ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Юсупова Гулзорхона Амиршоевича «Некоторые вопросы наилучших приближений и значения поперечников функциональных классов», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа посвящена классическим экстремальным задачам теории приближений в пространствах L_2 и H_q для периодических функций, целых функций экспоненциального типа и функций, аналитических в круге. В частности, вычислены точные константы в неравенствах Джексона–Стечкина, найдены точные значения n-поперечников классов функций, определяемых взвешенными средними значениями модулей непрерывности. Данная тематика берет свое начало в основополагающих работах П.Л. Чебышева, К. Вейерштрасса, А. Лебега, С.Н. Бернштейна, Д. Джексона, изучавших качественную связь между наилучшим приближением функций и их дифференциально-разностными свойствами. Теория поперечников была заложена А.Н. Колмогоровым в 1936 г. и количественно дополняет эту связь. Эти исследования были продолжены многими авторами. Важные результаты были получены Н.И. Ахиезером, Ш.Ж. Валле-Пуссеном, В.К. Дзядыком, А. Зигмундом, М.Г. Крейном, С.М. Никольским, С.Б. Стечкиным, А.Ф. Тиманом, В.М. Тихомировым, П.Л. Ульяновым, А. Хааром, Ж. Фаваром. Важной вехой в развитии теории экстремальных задач теории приближений стали шестидесятые годы прошлого века, когда Н.П. Корнейчук и Н.И. Черных доказали точные неравенства Джексона для периодических функций, а С.Б. Стечкин , У. Рудин и В.М. Тихомиров нашли первые точные значения поперечников. После этих работ теория экстремальных задач теории приближений, связанная с точными неравенствами Джексона–Стечкина и поперечниками, стала активно развиваться многими математиками. Можно отметить результаты В.В. Арестова, А.Г. Бабенко, В.И. Бердышева, С.Б. Вакарчука, В.В. Жука, В.И. Иванова, А.А. Лигуна, В.Ю. Попова, Л.В. Тайкова, М.Ш. Шабозова, В.А. Юдина. Дополнительной мотивацией таких исследований является тот факт, что близкие задачи возникают в других областях математики, например метрической геометрии и аналитической теории чисел. Отметим, что несмотря на весьма значительный прогресс в отыскании точных значений поперечников, достигнутый в последние полвека, многие важные задачи до сих пор не решены. Именно ряд таких трудных задач является предметом исследования в предлагаемой рецензируемой диссертационной работе.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 200 источников. Общий объем составляет 229 страниц. Достоверность и обоснованность сформулированных результатов подтверждается подробными разъяснениями и строгими математическими доказательствами, базирующимися на современных методах функционального анализа и теории функций, публикациями автора в высокорейтинговых математических журналах. Полученные результаты были доложены на специализированных научных семинарах и международных конференциях.

Более подробно остановимся на содержании работы и ее важнейших результатах.

Введение написано очень подробно. В нем приведены все необходимые определения, дан обстоятельный исторический обзор литературы по изучаемой проблематике, сформулированы основные теоремы и дается их сопоставление с ранее полученными результатами ведущих специалистов в данной области.

В первой главе изучаются варианты точного неравенства Джексона–Стечкина и поперечников в пространстве L_2 для 2π-периодических функций. В 1967 г. Н.И. Черных доказал точное неравенство Джексона

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $E_{n-1}(f)$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2$, $\omega(f;h) = \sup_{|t|\le h} \|f(\cdot+t) - f(\cdot)\|_2$ — ее модуль непрерывности. Этот результат был обобщен им на дифференцируемые функции и модуль непрерывности произвольного порядка (точное неравенство Джексона–Стечкина). Отметим важный результат Н.И. Черных 1979 г., который не отмечается в диссертации: значение аргумента π/n минимальное, при котором точная константа равна $2^{-1/2}$; при меньших значениях аргумента она будет строго больше. Аналогичный эффект, что следует из результатов Н.П. Корнейчука, наблюдается в пространстве C. Это поясняет появление аргумента π/n в точных результатах, в том числе полученных автором.

При доказательстве (1) Черных вначале вывел неравенство

$$E_{n-1}^2(f) \le \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f;t) \sin nt\, dt, \tag{2}$$

из которого (1) следует очевидным образом.

Точное неравенство (2) обобщалось многими авторами: Н.И. Черных, Л.В. Тайковым, А.А. Лигуном, Н. Айнуллоевым, В.В. Шалаевым, Х. Юссефом, С.Б. Вакарчуком, М.Ш. Шабозовым, С.Н. Васильевым. Однако в наиболее законченном виде оно доказано автором диссертации и это является одним из главных результатов работы. Приведем его.

Пусть

$$\chi_{n,\beta,\alpha,p}(\varphi;h) = \sup_{f\in L_2^{(\alpha)}} E_{n-1}(f) \left(\int_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)\,dt\right)^{-1/p}, \tag{3}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \le 2$, $\varphi \ge 0$ — суммируемая не эквивалентная нулю весовая функция.

Теорема 1.5.1. *Справедливы оценки*

$$\left\{A_{n,p}^{\alpha,\beta}(\varphi, h)\right\}^{-1} \le \chi_{\beta,\alpha,n,p}(\varphi; h) \le \left\{\inf_{n \le k < \infty} A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi, h)\right\}^{-1}, \qquad (4)$$

где

$$A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi, h) = 2^{\beta/2}\left(k^{\alpha p}\int_0^h (1-\cos kt)^{\beta p/2}\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}, \quad k \in \mathbb{N},\ k \ge n.$$

Ранее величина (3) была вычислена для конкретных значений параметров, в частности, для весов $\varphi(t) = \sin nt$, $\varphi(t) = 1$. Автор расширяет этот класс, доказывая достаточное условие на φ, когда оценки (4) точные.

Теорема 1.5.2. *Если при некоторых $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $0 < p \le 2$ вес φ удовлетворяет условию*

$$(\alpha p - 1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0, \quad t \in [0, h], \qquad (5)$$

то для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \le \pi/n$ справедливо равенство

$$\chi_{n,\beta,\alpha,p}(\varphi; h) = 2^{-\beta n}n^{-r}\left(\int_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Теорема 1.5.2 имеет много следствий. В частности, получен ряд точных результатов для поперечников обобщенных классов Вейля, которые в данной постановке усиливают результаты В.В. Шалаева, М.Г. Есмаганбетова, С.Б. Вакарчука и М.Ш. Шабозова. Вводится класс $W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega$ функций $f \in L_2^{(\alpha)}$, таких что

$$W_\beta(f^{(\alpha)}; \varphi, h)_p = \left(\frac{\int_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)}; t)\varphi(t)\,dt}{\int_0^h \varphi(t)\,dt}\right)^{1/p} \le \omega(h),$$

где ω — функция типа модуля непрерывности.

Теорема 1.5.4. *Если $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \le \pi/n$ и выполнено неравенство* (5), *то справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega; L_2\right) = \delta_{2n}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega; L_2\right) = E_{n-1}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega\right) =$$
$$= 2^{-\beta}n^{-\alpha}\left(\frac{\int_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)\,dt}{\int_0^h \varphi(t)\,dt}\right)^{-1/p}\omega(h),$$

где $\delta_k(\cdot)$ — любой из типов k-поперечников: Бернштейна $b_k(\cdot)$, Гельфанда $d^k(\cdot)$, Колмогорова $d_k(\cdot)$, линейный $\lambda_k(\cdot)$, проекционный $\pi_k(\cdot)$.

Все n-поперечники реализуются частичными суммами Фурье $S_{n-1}(f;t)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f \in L_2^{(\alpha)}$.

Скажем несколько слов об используемой технике. Она, в целом, была известна и базируется на представлении величины наилучшего приближения функции $f \in L_2$ и норм ее разностных операторов суммами, содержащими коэффициенты Фурье f. Однако автор вносит недостающие детали. Для работы с произвольным $p \leq 2$ к суммам применяется неравенство Минковского (см. формулу (1.2.4) работы). Эта идея взята из работ М.Ш. Шабозов. После этого применяются стандартные оценки сумм. Ключевым моментом доказательства теоремы 1.2.2 является техническое утверждение об условиях возрастании при $x \geq n$ функции (1.2.15)

$$y(x) = x^{rp} \int\limits_0^h (1 - \cos xt)^{\beta p/2} \varphi(t)\, dt.$$

В частном случае, этот факт использовал Л.В. Тайков.

Во второй главе рассматриваются родственные задачи о наилучшем приближении функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ целыми функциями экспоненциального типа. Различные аспекты этой проблемы рассматривались в работах Н.И. Ахиезера, С.М. Никольского, А.Ф.Тимана, П. Боаса, И.И. Ибрагимова, Ф.Г. