p_n(t)$ – граничное значение произвольного полинома $p_n(z) \in \mathscr{P}_n$. В работе [124, с.293] доказано, что для любого полинома $p_n(z) \in \mathscr{P}_n$ выполняется неравенство

$$\Big\| p_n(x+t) - 2p_n(x) + p_n(x-t) \Big\|_{H_q} \le 2(1-\cos nt)_* \Big\| p_n \Big\|_{H_q}. \tag{3.3.4}$$

Из неравенства (3.3.4) вытекает, что

$$\Big\| (p_n(x+t))_a^{(r)} - 2(p_n(x))_a^{(r)} + (p_n(x-t))_a^{(r)} \Big\|_{H_q} \le 2(1-\cos nt)_* \Big\| (p_n)_a^{(r)} \Big\|_{H_q}. \tag{3.3.5}$$

Если воспользоваться неравенством С.Н.Бернштейна ([155] случай $R=1$)

$$\Big\| (p_n)_a^{(r)} \Big\|_{H_q} \le n^r \Big\| p_n \Big\|_{H_q},$$

то из (3.3.5) при $0 < nt \le \pi$ сразу вытекает соотношение

$$\omega_2((p_n)_a^{(r)}; 2t)_q \le 2(1-\cos nt)_* \|(p_n)_a^{(r)}\|_{H_q} \le 2n^r (1-\cos nt)_* \|p_n\|_{H_q}. \tag{3.3.6}$$

Учитывая условие (3.3.1) и определение класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ для любого полинома $p_n(z) \in \mathscr{D}_{n+1}$, из соотношения (3.3.6) получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2((p_n)_a^{(r)}; 2t)dt \le 2n^r \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-\cos nt)_* dt \le$$

$$\le \frac{\pi}{\pi-2}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh} (1-\cos t)_* dt \le \Psi_1(h).$$

Последнее неравенство означает, что $\mathscr{D}_{n+1} \subset W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$. Из этого включения и определения бернштейновского n-поперечника следует оценка снизу

$$b_n(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1), H_q) \ge b_n(\mathscr{D}_{n+1}, H_q) \ge \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.3.7}$$

Сопоставляя оценку сверху (3.3.3) и оценку снизу (3.3.7), получаем требуемые равенства (3.3.2). Приступая к доказательству второй части теоремы, покажем, что функция $\Psi_1^*(t) = t^\alpha$, где

$$\alpha = \frac{2}{\pi - 2} \quad (1 < \alpha < 2) \tag{3.3.8}$$

удовлетворяет условию (3.3.1). Конкретизируя Ψ_1^* в (3.3.1), будем иметь неравенство

$$\left(\frac{2nh}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \frac{1}{nh} \int\limits_0^{nh} (1 - \cos t)_* dt, \tag{3.3.9}$$

которое ещё предстоит доказать. Как и выше, полагая $2nh = u\pi$ $(0 \leq u < \infty)$, с учётом определения подынтегральной функции из (3.1.2), перепишем неравенство (3.3.9) в эквивалентном виде

$$u^{\alpha+1} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} u - \dfrac{2}{\pi} \sin \dfrac{\pi u}{2}, & \text{если} \quad 0 \leq u \leq 2, \\ 2(u-1), & \text{если} \quad 2 \leq u < \infty. \end{cases} \tag{3.3.10}$$

На отрезке $[0, 2]$ введём в рассмотрение функцию

$$\psi(u) = u^{\alpha+1} - \frac{\pi}{\pi - 2}\left(u - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2}\right)$$

и докажем, что для значений $u \in [0, 2]$ функция $\psi(u) \geq 0$. Сначала установим этот факт на отрезке $[0, 1]$. Так как при $u \to 0 + 0$

$$\psi(u) = u^{\alpha+1}\left[1 - \frac{\pi^3}{24(\pi - 2)} O(u^{2-\alpha})\right],$$

то в достаточно малой окрестности нуля $\psi(u) > 0$, и если бы $\psi(u)$ сменила знак в некоторой точке $\xi \in [0, 1]$, то, учитывая равенства $\psi(0) = \psi(1) = 0$, пришли бы к выводу, что производная первого порядка

$$\psi'(u) = (\alpha + 1)u^\alpha - \frac{\pi}{\pi - 2}\left(1 - \cos \frac{\pi u}{2}\right) := (\alpha + 1)\left[u^\alpha - 1 + \cos \frac{\pi u}{2}\right]$$

имеет на интервале $(0, 1)$ два различных нуля и ещё $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$. Но тогда вторая производная

$$\psi''(u) = (\alpha + 1)\left[\alpha u^{\alpha-1} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi u}{2}\right]$$

имеет на интервале $(0,1)$ не менее трёх нулей и, кроме того, $\psi''(0)=0$ в силу равенства (3.3.8). Отсюда следует существование трёх различных нулей на интервале $(0,1)$ производной третьего порядка

$$\psi'''(u)=(\alpha+1)\left[\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi u}{2}\right].$$

Но это невозможно, поскольку функция (3.3.9) представляет собой разность выпуклой вниз и выпуклой вверх функций. Из геометрических соображений ясно, что функция (3.3.9) не может иметь более двух нулей, а потому в случае $0\le u\le 1$ неравенство (3.3.8) выполняется.

Если $1<u\le 2$, то из условий $\psi(1)=\psi'(1)=0$ и $\psi''(u)>0$ сразу следует, что $\psi(u)\ge 0$ и, таким образом, для значений $0\le u\le 2$ первое неравенство в (3.3.8) имеет место.

Пусть $2\le u<\infty$. Исходя из второго неравенства (3.3.10), введём в рассмотрение функцию

$$\psi_1(u)=u^{\alpha+1}-\frac{2\pi}{\pi-2}(u-1)$$

и докажем, что $\psi_1(u)\ge 0$ при всех $2\le u<\infty$. Так как в силу (3.3.8)

$$\psi_1'(u)=(\alpha+1)u^{\alpha}-\frac{2\pi}{\pi-2}=(\alpha+1)(u^{\alpha}-2)\ge 0$$

и $\psi_1(2)=2^{\alpha+1}-\dfrac{2\pi}{\pi-2}>0$, то $\psi_1(u)>0$ при любом $2\le u<\infty$. Но это означает, что второе неравенство в (3.3.10) на множестве точек $u\in[2,\infty)$ также имеет место. Теорема 3.3.1 полностью доказана.

Из доказанной теоремы 3.3.1 вытекает

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы 3.3.1 имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*);H_q\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*);H_q\right)=d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*);H_q\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1^*);H_q\right)=(\pi/2)^{\pi/(\pi-2)}\,(\pi-2)^{-1}\,n^{-r-2/(\pi-2)}.$$

Используя схему рассуждений теоремы 3.2.2, распространим результат теоремы 3.3.1 на пространства Харди $H_{q,\rho}$ $(1\le q\le\infty,\ 0<\rho\le 1)$.

Теорема 3.3.2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ и мажоранта Ψ_1 при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (3.3.1). Тогда при всех $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$ имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) = d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.3.11}$$

Доказательство. Используя соотношение (3.2.13), из неравенства (3.1.6), учитывая определения класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ ($r \in \mathbb{N}$, $1 \le q \le \infty$), имеем

$$E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\left(\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q dt\right) \le \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Из полученного неравенства, в силу соотношения (3.1.3), запишем

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) \le d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) \le d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) \le$$

$$\le E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)\right)_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad 0 < \rho \le 1. \tag{3.3.12}$$

С целью получения оценки снизу в множество $\mathscr{P}_n \cap H_{q,\rho}$ введём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов радиуса, равного правой части неравенства (3.3.12) :

$$\mathscr{M}_{n+1}^* := \left\{p_n \in \mathscr{P}_n : \ \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}, \tag{3.3.13}$$

и докажем включение $\mathscr{M}_{n+1}^* \subset W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$. Воспользовавшись неравенствами (§3.2.) и (3.3.6) запишем

$$\omega_2((p_n)_a^{(r)}; 2x)_q \le 2n^r\rho^{-n}(1-\cos nx)_*\|p_n\|_{H_{q,\rho}}. \tag{3.3.14}$$

Если теперь предположить, что $p_n \in \mathscr{M}_{n+1}^*$, то, учитывая определение класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ и ограничение (3.3.1), из неравенства (3.3.14) имеем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2((p_n)_a^{(r)}; 2x)_q dx \le 2n^r\rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,R}} \cdot \frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-\cos nx)_* dx \le$$

$$\leq \Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}(1-\cos t)_* dt \leq \Psi_1(h),$$

откуда следует включение $\mathscr{M}_{n+1}^* \subset W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$. Из доказанного включения и определения бернштейновского n-поперечника сразу получаем оценку снизу

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) \geq b_n\left(\mathscr{M}_{n+1}^*; H_{q,\rho}\right) \geq \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{\rho^n}{n^r}\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \quad (3.3.15)$$

Требуемые равенства (3.3.11) получаем из сопоставления оценки сверху (3.3.12) и оценки снизу (3.3.15), чем и завершаем доказательству 3.3.2.

Далее рассмотрим вопрос о построении наилучшего линейного метода приближения класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$. Имеет место следующая

Теорема 3.3.3. *Если мажоранта Ψ_1 при любых $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (3.3.1), то для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$, $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства*

$$d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) = \lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)n^r}\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \quad (3.3.16)$$

Доказательство. Очевидно, чтобы доказать равенства (3.3.16), в силу соотношения между n-поперечниками (3.1.3) достаточно построить наилучший линейный метод приближения функций из класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ в пространстве $H_{q,\rho}$. Заметим, что для произвольной функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{A}(U)$, принадлежащей классу $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$, выполняется следующее интегральное представление [26]

$$f(\rho z) - V_{n-1,r}(f; \rho z) = \frac{\rho^n i^{-r}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_a^{(r)}(ze^{-it})\, e^{int}\, G_{n,r}(\rho, t)dt, \quad (3.3.17)$$

где

$$V_{n-1,r}(f; \rho z) = c_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{k,r}c_k z^k,$$

$$\lambda_{k,r} = 1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^r \rho^{2(n-k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

и

$$G_{n,r}(t) = n^{-r} + 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^{k-n} k^{-r} \cos(k-n)t \geq 0. \tag{3.3.18}$$

В справедливости равенства (3.3.17) можно убедиться, если разложить подынтегральную функцию $f_a^{(r)}(ze^{-it})$ в степенной ряд Тейлора и после умножения на ряд (3.3.18) почленно проинтегрировать. Неотрицательность ядра (3.3.18) следует из [104, леммы 2.2, с.251].

При нахождении точной оценки наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций посредством усреднённых значений модулей гладкости Н.Айнуллоевым [4] на основе разработанного Л.В.Тайковым [124] подхода в процессе промежуточного приближения использовался специальный оператор, который в нашем случае имеет следующий вид:

$$\mathscr{F}_u(f,z) =$$

$$= \frac{\pi}{2u(\pi-2)} \int_0^u \left\{ f(ze^{it}) + f(ze^{-it}) \right\} \left(1 - \sin\frac{\pi t}{2u}\right) dt, \ u > 0, \ z \in U. \tag{3.3.19}$$

В частности, полагая в (3.3.19) $u = \pi/(2n)$ и подставляя вместо функции f её разложение в ряд Тейлора, получаем

$$\mathscr{F}(f,z) := \mathscr{F}_{\pi/(2n)}(f,z) =$$

$$= \frac{2n}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2n)} \left\{ f(ze^{it}) + f(ze^{-it}) \right\} (1 - \sin nt)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k,n} c_k z^k, \tag{3.3.20}$$

где

$$\beta_{k,n} = \frac{n}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2n)} \cos kt\, (1 - \sin nt)\, dt,$$

причём согласно разложению (3.3.20) функция $\mathscr{F}(f,z) \in H_q$. Заменив в равенстве (3.3.20) функцию f на $f_a^{(r)}$, будем иметь

$$\mathscr{F}(f_a^{(r)}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^r \beta_{k,n}\, c_k(f) z^k.$$

Построим следующий вспомогательный линейный оператор

$$\Lambda_{n-1,r}(f;\rho z)=\frac{\rho^n}{2\pi i^r}\int\limits_0^{2\pi}V_{n-1,2}\Big(\mathscr{F}(f_a^{(r)},ze^{-it})\Big)\,e^{int}\,G_{n,r}(\rho,t)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{2n-k}\right)\left[1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right]\rho^{2(n-k)}\,\beta_{k,n}\,c_k(f)z^k. \tag{3.3.21}$$

Полагая

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f,z)=V_{n-1,r}(f,z)+\Lambda_{n-1,r}(f;z)$$

и используя (3.3.17), (3.3.21) и обобщённое неравенство Минковского, имеем

$$\Big\|f-\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f)\Big\|_{q,\rho}\le$$

$$\le\frac{\rho^n}{n^r}\left\{\Big\|f_a^{(r)}-\mathscr{F}(f_a^{(r)})\Big\|_q+\Big\|\mathscr{F}(f_a^{(r)})-V_{n-1,2}(\mathscr{F}(f_a^{(r)}))\Big\|_q\right\}. \tag{3.3.22}$$

Учитывая вид оператора (3.3.20) и определение модуля гладкости $\omega_2(f,t)$ и применяя снова упомянутое неравенство Минковского для первого слагаемого в правой части (3.3.22), получаем следующую оценку сверху

$$\Big\|f_a^{(r)}-\mathscr{F}(f_a^{(r)})\Big\|_q\le\frac{n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2(F_a^{(r)};2t)_q(1-\sin nt)dt. \tag{3.3.23}$$

Приступая к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (3.3.22), в соответствии с принятыми соглашениями из [124, с.289], будем считать, что для некоторого $m\in\mathbb{N}$ функция f является полиномом некоторой степени m. Поскольку множество всех полиномов всюду плотно в пространстве H_q, то можно одновременно осуществить приближение функции и её производной по аргументу в H_q, причём все осуществляемые математические операции будут корректными. При этом в силу равенства (3.3.17)

$$\Big\|\mathscr{F}(f_a^{(r)})-V_{n-1,2}(\mathscr{F}(f_a^{(r)}))\Big\|_q\le$$

$$\le n^{-2}\Big\|(\mathscr{F}(f_a^{(r)}))_a^{(2)}\Big\|_q:=n^{-2}\Big\|\mathscr{F}(f_a^{(r+2)})\Big\|_q. \tag{3.3.24}$$

Но так как

$$\mathscr{F}(f_a^{(r+2)}; e^{ix}) =$$

$$= \frac{n}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \left\{ f_a^{(r+2)}(x+t) + f_a^{(r+2)}(x-t) \right\} (1-\sin nt)\, dt, \qquad (3.3.25)$$

то, выполнив дважды интегрирование по частям в правой части (3.3.25), получаем

$$\mathscr{F}(f_a^{(r+2)}; e^{ix}) =$$

$$= \frac{n^3}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \left\{ f_a^{(r)}(x+t) - 2f_a^{(r)}(x) + f_a^{(r)}(x-t) \right\} \sin ntdt. \qquad (3.3.26)$$

Из равенства (3.3.26) применением неравенства Минковского, с учётом определения модуля гладкости, имеем

$$\frac{1}{n^2}\left\| \mathscr{F}(f_a^{(r+2)}; e^{ix}) \right\|_q \le \frac{n}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q \sin ntdt. \qquad (3.3.27)$$

Теперь в силу неравенств (3.3.23), (3.3.24) и (3.3.27) для произвольной функции $f \in W_a^{(r)} H_q(\Psi_1)$ из (3.3.22) будем иметь

$$\left\| f - \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f) \right\|_{q,\rho} \le \frac{\rho^n}{(\pi-2)n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q dt \le$$

$$\le \frac{\pi \rho^n}{2(\pi-2)n^r} \left(\frac{2n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(F_a^{(r)}; 2t)_q dt \right) \le \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{n^r} \Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (3.3.28)$$

Докажем, что неравенство (3.3.28) на классе $W_a^{(r)} H_q(\Psi_1)$ является точным. В самом деле, при доказательстве теоремы 3.3.2 мы показали, что $(n+1)$-мерная сфера полиномов (3.3.13) радиуса $\dfrac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \dfrac{\rho^n}{n^r} \Psi_1\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$ содержится внутри класса $W_a^{(r)} H_q(\Psi_1)$. Рассмотрим экстремальную функцию

$$f_0(z) = \frac{\pi}{2(\pi-2)} (in)^{-r} \Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right) z^n, \quad z \in U.$$

Поскольку

$$\|f_0\|_{q,\rho} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

то f_0 принадлежит сфере $\mathscr{M}^*_{n+1}$, а значит и классу $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$, причём, как легко проверить, функция Ψ удовлетворяет ограничению (3.3.1). Кроме того, для этой функции $\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f_0) \equiv 0$. Следовательно, имеет место равенство

$$\|f_0 - \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f_0)\|_{q,\rho} = \|f_0\|_{q,\rho} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.3.29}$$

Из неравенства (3.3.28), равенства (3.3.29) и соотношений (3.1.3) между n-поперечниками с учётом выполнения условия (3.3.1) для мажоранты Ψ_1 получаем

$$d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) \le \lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) \le d_n^T\left(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); H_{q,\rho}\right) \le$$

$$\le \mathscr{E}_{n-1}\Big(W_a^{(r)}H_q(\Psi_1); \mathscr{L}_{n-1,r,\rho}, \mathscr{P}_{n-1}\Big)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{n^r}\,\Psi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Сопоставляя полученное неравенство с равенствами (3.3.2), получаем требуемые равенства (3.3.16). Этим мы доказали, что линейный метод

$$\mathscr{L}_{n-1,r,\rho}(f;z) =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{1 + \left(\frac{k}{2n-k}\right)^r \rho^{2(n-k)}\left[\beta_{k,n}\left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right) - 1\right]\right\} c_k z^k,$$

где

$$\beta_{k,n} = \frac{n}{\pi-2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} (1 - \sin nt)\cos kt dt,$$

является *наилучшим линейным методом приближения* функций класса $W_a^{(r)}H_q(\Psi_1)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$. Этим доказательство теоремы 3.3.3 завершается.

Приведённые теоремы допускают обобщение на классе функций $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$. Сформулируем полученные результаты в этом направлении.

Теорема 3.3.4 *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ *и мажоранта* Ψ_2 *при любом* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Psi_2(h)}{\Psi_2(\pi/2(n-r))} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \frac{1}{(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (1-\cos t)_* dt. \qquad (3.3.30)$$

Тогда при всех $1 \leq q \leq \infty$ *и* $0 < \rho \leq 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) = d_n^T\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2)\right)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (3.3.31)$$

Доказательство теоремы 3.3.4 опускаем, поскольку оно повторяет схему доказательства теоремы 3.3.2. В продолжение этого параграфа, с целью вычисления точных значений гельфандовского и линейного n-поперечников класса $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ для произвольной функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{A}(U)$, введём в рассмотрение следующий полиномиальный оператор [37, с.324]

$$\Lambda^*_{n-1,r,\rho}(f; z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\rho^{2(n-k)}\left[\beta_{k,n,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right)-1\right]\right\} c_k(f) z^k, \qquad (3.3.32)$$

где

$$\beta_{k,n,r} \stackrel{def}{=} \frac{(n-r)}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} (1-\sin(n-r)x)\cos(k-r)x dx, \ n > k \geq r, \ n, k, r \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.3.5. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ *и мажоранта* Ψ_2 *удовлетворяет условию (3.3.30). Тогда при всех* $1 \leq q \leq \infty$ *и* $0 < \rho \leq 1$ *справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2)\right)_{H_{q,\rho}} =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\Big(W^{(r)}H_q(\Psi_2); \Lambda^*_{n-1,r,\rho}; \mathscr{P}_{n-1}\Big)_{q,\rho} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \, \Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \qquad (3.3.33)$$

где $\delta_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d_n^T(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ *либо* $\lambda_n(\cdot)$. *При этом полиномиальный оператор (3.3.32) является наилучшим линейным методом приближения класса* $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ *в пространстве* $H_{q,\rho}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 3.3.5 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.3.1. *Пусть* f *– произвольная функция из класса* $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$. *Тогда при любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ *справедливо неравенство*

$$\Big\|f - \Lambda^*_{n-1,r,\rho}(f)\Big\|_{q,\rho} \le \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \, \Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (3.3.34)$$

Если мажорирующая функция Ψ_2 *при любом* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет условию (3.3.30), то неравенство (3.3.34) является точным в том смысле, что существует функция* $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Psi_2)$, *для которой (3.3.34) обращается в равенство.*

Доказательство. В работе [38] доказано, что для произвольной функции $f \in H_q^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty)$ выполняется неравенство

$$\|f - \Lambda^*_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\rho^n(n-r)}{(\pi-2)\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega_2(F^{(r)}; 2t)_q dt. \qquad (3.3.35)$$

Если теперь предположить, что $f \in W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ $(r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty)$, то, учитывая определение класса $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$, из правой части неравенства (3.3.35) имеем

$$\frac{\rho^n(n-r)}{(\pi-2)\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega_2(F^{(r)}; 2t)_q dt \le$$

$$\leq \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\left(\frac{2(n-r)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2(n-r)}\omega_2(F^{(r)};2t)_q dt\right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),\ 0<\rho\leq 1,\ n>r,\ n,r\in\mathbb{N}. \qquad (3.3.36)$$

Из неравенств (3.3.35) и (3.3.36) следует (3.3.34). Покажем, что функция

$$f_1(z)=\frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)z^n;\quad n>r;\ z\in U, \qquad (3.3.37)$$

где функция Ψ_2 удовлетворяет ограничению (3.3.30), принадлежит классу $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$. Заметим, что функция $f_1(z)\in\mathscr{P}_n$. Покажем, что $(n+1)$-мерная сфера полиномов

$$\mathscr{D}^*_{n+1}:=\left\{p_n\in\mathscr{P}_n:\ \|p_n\|_{H_{q,\rho}}\leq\frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\right\}$$

принадлежит классу $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$. Заменяя в неравенстве (3.3.4) полинома $p_n(z)$ на $p_n^{(r)}(z)$ будем иметь

$$\left\|p_n^{(r)}(x+t)-2p_n^{(r)}(x)+p_n^{(r)}(x-t)\right\|_{H_q}\leq 2(1-\cos(n-r)t)_*\left\|p_n^{(r)}\right\|_{H_q},$$

или, что тоже,

$$\omega_2(p_n^{(r)};2t)_q\leq 2(1-\cos(n-r)t)_*\,\|p_n^{(r)}\|_{H_q}. \qquad (3.3.38)$$

Пользуясь тем, что для произвольного полинома $p_n\in\mathscr{P}_n$ имеет место обобщённое неравенство С.Н.Бернштейна [155, с.9]

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{q,\rho}}\leq\alpha_{n,r}\,\rho^n\|p_n\|_{H_q}\quad(1\leq q\leq\infty,\ 0<\rho\leq 1),$$

из (3.3.38) имеем

$$\omega_2(p_n^{(r)};2t)_q\leq 2(1-\cos(n-r)t)_*\,\alpha_{n,r}\,\rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,\rho}},\quad n>r. \qquad (3.3.39)$$

Учитывая определение класса $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$, для любого $h \in \mathbb{R}_+$ в силу ограничения (3.3.30) для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{D}^*_{n+1}$, из (3.3.39) получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(p_n^{(r)}; 2t)_q\, dt \le 2\alpha_{n,r}\rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,\rho}} \cdot \frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-\cos(n-r)t)_*\, dt \le$$

$$\le 2\alpha_{n,r}\rho^{-n} \cdot \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot \frac{1}{(n-r)h}\int\limits_0^{(n-r)h}(1-\cos t)_*\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{\pi-2}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot \frac{1}{(n-r)h}\int\limits_0^{(n-r)h}(1-\cos t)_*\, dt \le \Psi_2(h).$$

Последнее неравенство означает, что $\mathscr{D}^*_{n+1} \subset W^{(r)}H_q(\Psi_2)$. Теперь заметим, что для нормы экстремальной функции (3.3.37) имеет место равенство

$$\|f_1\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \quad n > r,$$

то есть $f_1 \in \mathscr{D}^*_{n+1}$ и, тем более, $f_1 \in W^{(r)}H_q(\Psi_2)$. Поскольку для этой функции $\Lambda^*_{n-1,r,\rho}(f_1) \equiv 0$, то мы имеем

$$\|f_1 - \Lambda^*_{n-1,r,\rho}(f_1)\|_{H_{q,\rho}} = \|f_1\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (3.3.40)$$

Равенство (3.3.40) означает, что линейный полиномиальный оператор (3.3.32) является наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}H_q(\Psi_2)$ в пространстве Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$. Лемма 3.3.1 доказана.

Теперь из неравенства (3.3.34) и равенства (3.3.40) получаем оценку сверху для гельфандовского и линейного n-поперечников

$$d^n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) \le \lambda_n\left(W^{(r)}H_q(\Psi_2); H_{q,\rho}\right) \le$$

$$\le \mathscr{E}_{n-1}\Big(W^{(r)}H_q(\Psi_2); \Lambda^*_{n-1,r,\rho}; \mathscr{P}_{n-1}\Big)_{q,\rho} =$$

$$
= \sup \left\{ \|f - \Lambda^*_{n-1,r,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} : \ f \in W^{(r)} H_q(\Psi_2) \right\} =
$$

$$
= \|f_1 - \Lambda^*_{n-1,r,\rho}(f_1)\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \cdot \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \, \Psi_2 \left(\frac{\pi}{2(n-r)} \right),
$$

сопоставление которой с соотношениями (3.3.31) приводит к требуемым равенствам (3.3.33), чем и завершаем доказательство теоремы 3.3.5.

§3.4. Некоторые обобщения результатов параграфа 3.2 для классов функций, определяемых модулями непрерывности от производных по аргументу

Пусть $\Phi_1(x)$ $(x \geq 0)$ – произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi_1(0) = 0$. Используя функцию $\Phi_1(x)$ в качестве мажоранты, введём в рассмотрение следующий класс аналитических функций

$$W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu) =$$

$$= \left\{ f(z) \in H_{q,a}^{(r)} : \ \frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega(F_a^{(r)}; 2t)_q \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \leq \Phi_1(h) \right\},$$

где $h \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ $(\mu \geq 1)$ – произвольное фиксированное число. Очевидно, что при $\mu = 1$ имеем $W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; 1) \equiv W_a^{(r)} H_q(\Phi_1)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.4.1. *Если при заданном $\mu \geq 1$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ мажоранта Φ_1 удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi_1(h)}{\Phi_1(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{2\mu} \int\limits_0^1 (\sin nht)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right] dt, \tag{3.4.1}$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$b_n \left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_q \right) = d_n \left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_q \right) =$$

$$= E_{n-1} \left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu) \right)_{H_q} = \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \tag{3.4.2}$$

Множество мажорант $\{\Phi_1\}$, удовлетворяющих ограничению (3.4.1), не пусто.

Доказательство. В [5] доказано, что для любой функции $f(z) \in H_q$, у которой $f_a'(z) \in H_q$, $1 \leq q \leq \infty$, при любом $u \in (0, \pi/(2n)]$, $n \in \mathbb{N}$, наилучшее приближение функции $f(z)$ элементами $p_{n-1}(z) \in \mathscr{P}_{n-1}$ оценивается точным неравенством

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{1}{2}\int\limits_0^u \omega(F_a', 2t)_q \left\{1+\left[\left(\frac{\pi}{2nu}\right)^2-1\right]\sin\frac{\pi t}{2u}\right\}dt \qquad (3.4.3)$$

и знак равенства в (3.4.3) достигается на функции $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Если положить $\pi/(2nu) = \mu$ $(1 \le \mu < \infty)$, то неравенство (3.4.3) примет вид

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(F_a', 2t)_q \Big\{1+(\mu^2-1)\sin\mu n t\Big\}dt. \qquad (3.4.4)$$

Воспользовавшись доказанным в [124] неравенством

$$E_{n-1}(f)_q \le n^{-r+1}E_{n-1}(f_a^{(r-1)})_q,\ \ (r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty),$$

в качестве следствия из (3.4.4) для произвольного $f(z) \in H_{q,a}^{(r)}$ имеем

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{1}{2n^{r-1}}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(F_a^{(r)}, 2t)_q \Big\{1+(\mu^2-1)\sin\mu n t\Big\}dt. \qquad (3.4.5)$$

Учитывая определение класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$ для произвольной функции $f(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$, из неравенства (3.4.5) получаем

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{\pi}{4\mu n^r}\left(\frac{2\mu n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(F_a^{(r)}, 2t)_q \Big\{1+(\mu^2-1)\sin\mu n t\Big\}dt\right) \le$$

$$\le \frac{\pi}{4\mu n^r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \quad (1 \le \mu < \infty,\ n, r \in \mathbb{N},\ 1 \le q \le \infty). \qquad (3.4.6)$$

Из (3.4.6), учитывая неравенства (3.1.3), для бернштейновских и колмогоровских n-поперечников запишем оценку сверху

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu); H_q\right) \le d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu); H_q\right) \le$$

$$\le E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\right)_{H_q} \le \frac{\pi}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \qquad (3.4.7)$$

Для получения оценки снизу, равной правой части (3.4.7), в множестве $\mathscr{P}_n \cap H_q$ введём в рассмотрение $(n+1)$-мерную сферу полиномов

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathscr{P}_n : \ \|p_n\|_q = \frac{\pi}{4\mu n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \right\}$$

и докажем включение $S_{n+1} \subset W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)$. С этой целью, умножая неравенство (3.2.5) умножим на функцию $h^{-1}\left[1 + (\mu^2 - 1)\sin(\pi t/2h)\right]$ и проинтегрируем по переменной t в пределах от $0 \le t \le h$, затем заменим норму полинома радиусом сферы и положим $t = \tau h$. В итоге, после выполнения всех этих преобразований, с учётом ограничения (3.4.1), приходим к неравенству

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega((p_n)_a^{(r)}, 2t)_q \left\{1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right\} dt \le$$

$$\le 2n^r \|p_n\|_q \cdot \frac{1}{h}\int\limits_0^h (\sin nt)_* \left\{1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right\} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2\mu}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \int\limits_0^1 (\sin nht)_* \left\{1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2}\right\} dt \le \Phi_1(h),$$

откуда и следует включение $S_{n+1} \subset W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)$. Из этого включения и определения бернштейновского n-поперечника получаем оценки снизу

$$d_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_q\right) \ge b_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_q\right) \ge$$

$$\ge b_n\left(S_{n+1}; H_q\right) \ge \frac{\pi}{4\mu n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{3.4.8}$$

Требуемое равенство (3.4.2) следует из сопоставления оценки сверху (3.4.7) и оценки снизу (3.4.8). Покажем далее, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (3.4.1), не пусто. Для этого определим те значения $\alpha = \alpha(\mu)$ $(1 \le \mu < \infty)$, при которых мажоранта $\Phi_1^*(h) = h^\alpha$ удовлетворяет соотношению (3.4.1). Конкретизируя условие (3.4.1) для функции Φ_1^*, получаем

$$\left(\frac{2\mu nh}{\pi}\right)^\alpha \ge \frac{\pi}{2\mu}\int\limits_0^1 (\sin nh\tau)_* \left\{1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi\tau}{2}\right\} d\tau$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{2\mu nh}{\pi}\right)^{\alpha+1}\geq nh\int\limits_{0}^{1}(\sin nh\tau)_{*}\left\{1+(\mu^{2}-1)\sin\frac{\pi\tau}{2}\right\}d\tau. \tag{3.4.9}$$

Последнее неравенство при всех $\mu\in[1,\infty)$ для значений

$$\alpha(\mu)+1\stackrel{def}{=}\beta(\mu)=1+\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^{2}\int\limits_{0}^{1}t\cos\frac{\pi t}{2\mu}\left[1+(\mu^{2}-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right]dt$$

доказано в работе Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [5, с.346], а это значит, что в нашем случае неравенство (3.4.9) имеет место для

$$\alpha\stackrel{def}{=}\alpha(\mu)=\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^{2}\int\limits_{0}^{1}t\cos\frac{\pi t}{2\mu}\left[1+(\mu^{2}-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right]dt.$$

В частности, $\alpha(1)=(\pi/2)-1$, $\lim\limits_{\mu\to\infty}\alpha(\mu)=1$ и для всех $\mu\in[1,\infty)$ имеем $(\pi/2)-1\leq\alpha(\mu)\leq 1$, чем и завершаем доказательство теоремы 3.4.1.

Результат, полученный в теореме 3.4.1, распространим на более общее пространство $H_{q,\rho}$ $(1\leq q\leq\infty,\ 0<\rho\leq 1)$.

Теорема 3.4.2. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$ и мажоранта $\Phi_1(h)$ при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению (3.4.1). Тогда при всех $1\leq q\leq\infty$, $0<\rho\leq 1$ и $\mu\in\mathbb{R}_+$ $(\mu\geq 1)$ имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right)=d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\right)_{H_{q,\rho}}=\frac{\pi\rho^{n}}{4\mu n^{r}}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{3.4.10}$$

При этом: а) $L_{n+1}^{*}=span\{1,z,\cdots,z^{n}\}$ есть оптимальное подпространство для бернштейновского n-поперечника $b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right)$;

б) L_n^{*} является экстремальным подпространством для колмогоровского n-поперечника $d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right)$.

Доказательство. Переходя к верхним граням по всем функциям $f(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$, из неравенства (3.2.13) получаем

$$E_{n-1}\Big(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\Big)_{H_{q,\rho}} \le \rho^n E_{n-1}\Big(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\Big)_{H_q} \ (1\le q\le\infty,\ 0<\rho\le 1),$$

откуда в силу неравенств (3.1.3) и (3.4.7) имеем

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right) \le d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right) \le$$
$$\le E_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\right)_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{3.4.11}$$

С целью получения оценки снизу во множестве $\mathscr{P}_n \cap H_{q,\rho}$ введём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1}^* = \left\{p_n \in \mathscr{P}_n:\ \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right)\right\}$$

и докажем включение $S_{n+1}^* \subset W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$. Из неравенства (3.2.16) для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathscr{P}_n$ и любых $n,r\in\mathbb{N}$, $h\in\mathbb{R}_+$, с учётом ограничения (3.4.1), получаем

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega((p_n)_a^{(r)},2t)_q\left\{1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right\}dt \le$$
$$\le 2n^r\rho^{-n}\|p_n\|_{q,\rho}\int_0^1(\sin nht)_*\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right]dt \le$$
$$\le \frac{\pi}{2\mu}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right)\int_0^1(\sin nht)_*\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right]dt \le \Phi_1(h).$$

Последнее соотношение означает, что $S_{n+1}^* \subset W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$, а потому, согласно соотношению (3.1.3) и определению бернштейновского n-поперечника, имеем

$$d_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right) \ge b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu);H_{q,\rho}\right) \ge$$
$$\ge b_n\left(S_{n+1}^*;H_{q,\rho}\right) \ge \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{3.4.12}$$

Требуемые равенства (3.4.10) следуют из сопоставления неравенств (3.4.11) и (3.4.12).

Справедлива следующая

Теорема 3.4.3. *Если при заданном $\mu \geq 1$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ мажоранта $\Phi_1(h)$ удовлетворяет ограничению (3.4.1), то и при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства*

$$\delta_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu); H_{q,\rho}\right) = \mathscr{E}_{n-1}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu); \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}; \mathscr{P}_n\right)_{H_{q,\rho}} :=$$

$$:= \sup\Big\{\Big\|f - \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f)\Big\|_{H_{q,\rho}} : \ f \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\Big\} =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{3.4.13}$$

Здесь $\delta_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $d^n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$; линейный полиномиальный оператор $\widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f)$ определяется равенством

$$\widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f;z) \overset{def}{=} c_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1 + \left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,n}\left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right) - 1\right]\right\}c_k z^k, \tag{3.4.14}$$

где

$$\gamma_{k,n} \overset{def}{=} n\mu \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kt \cos(\mu n t)dt.$$

При этом: а) линейный полиномиальный оператор (3.4.14) является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$);

б) $L_*^n = \{f \in H_{q,\rho} : f^{(k)}(0) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ является экстремальным подпространством коразмерности n для гельфандовского n-поперечника $d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu); H_{q,\rho}\right)$;

в) Подпространство $L_n^* = span\{1, \dots, z^{n-1}\}$ является экстремальным для линейного n-поперечника $\lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu); H_{q,\rho}\right)$.

Доказательство. Для доказательства в силу неравенств (3.1.3) достаточно построить наилучший линейный метод приближения функций класса $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$, чтобы оценить линейный n-поперечник сверху. В работе [30, с.669] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in H_{q,a}^{(r)}$ выполняется неравенство

$$\|f - \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} \le$$

$$\le \frac{\rho^n}{2n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(F_a^{(r)}, 2t)_q \Big[1 + (\mu^2 - 1)\sin(\mu n t)\Big] dt. \tag{3.4.15}$$

Заметим, что если функция $f(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$, то из правой части (3.4.15) имеем

$$\frac{\rho^n}{2n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(F_a^{(r)}, 2t)_q \Big[1 + (\mu^2 - 1)\sin(\mu n t)\Big] dt =$$

$$= \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r} \left(\frac{2\mu n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega(F_a^{(r)}, 2t)_q \Big[1 + (\mu^2 - 1)\sin(\mu n t)\Big] dt \right) \le$$

$$\le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right), \quad (n, r \in \mathbb{N},\ \mu \ge 1,\ 0 < \rho \le 1). \tag{3.4.16}$$

Из неравенств (3.4.15) и (3.4.16) следует, что для произвольной функции $f(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$ имеет место неравенство

$$\|f - \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{3.4.17}$$

Покажем, что если мажоранта Φ_1 удовлетворяет ограничению (3.4.1), то в классе $W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)$ существует функция, для которой неравенство (3.4.17) обращается в равенство. С этой целью рассмотрим функцию

$$\mathrm{g}_0(z) = \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) z^n$$

и покажем, что $\mathrm{g}_0(z) \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)$. При доказательстве теоремы 3.4.2, мы установили, что шар S^*_{n+1} принадлежит классу $W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)$. Так как в нашем случае

$$\|\mathrm{g}_0\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right),$$

то $\mathrm{g}_0(z) \in S^*_{n+1}$. Следовательно, $\mathrm{g}_0(z) \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)$. При этом из представления (3.4.14) следует, что $\widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(\mathrm{g}_0) \equiv 0$, а потому

$$\|\mathrm{g}_0 - \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}(\mathrm{g}_0)\|_{H_{q,\rho}} = \|\mathrm{g}_0\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{3.4.18}$$

Из неравенств (3.1.3) и равенства (3.4.18) вытекает, что при выполнении ограничения (3.4.1) на мажоранту Φ_1 имеют место соотношения

$$\delta_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right) \le$$

$$\le \mathscr{E}_{n-1}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); \widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}; \mathscr{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{3.4.19}$$

Из (3.4.18) и (3.4.19) следует, что линейный оператор $\widetilde{\Lambda}_{n-1,r-1,\rho}$ есть наилучший линейный метод приближения для класса $W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$, $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$.

Оценим теперь сверху гельфандовский n-поперечник. Согласно определению гельфандовского n-поперечника для произвольного элемента $f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu) \cap L^n_*$ в силу (3.4.14), (3.4.17) и соотношений

$$c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots n-1,$$

имеем

$$d^n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho}\right) \le \sup\Big\{\, \|f\|_{H_{q,\rho}} :\ f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu) \cap L^n_* \Big\} \le$$

$$\le \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r}\, \Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{3.4.20}$$

Сопоставляя неравенства (3.4.12), (3.4.19) и (3.4.20), убеждаемся в том, что подпространство

$$L_*^n = \{f: \ f \in H_{q,\rho}, \ f^{(k)}(0) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

коразмерности n будет экстремальным для гельфандовского n-поперечника $d^n \left(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); H_{q,\rho} \right)$, чем и завершаем доказательство теоремы 3.4.3.

Результат, полученный в теореме 3.4.3, обеспечивает возможность вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на классах функций $W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)$, а именно имеет место следующая

Теорема 3.4.4. *Для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$ $(\mu \geq 1)$ и $1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства*

$$\Im_n \Big(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu) \Big) =$$

$$= \sup \Big\{ \, |c_n(f)| : \ f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu) \, \Big\} = \frac{\pi}{4\mu n^r} \, \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \qquad (3.4.21)$$

Доказательство. В самом деле, используя линейный оператор (3.4.14), коэффициенты Тейлора $c_n(f)$ произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U)$ представим в виде

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = \rho} f(\zeta) \zeta^{-n-1} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi \rho^n} \int\limits_0^{2\pi} \Big[f(\rho e^{it}) - \widetilde{\Lambda}_{n-1, r-1, \rho}(f; \rho e^{it}) \Big] e^{-int} dt.$$

Отсюда, применяя неравенство Гёльдера и соотношение (3.4.13), для произвольной функции $f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu)$ получаем

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{\rho^n} \, \mathscr{E}_{n-1} \Big(W_a^{(r)} H_q(\Phi_1; \mu); \widetilde{\Lambda}_{n-1, r-1, \rho}; \mathscr{P}_{n-1} \Big) \leq \frac{\pi}{4\mu n^r} \, \Phi_1 \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right).$$

Из полученного неравенства сразу вытекает, что

$$\Im_n\Big(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\Big) \leq \frac{\pi}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \qquad (3.4.22)$$

Для получения соответствующей оценки снизу рассмотрим введённую нами при доказательстве теоремы 3.4.3 функцию

$$\mathrm{g}_0(z) = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) z^n \in W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu),$$

для которой, согласно определению величины $\mathscr{L}_n(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu))$, получаем

$$\Im_n\Big(W_a^{(r)}H_q(\Phi_1;\mu)\Big) \geq |c_n(\mathrm{g}_0)| = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\,\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \qquad (3.4.23)$$

Равенства (3.4.21) вытекают из сопоставления оценки сверху (3.4.22) и оценки снизу (3.4.23), чем и завершаем доказательство теоремы 3.4.4.

Список литературы

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. 2004. Т.76, №6. С.803-811.

2. Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Доклады АН ТаджССР. 1985. Т.28, №6. С.309-313.

3. Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. 1986. С.3-10.

4. Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функций // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. 1986. С.91-101.

5. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. 1986. Т.40, №3. С.341-351.

6. Арестов В.В., Попов В.Ю. Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Известия вузов. 1995, №8. С.13-20.

7. Ахиезер Н.И., Крейн М.Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // ДАН СССР. 1937. Т.15. С.107-112.

8. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука. 1965. 406 с.

9. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки, 1986. Т.39, №5. С.651-664.

10. Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т.5. С.183-198.

11. Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона – Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Матем. заметки. 1999. Т.65, №6. С.928-932.

12. Бабенко А.Г. О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т.7, №1. С.30-46.

13. Бабенко А.Г., Долматова Н.В., Крякин Ю.В. Точное неравенство Джексона со специальным модулем непрерывности // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т.18, №4. С.51-67.

14. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. 1958. Т.22, №5. С.631-640.

15. Балаганский В.С. Точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве L^2 на периоде // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т.15, №1. С.79-101.

16. Baraboshkina N.A. The Least Constant in Jackson's Inequality for Best Approximations of Functions in L^2 by Finite-Dimensional Subspaces // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 2004, №1. P. S128-S136.

17. Бекенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир. 1965. 276 с.

18. Белый В.И. К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. журнал, 1967. Т.19, №2. С.104-108.

19. Белый В.И., Двейрин М.З. О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // В кн: Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наукова думка. 1971. №4. С.37-54.

20. Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды Матем. ин-та АН СССР. 1967. Т.88. С.3-16.

21. Бернштейн С.Н. Экстремальные свойстве полиномов. – М., ОНТИ. 1937.

22. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством полиномов данной степени // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1952. Т.1. С.8-105.

23. Boas R.P. Entire functions. – New York. 1954.

24. Butzer P.L., Dyckhoff H., Goerlich E., Stens R.L. Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Can. J. Math. 1977. V.29. P.781-793.

25. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Укр. матем. журнал. 1989. Т.41, №26. С.799-802.

26. Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т.57, №1. С.30-39.

27. Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки, 1999. Т.65, №2. С.186-193.

28. Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Матем. заметки. 1999. Т.66, №4. С.494-499.

29. Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Матем. заметки. 2001. Т.70, №3. С.334-345.

30. Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. 2002. Т.72, №5. С.665-669.

31. Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. матем. журнал. 2004. Т.56, №9. С.1155-1171.

32. Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2 approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East Journal on Approx., 2004. V.10, №1-2. P.27-39.

33. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. 2004. Т.56, №11. С.1458-1466.

34. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

35. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-19.

36. Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia. 2008. V.14, №4. P.411-421.

37. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. 2009. Т.85, №3. С.323-329.

38. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2009. Т.86, №3. С.328-336.

39. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сб., 2010. Т.201, №8. С.3-22.

40. Вакарчук С.Б., Доронин В.Г. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями конечной степени на прямой и точные значения средних поперечников функциональных классов // Укр. матем. журнал. 2010. Т.62, №8. С.1032-1043.

41. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т.92, №4. С.497-514.

42. Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси I // Український математичний вїсник. 2012. Т.9, №3. С.401-429.

43. Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси II // Український математичний вїсник. 2012. Т.9, №4. С.578-602.

44. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ и средних ν-поперечниках некоторых функциональных классов // Изв. вузов. Математика. 2014. №7. С.30-48.

45. Vallee-Poussin Ch.J. de la. Sur les polinômes d'approximation à une variable complexe // Bull. Acad Roy Belg. CI. Sc., 1911. P.199-211.

46. Васильев С.Н. О неравенстве Джексона-Стечкина в L_2 // Теория приближения функций и операторов: тез. докл. Междунар. конф., посвящ.

80-летию со дня рождения С.Б. Стечкина. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та. 2000. С.49-50.

47. Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т.385, №1. С.11-14.

48. Weierstrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reelen Veränderlichen // Der Sitzungsberichte der Königl. Akademie der Wissennschaften, 1885. S.633-639. P.789-805.

49. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff der differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahresschriff der Naturschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. V.62. P.296-302.

50. Горбачев Д.В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т.68, №2. С.179-187.

51. Горбачев Д.В. Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. 2-е изд., перераб. и доп. Тула: «Гриф и К». 2005. 192 с.

52. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М. ГИТТЛ. 1954. 328 с.

53. Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherunger stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung // Preisschrift und Dissertation. Universitat Göttingen. 1911.

54. Davis Ph.J. Interpolation and Approximation. – New York, Blaisdell, publ. Company.

55. Двейрин М.З. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Науково думка. 1975. Вып. 6. С.41-54.

