ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу

Юсупова Гулзорхон Амиршоевича

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Работа посвящена решению одного из основных вопросов теории аппроксимации — нахождению наилучших средств приближения данного класса функций. Началу современной теории приближений положили работы Чебышева пятидесятых годов 19-го века о наилучшем приближении непрерывной функции на отрезке полиномами фиксированной степени. Впоследствии эта тематика — приближение индивидуального элемента фиксированным средством приближения (алгебраическими и тригонометрическими полиномами, рациональными функциями и др.) — активно развивалась учениками Чебышева. В тридцатые годы прошлого века возникла задача об аппроксимации класса функций фиксированным средством приближения, и вскоре А. Н. Колмогоров поставил задачу о нахождении среди всех подпространств размерности n того, которое приближает данный функциональный класс наилучшим образом. Величина, характеризующая это приближение, получила название n-поперечника по Колмогорову. До пятидесятых годов эта тематика не получила серьезного развития. Но затем, после появления книги Шеннона по математической теории информации, интерес к вычислению поперечников по Колмогорову и их различным обобщениям и модификациям (поперечники по Гельфанду, по Бернштейну, линейные поперечники, проекционные поперечники и др.) резко возрос. Кроме того, возник интерес к так называемым усредненным характеристикам некомпактных классов функций.

Диссертационная работа является весьма плодотворным развитием направлений исследований, связанных с наилучшими приближениями различных классов функций, и тем самым является актуальной.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Во введении приведен исторический обзор работ по тематике диссертации и сформулированы основные ее результаты.

Первая глава посвящена наилучшим приближениям классов периодических функций, определяемых через модуль непрерывности m-ого порядка r-ой производной функции, тригонометрическими полиномами в метрике L_2. Основной результат главы — неравенство между наилучшими приближениями функций в L_2 и усредненным с весом модулем непрерывности r-ой производной этих функций m-ого порядка также в метрике L_2. Это утверждение в качестве частных случаев содержит ряд хорошо известных ранее результатов. Кроме того, в качестве следствий находятся точные значения различных поперечников. Приведем один результат о точном значении n–поперечника по Колмогрову. Напомним, что n-поперечником по Колмогорову множества A в нормированном пространстве X называется величина

$$d_n(A, X) = \inf_{L_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|_X,$$

где первая нижняя грань берется по всем подпространствам $L_n \subset X$, размерность которых не превосходит n. Поперечники вычисляются, в частности, для следующего класса функций

$$W_p^{(r)} = \left\{ f(\cdot) \in L_2^{(r)} : \int_0^h \omega_m^p (f^{(r)}; t)_2 \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t \, dt \le 1 \right\},$$

где $L_2^{(r)}$ — пространство 2π-периодических функций, у которых $(r-1)$-ая производная абсолютно непрерывна, а r-ая производная принадлежит L_2, $\omega_m(f^{(r)}; t)_2$ — модуль непрерывности m-ого порядка $f^{(r)}$ в L_2.

Теорема 1. *Пусть m, n, r — натуральные числа, $0 < p \le 2$, $0 \le \gamma \le rp - 1$, $0 < \beta \le \pi$ и $0 < h \le \pi/n$. Тогда справедливы равенства*

$$\begin{aligned} d_{2n}(W_p^{(r)}, L_2) &= d_{2n-1}(W_p^{(r)}, L_2) \\ &= 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t \, dt \right)^{-1/p}. \end{aligned}$$

Вторая глава посвящена наилучшим приближениям функций, заданным на вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа и нахождению точных значений средних поперечников различных классов функций. Средний ν-поперечник, скажем, по Колмогорову определяется аналогично обычному n-поперечнику по Колмогорову, но с заменой подпространств размерности n на подпространства средней размерности ν, определение которой вполне естественно. В этой главе, как и в первой, сначала доказывается неравенство между наилучшими приближениями функций на прямой целыми функциями экспоненциального типа в метрике L_2 и усредненными модулями непрерывности m-ого порядка их r-ых производных также в метрике L_2. В частности, в качестве следствий, получены точные значения для средних поперечников. Приведем один результат такого сорта, касающийся точного вычисления среднего поперечника следующего класса функций на $\mathbb{R}$

$$W_p^{(r)} = \left\{ f(\cdot) \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}) : \int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \psi(t)\, dt \le 1 \right\},$$

где $\Omega_m(f^{(r)}; t)_2$ — усредненный модуль непрерывности m-ого порядка функции $f^{(r)}$ в $L_2(\mathbb{R})$, ψ — суммируемая неотрицательная и не равная нулю функция на $[0, h]$ $(0 < h \le \pi)$, $0 < p \le 2$.

Приведем саму формулу для среднего ν-поперечника по Колмогорову, чтобы продемонстрировать сам тип результата, не оговаривая предположений (они вполне естественны), когда это верно

$$\overline{d}_\nu(W_p^{(r)}, L_2(\mathbb{R})) = 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/p} \left(\int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} \psi(t/\pi\nu)\, dt \right)^{-1/p}$$

Третья глава посвящена наилучшим линейным приближениям классов аналитических функций и вычислением точных значений n-поперечников классов функций, принадлежащих пространству Харди на единичном круге.

К тексту диссертации можно предъявить довольно много претензий, во-первых, редакционного характера (описки, опечатки), а во-вторых, не всегда четкие формулировки утверждений. Не буду здесь перечислять все замечания, ибо это займет много места. Отмечу еще, что стиль изложения материала не самый удачный: идут последовательные формулировки утверждений и их доказательства. Следовало бы, на мой взгляд, четко отделить основные утверждения, пояснив идею их доказательства, от второстепенных. В работе используется большое число обозначений. Нужно было бы сделать отдельный их список. Но, тем не менее, все эти замечания не умоляют высокой оценки полученных автором результатов.

Представленная диссертация — итог весьма плодотворных исследований. Все результаты являются новыми, получены автором лично. Основные утверждения работы были своевременно опубликованы в ведущих российских и зарубежных изданиях, неоднократно обсуждались на различных международных и российских научных конференциях и семинарах. Автореферат диссертации объективно и в полной мере отражает содержание работы. Это позволяет утверждать, что диссертационная работа “Некоторые вопросы наилучших приближений и значения поперечников функциональных классов” удовлетворяет требованиям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемых к докторским диссертациям, а ее автор Юсупов Гулзорхон Амиршоевич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

Профессор кафедры общих проблем управления
механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждение высшего образования
"Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова",
доктор физико-математических наук,
профессор Г. Г. Магарил-Ильяев

Место работы: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова"
Адрес электронной почты: magaril@mech.math.msu.su
Телефон: +7 (495) 939-56-32

Подпись Г. Г. Магарил-Ильяева заверяю.

И. о. декана механико-математического факультета МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков