ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу

Юсупова Гулзорхона Амиршоевича

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации исследуются наилучшие методы приближения гладких и аналитических функций, вычисляются точные константы в неравенствах типа Джексона, находятся точные значения n-поперечников некоторых классов гладких и аналитических функций, задаваемых модулями непрерывности.

Получение точных констант, а в более общем виде — точные решения экстремальных задач, играет важную роль в теории приближений, т.к. чаще всего каждая новая точно решенная экстремальная задача приводит к некоторому новому взгляду на саму природу задач подобного вида, новому подходу к решению или новому методу решения. Н. П. Корнейчук, который, в частности, первый получил точные константы в неравенстве Джексона, в своей монографии "Точные константы в теории приближения" писал: "... получение результата с точной константой в задаче аппроксимации обычно сопровождается появлением нового подхода, в основе которого лежит некоторый принципиально новый факт (например, новое точное неравенство), часто имеющий простой геометрический смысл. Как правило, вскоре обнаруживается, что этот факт прокладывает пути к решению других, иногда далеких по содержанию задач."

Если говорить о теории поперечников, которой в диссертации уделяется большое внимание, то она возникла в 50-е годы XX века под влиянием работ А.Н.Колмогорова при изучении вопросов о сравнении разных средств приближения и отыскании оптимальных методов аппроксимации и восстановления функций. Актуальность этой тематики в настоящее время связана с применениями поперечников в общей теории оптимального восстановления, в частности, в задачах, возникающих при обработке сигналов.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации — 229 страниц.

Во введении приведен обзор работ по теме диссертации и сформулированы основные полученные в ней результаты.

В первой главе диссертации изложены результаты автора о наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами на классах, задаваемых модулями непрерывности m-го порядка r-ой производной функции. Для этих же классов вычислены точные значения n-поперечников.

Пусть $L_2^{(r)}$ — множество 2π-периодических функций $f \in L_2([0,2\pi])$, у которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а $f^{(r)} \in L_2([0,2\pi])$. Для $f \in L_2([0,2\pi])$ через $E_{n-1}(f)_2$ обозначается наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не более $n-1$ в метрике $L_2([0,2\pi])$, модуль непрерывности m-го порядка определяется равенством

$$\omega_m(f,t) = \sup_{|h|\le t} \Delta_h^m(f),$$

где

$$\Delta_h^m(f) = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(x+kh)\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Автор исследует величину

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;h) = \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}}; \tag{1}$$

здесь $m,n,r \in \mathbb{N}$, $p \in (0,+\infty)$, φ — весовая функция, $h \in (0,\pi/n]$ (считается, что $0/0=0$). В различных частных случаях эта величина исследовалась многими авторами. Наиболее общий случай, который, тем не менее, вытекает из результатов диссертанта, содержался у А. А. Лигуна ($p=2$).

Заметим, что в силу однородности задача (1) эквивалентна задаче о нахождении наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами порядка не более $n-1$ на классе

$$W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi) = \left\{ f\in L_2^{(r)} : \int_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt \le 1\right\},$$

т.е. задаче о нахождении величины

$$\sup_{f\in W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi)} E_{n-1}(f)_2.$$

На мой взгляд, постановка в таком виде является наиболее естественной, хотя, безусловно, вид (1) используется большинством авторов, работающих в этой проблематике, и связан исторически с исходными неравенствами типа Джексона–Стечкина.

Для случая $0<p\le 2$ автором доказаны оценки (теорема 1.2.1) обобщающие результат А. А. Лигуна

$$\left(A_{n,p}^{r,m}(\varphi;h)\right)^{-1} \le \chi_{m,n,r,p}(\varphi;h) \le \left(\inf_{k\ge n} A_{k,p}^{r,m}(\varphi;h)\right)^{-1}, \tag{2}$$

где

$$A_{k,p}^{r,m}(\varphi;h) = 2^{m/2}\left(k^{rp}\int_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}, \quad k\ge n.$$

Далее, естественно поставить вопрос о совпадении оценок в (2). В теореме 1.2.2 доказано, что при выполнении для всех $t\in[0,h]$ условия

$$(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0 \tag{3}$$

для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, \pi/n]$ справедливо равенство

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) = 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \varphi(t)\, dt \right)^{-1/p}. \tag{4}$$

Условию (3), в частности, удовлетворяет функция $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, в которой $\beta \in [0, \pi]$, а $\gamma \in [0, rp - 1]$. Используя эту функцию в равенстве (4), автор получает в качестве следствия соответствующий результат, полученный ранее М.Г. Есмаганбетовым [62] (диссертант почему-то не отмечает этот факт), а также много следствий из него, полученных ранее в работах многочисленных предшественников (Н. И. Черных, Л. В. Тайков, В. В. Шалаев, С. Н. Васильев, С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов).

Далее, полученные результаты используются для нахождения точных значений n-поперечников для классов $W_p^{(r)}(\omega_m; \sin^\gamma(\beta t/h))$, а также подобных классов, в которых используется мажоранта $\Phi(h)$ некоторого усреднения модуля непрерывности r-ой производной.

Во второй главе для гладких функций, определенных на всей прямой, вводится величина, аналогичная (1), в которой вместо наилучшего приближения тригонометрическими полиномами участвует наилучшее приближение целыми функциями экспоненциального типа σ. Для такой величины доказываются оценки, аналогичные (2) и исследуются условия совпадения оценок снизу и сверху. Далее, эти результаты применяются для получения точных значений средних ν-поперечников.

Третья глава посвящена задачам наилучшего приближения аналитических в единичном круге функций алгебраическими полиномами. Обозначим через $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$ пространство функций, аналитических в открытом круге радиуса ρ, $0 < \rho \le 1$, для которых $\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty$, где H_q — пространство Харди. Через $f_a^{(r)}$ обозначим r-ую производную функции f по аргументу φ комплексного переменного $z = \rho e^{i\varphi}$. Под $H_q^{(r)}$ $(H_{q,a}^{(r)})$ понимается пространство функций $f(z)$, аналитических в единичном круге, для которых $f^{(r)} \in H_q$ $(f_a^{(r)} \in H_q)$. Для функций $f \in H_q$ вводится понятие модуля непрерывности

$$\omega(f; t)_q = \sup_{|h| \le t} \left\| f\left(\rho e^{i(\varphi + h/2)}\right) - f\left(\rho e^{i(\varphi - h/2)}\right) \right\|_{H_q}.$$

Для мажоранты Φ вводятся классы $W_a^{(r)} H_q(\Phi)$ $(W^{(r)} H_q(\Phi))$ аналитических функций $f \in H_{q,a}^{(r)}$ $(f \in H_{q,a}^{(r)})$, для которых при всех $h > 0$

$$\frac{1}{h} \int_0^h \omega(f_a^{(r)}; 2t)_q\, dt \le \Phi(h) \quad \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega(f^{(r)}; 2t)_q\, dt \le \Phi(h) \right).$$

Одним из основных результатов третьей главы является следующее утверждение ((теорема 3.2.2 и 3.2.3): если при всех $h > 0$ мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2n))} \ge \frac{\pi}{2nh} \int_0^{nh} (\sin t)_*\, dt, \tag{5}$$

где

$$(\sin t)_* = \begin{cases} \sin t, & t \in (0, \pi/2], \\ 0, & t \ge \pi/2, \end{cases}$$

то при всех $1 \leq q \leq \infty$ и всех $0 < \rho \leq 1$ справедливы равенства

$$\delta_n(W_a^{(r)}H_q(\Phi); H_{q,\rho}) = \sup_{f \in W_a^{(r)}H_q(\Phi)} E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где δ_n — любой из n-поперечников: бернштейновский, гельфандовский, тригонометрический или линейный, а $E_{n-1}(f)_{H_{q,\rho}}$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими полиномами степени не выше $n-1$ в норме $H_{q,\rho}$.

Аналогичный результат доказан для класса $W^{(r)}H_q(\Phi)$.

Диссертационная работа Г. А. Юсупова относится к важному и актуальному направлению современного анализа, имеющему приложения к задачам об оптимальности вычислительных алгоритмов. Научные результаты, сформулированные в диссертации, полностью обоснованы и являются новыми. Автор диссертации владеет современными методами и подходами, разработанными в теории функций и функционального анализа, теории приближений и гармоническом анализе.

Диссертация Г. А. Юсупова является самостоятельной, завершенной научной квалификационной работой, в которой представлены результаты, совокупность которых является решением важных проблем по наилучшим приближениям и нахождению точных значений поперечников классов гладких и аналитических функций. Основное содержание диссертации опубликовано в центральных математических журналах, докладывалось на международных конференциях.

В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако имеется ряд замечаний. Стр. 8, 3 строка: не определена величина χ_n'. Стр. 8, 7 строка снизу: непонятен смысл фразы "неравенство при $\tau \to 0$". Тем более, что потом написано "для $0 < \tau \leq \pi$". Стр. 10, 1 строка снизу: речь идет о параграфе, хотя текст относится к Введению. Стр. 60, 8 строка снизу: видимо, должно быть χ_r'. Стр. 61, 5 строка: в соотношении (1.1.8) не присутствуют линейные операторы. Стр. 61, 62: те же, что и выше, замечания относительно неравенств при $\tau \to 0$. Стр. 68, 4 строка снизу: в ссылке на монографию A. Pinkus [100] указана неправильная страница, правильная страница — 104. В следствиях 1.2.3 и 1.2.5 требуется добавить условия $sp \geq 1$ и $sp \geq 2$, соответственно, вытекающие из теоремы 1.2.3. В следствии 1.2.6. надо добавить условие $0 \leq \gamma \leq sp-1$. Стр. 161, 12 строка: должно быть $f \in \mathcal{A}(U)$. Стр. 161, 11 строка снизу: при $q = \infty$ величина $M_q(f, \rho)$ должна быть определена другим соотношением. Стр. 161, 9 строка снизу: обозначение $f(t) := f(e^{it})$ неудачное и может приводить к путанице. Стр. 161, 8,7 строки снизу: непонятно, к какому случаю эта фраза относится. Заголовки §3.2 и §3.3 в оглавлении и в тексте отличаются. Теорема 3.2.1 является частным случаем теоремы 3.2.2 и ее не стоило формулировать отдельно. На мой взгляд следовало бы объединить в одну теорему теоремы 3.2.2 и 3.2.3. То же касается теорем 3.3.1, 3.3.2 и 3.3.3. Тем не менее, отмеченные недостатки не снижают общую высокую оценку работы.

Надо отметить, что условие на мажоранту (5) является довольно ограничительным. Например степенная функция удовлетворяет ему при довольно экзотическом показателе. Однако, существуют несколько аргументов в пользу полученных результатов. Во-первых, точные результаты относительно поперечников, как правило, даются нелегко и любой результат в этом направлении ценен. Во-вторых, такого рода задачи рассматривались многими авторами, поэтому всякий более общий результат тоже ценен. Наконец, дальнейшее исследование подобных задач может привести к менее ограничительным условиям на мажоранты.

Основные результаты получены автором лично. Содержание диссертации соответствует специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автореферат соответствует требованиям ВАК, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Считаю, что диссертация Г. А. Юсупова “Некоторые вопросы наилучших приближений и значения поперечников функциональных классов” удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемых к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Оффициальный оппонент:

Заведующий кафедрой “Высшая математика”
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
“Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)”,
доктор физико-математичкских наук,
профессор К.Ю. Осипенко

Место работы: 121552 г. Москва, ул. Оршанская д. 3, МАИ, комн. 225В.
Адрес электронной почты: kosipenko@yahoo.com
Телефон: +7(916)159-33-94

Подпись К.Ю. Осипенко заверяю.

И.о. проректора по научной работе
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
“Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)” А.М. Раздолин