56. Двейрин М.З. Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1975. Вып. 23. С.32-46.

57. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наукова думка. 1983. С.62-73.

58. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР, сер. матем., 1953. Т.17. С.135-162.

59. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука. 1977. 511 с.

60. de Boor C., Schoenberg I.J. Cardinal interpolation and spline functions VIII // Lect. Notes Math., 1976. V.501. P.1-79.

61. Ефимов А.В. Приближение функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959. Т.23, №1. С.115-134.

62. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. 1999. Т.65, №6. С.816-820.

63. Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. 1967. Т.201. С.263-266.

64. Жук В.В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. матем. журнал. 1971. Т.12, №6. С.1283-1291.

65. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. В 2 ч. – М.: Изд-во Мир. 1965. Т.1. 616 с.; Т.2. 537 с.

66. Ибрагимов И.И., Насибов Ф.Г. Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. 1970. Т.194, №5. С.1013-1016.

67. Ибрагимов И.И. Теория приближения целыми функциями. – Баку: Элм. 1979. 468 с.

68. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: ТулГУ. 1995. 192 с.

69. Иванов В.И., Чертова Д.В., Лю Юнпин. Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1, 1]$ со степенным весом // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14, №3. С.112-126.

70. Иванов В.И. Точные L_2-неравенства Джексона – Черных – Юдина в теории приближений // Изв. Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2012. №3. С.19-28.

71. Ivanov K.G. On a new characterization of functions. **I**. Serdica. 1982. V.8, №3. P.262-279.

72. Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи матем. наук. 1974. Т.XXIX, №3(177). С.161-178.

73. Quade E.S. Trigonometric approximation in the mean // Duke Math., Journ., 1937. V.3. P.529-543.

74. Козко А.И. Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Изв. РАН. Серия математическая. 1998. Т.62, №6. С.125-142.

75. Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math., 1936. V.37. P.107-110.

76. Колмогоров А.Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале // Учен. зап., МГУ, „Математика“ 3, 1939. Вып. 30. С.3-13.

77. Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. 1962. Т.145, №3. С.514-516.

78. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука. 1976. 320 с.

79. Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. 1982. Т.32, №5. С.669-674.

80. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наукова думка. 1982. 252 с.

81. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. 1987. 424 с.

82. Кусис П. Введение в теорию пространств H_p. – М.: Мир. 1984. 256 с.

83. Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchÿee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. math. de France. 1910. V.38. P.184-210.

84. Лигун А.А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. 1973. Т.14, №1. С.21-30.

85. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1978. Т.24, №6. С.785-792.

86. Лигун А.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. 1985. Т.38, №2. С.248-256.

87. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1988. Т.43, №6. С.757-769.

88. Lorentz G.G. Approximation of Functions. – New York, Holt, Rinehalt and Winston. 1966.

89. Магарил-Ильяев Г.Г. Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Матем. сб. 1991. Т.182, №11. С.1635-1656.

90. Магарил-Ильяев Г.Г. Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // ДАН СССР. 1991. Т.318, №1. С.35-38.

91. Магарил-Ильяев Г.Г. О наилучшем приближении сплайнами классов функций на прямой // Труды МИАН СССР. 1992. Т.194. С.148-159.

92. Miloradovic S. Aproksimacje funkcija Fourier-ovih sumama i gornja granica Fourier-ovih koeficijenata // Magistarski rad. Beograd. 1977.

93. Милорадович С. О верхних гранях коэффициентов Фурье и некоторых более общих функционалов // Матем. заметки. 1982. Т.32, №5. С.707-720.

94. Насибов Ф.Г. О приближении в L_2 целыми функциями // Докл. АН Азербайджанской ССР. 1986. Т.XLII, №4. С.3-6.

95. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.: ГИТТЛ. 1949. 688 с.

96. Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. МИАН СССР. 1945. Т.15. С.1-76.

97. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946. Т.10. С.295-332.

98. Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени // Тр. МИАН СССР. 1951. Т.38. С.244-278.

99. Никольский С.М. Наилучшее приближение элементами выпуклых множеств в линейных нормированных пространствах // Уч. зап. Калининск. гос. пед. ин-та. 1963. Т.29. С.85-119.

100. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука. 1969. 480 с.

101. Осипенко К.Ю. Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью // Матем. сборник. 1982. Т.118(160), №3(7). С.350-370.

102. Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Матем. заметки. 1991. Т.49, №4. С.95-104.

103. Попов В.Ю. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. №6. С.65-73.

104. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. 252 p.

105. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. 1994. Т.185, №8. С.81-102.

106. Рыбасенко В.Д., Рыбасенко И.Д. Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики. – М.: Наука. 1987. 416 с.

107. Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости. – М.: Мир. 1988.

108. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наукова думка. 1981. 340 с.

109. Степанец А.И., Сердюк А.С. Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Укр. матем. журнал. 2002. Т.54, №1. С.106-124.

110. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Серия матем., 1951. Т.15. С.219-242.

111. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами // УМН. 1954. Т.9, №1. С.133-134.

112. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956. Т.20. С.643-648.

113. Стечкин С.Б. Замечание к теореме Джексона // Труды МИАН. 1967. Т.88. С.17-19.

114. Стечкин С.Б. О приближении периодических функций суммами Фавара // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1971. Т.109. С.26-34.

115. Стечкин С.Б. Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука. 1976. 248 с.

116. Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. 1975. Т.98(140), №3(11). С.395-415.

117. Sun Yongsheng. On optimal interpolation for differentiable function class. I // Approx. Theory and its Appl. 1986. V.2, №4. P.49-54.

118. Сунь Юн-шен, Ли Чунь. Наилучшее приближение некоторых классов гладких функций на действительной оси сплайнами высшего порядка // Матем. заметки. 1990. Т.48, №4. С.100-109.

119. Tabersky R. Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Commentat. Math. 1976-1977. V.19. P.389-400.

120. Тайков Л.В. О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. 1963. Т.VXIII. Вып. 4(112). С.183-189.

121. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т.1, №2. С.155-162.

122. Тайков Л.В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // Analysis Mathematica. 1976. V.2, №1. P.77-85.

123. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

124. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т.22, №2. С.285-295.

125. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. 1977. Т.22, №4. С.535-542.

126. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т.25, №2. С.217-223.

127. Теляковский С.А. Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. матем. журнал. 1963. Т.4, №6. С.1404-1411.

128. Теляковский С.А. Оценки снизу интегрального модуля непрерывности функции через её коэффициенты Фурье // Матем. заметки. 1992. Т.52, №5. С.107-112.

129. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Фзматгиз. 1960. 624 с.

130. Тихомиров В.М. Об ε-энтропии некоторых классов аналитических функций // ДАН СССР. 1957. Т.117, №2. С.191-194.

131. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. 1960. Т.15, №3(93). С.81-120.

132. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. 1976. 325 с.

133. Тихомиров В.М. Об аппроксимативных характеристиках гладких функций // Тр. конф. по дифферен. уравнениям и вычисл. математике. Новосибирск: Наука. 1980. С.183-188.

134. Tikhonov S. On moduli of smoothness of fractional order // Real Analysis Exchange. 2004-2005. V.30(2). P.507-518.

135. Ульянов П.Л. О приближении функций // Сиб. матем. журнал. 1964. Т.5. С.418-437.

136. Ульянов П.Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб., 1970. Т.81, №1. С.104-131.

137. Фавар Ж. Sur les meilleurs prosedes d'approximation de certains classes de functions par des polynomes trigonometriques // Bull Sci. Math., 1937. V.61. P.209-224; P.243-256.

138. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успех. мат. наук. 1990. Т.45, №5. С.197-198.

139. Farkov Yu.A. n-Widths, Faber expansion, and camputation of analytic functions // Journ. Complexity. 1996. V.2, №1. P.58-79.

140. Fisher S.D. Quantitative approximation theory // Amer. Math. Monthly. 1978. V.85. P.318-332.

141. Fisher S.D., Miccelli C.A. The n-Widths of sets analytic function // Duke Math. J., 1980. V.47, №4. P.789-801.

142. Fisher S.D., Stessin M.I. The n-widths of the unit ball of H^q // Journ. Approx. Theory. 1991. V.67, №3. P.347-356.

143. Haar A. Die Minkowskische Geometrie und die Annaherung au Stetige Funktionen // Math. Ann., 1918. V.78. P.294-311.

144. Hardy G.G., Littlewood J.E., Polya G. Inequality. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press. 1952. 346 p.

145. Чебышёв П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым представлением функций (1859) // Собр. соч., Т.II. – М.-Л. Изд-во АН СССР. 1947. С.151-235.

146. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т.2, №5. С.513-522.

147. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

148. Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leq p < 2)$ с точной константой // Труды МИРАН. 1992. Т.198. С.232-241.

149. Шабозов М.Ш. О поперечниках в пространстве Харди H_2 классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // ДАН РТ. 1998. Т.41, №9. С.48-53.

150. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. 2000. Т.68, №5. С.796-800.

151. Шабозов М.Ш., Мамадов Р. Наилучшее приближение целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ // Вестник Хорогского госуниверситета. 2001. Сер.1, №4. С.76-81.

152. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // ДАН России. 2002. Т.383, №2. С.171-174.

153. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_p, $1 \leq p \leq \infty$ // ДАН России. 2006. Т.410, №4. С.461-464.

154. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // ДАН России. 2007. Т.412, №4. С.466-469.

155. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2009. №3(136). С.7-23.

156. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Мамадов Р. О точных значениях средних n-поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. 2009. Т.52, №4. С.247-254.

157. Шабозов М.Ш. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения n-поперечников некоторых классов функций из L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2010. №4(141). С.7-24.

158. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

159. Шабозов М.Ш. Точные неравенства типа Джексона – Стечкина для 2π-периодических функций в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. 2011. Т.63, №10. С.1040-1048.

160. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

161. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал. 2011. Т.52, №6. С.1414-1427.

162. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory. 2012. V.164. Issue 1. P.869-878.

163. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. О точных значениях средних ν-поперечников некоторых классов целых функций // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т.18, №4. С.315-327.

164. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. Tomus 38, №2. P.154-165.

165. Шабозов М.Ш., Темурбекова С.Д. Значения поперечников классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Известия ТулГУ. 2012. Вып.3. С. 60-68.

166. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана. – ДАН России. 2013. Т.450, №5. С.518-521.

167. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона – Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // ДАН России. 2013. Т.451, №6. С.625-628.

168. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники некоторых классов функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2014. Т.57, №2. С.97-102.

169. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т.43, №1. С.125-129.

170. Scheick J.T. Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc., 1966. V.17. P.1238-1243.

171. Юдин В.А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах // Докл. АН СССР, 1980, т.251, №1, с.54-57.

172. Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т.29, №2. С.309-315.

173. Юдин В.А. К теоремам Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1987. Т.41, №1. С.43-47.

174. Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сб. научн. трудов. Калининский гос. ун-т. Калинин. 1988. С.100-114.

175. Юсупов Г.А. Минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // ДАН РТ. 2007. Т.50, №11-12. С.811-818.

176. Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в простанстве $L_2[0, 2\pi]$ и точные значения n-поперечников // ДАН РТ. 2008. Т.51, №11. С.803-809.

177. Юсупов Г.А. О точных значениях поперечников некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // ДАН РТ. 2008. Т.51, №12. С.810-817.

178. Юсупов Г.А. О некоторых экстремальных задачах наилучшего приближения в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2009. №1(134). С.18-30.

179. Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ // ДАН РТ. 2009. Т.52, №10. С.749-758.

180. Юсупов Г.А. Точные значения средних ν-поперечников некоторых классов целых функций // ДАН РТ. 2010. Т.53, №2. С.85-93.

181. Юсупов Г.А. Наилучшие приближения в $L_2[0, 2\pi]$ и точные значения n-поперечников // «*Современные проблемы математического анализа и их приложений*» – Материалы международной научной конференции, посвященной 60-летию академика АН Республики Таджикистан К.Х.Бойматова (Душанбе, 23-24 июня 2010 г.). С.119-120.

182. Юсупов Г.А. Точные значения средних поперечников некоторых классов функций в $L_2(-\infty; +\infty)$ // ДАН РТ. 2010. Т.53, №4. С.241-247.

183. Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения и точные значения поперечников некоторых классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ // ДАН РТ. 2010. Т.53, №8. С.588-594.

184. Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значение поперечников множеств в пространстве L_2 // ДАН РТ. 2011. Т.54, №3. С.173-178.

185. Юсупов Г.А. О значениях n-поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 // «*Современные проблемы математики и её приложения*» – Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан Э.М.Мухамадиева (Душанбе, 28-30 июня 2011 г.). С.150-151.

186. Юсупов Г.А. Оптимизация неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // «*Современные проблемы математического анализа и теории функций*» – Материалы международной научной конференции, посвященной 60-летию академика АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозова (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.). С.206-218.

187. Юсупов Г.А. Точные неравенства типа Джексона – Стечкина и поперечники функциональных классов в L_2 // Изв. Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2012. №2. С.124-135.

188. Юсупов Г.А. Неравенства типа Джексона – Стечкина и поперечники классов функций из L_2 // Четвёртая международная конференция «*Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Об-*

щая топология. Проблемы математического образования» посвящённая 90-летию члена-корреспондента РАН, академика Европейской Академии наук, профессора Л.Д.Кудрявцева (Москва, 25-29 марта 2013 г.). С.139-140.

189. Юсупов Г.А. О наилучшем приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // «*Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений*» – Материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию академика АН Республики Таджикистан Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.). С.147-151.

190. Юсупов Г.А. О наилучших среднеквадратических приближениях на всей оси целыми функциями экспоненциального типа // ДАН РТ. 2013. Т.56, №3. С.192-195.

191. Yusupov G.A. Best polynomial approximations and widths of certain classes of functions in the space L_2 // Eurasian Math. J. 2013. V.4, №3. P.120-126.

192. Юсупов Г.А. Точные значения поперечников некоторых классов функций из L_2 и минимизация констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т.20, №5. С.106-116.

193. Юсупов Г.А. О наилучших линейных методах приближения функций в пространстве Харди $H_{q,R}$, $0 < R \leq 1$ // ДАН РТ. 2013. Т.56, №12. С.946-953.

194. Юсупов Г.А. Неравенства типа Джексона-Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций из L_2 // Analysis Mathematica. 2014. V.40. Issue 1. P.69-81.

195. Юсупов Г.А. Наилучшие среднеквадратические приближения на всей оси целыми функциями экспоненциального типа и значения поперечников некоторых классов функций // Изв. Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2014. Ч.1, №1. С.98-116.

196. Юсупов Г.А. Наилучшие линейные методы приближения аналитических в круге функций и точные значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Харди // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания" – посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан, 28-29 июня 2014 г. – Худжанд: Изд-во „Меъроч", 2014. – С.106-116.

197. Юсупов Г.А. О наилучших среднеквадратических приближениях на всей оси целыми функциями экспоненциального типа и точные значения поперечников функциональных классов // Материалы международной научной конференции «*Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений*» (Душанбе, 27-28 апреля 2015). С.69-71.

198. Юсупов Г.А. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих пространству Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty, 0 < \rho \le 1)$ // Тезисы докладов международной конференции «*Функциональные пространства и теория приближения функций*», посвящённой 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского (Москва. МИАН. 25-29 мая 2015 г.). С.254.

199. Юсупов Г.А. Структурные и конструктивные характеристики в L_2 и значения поперечников некоторых функциональных классов // Изв. Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2015. Вып.3. С.127-144.

200. Юсупов Г.А. О структурных характеристиках функций из L_2 и точных значениях поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. 2015. Т.58, №2. С.101-105.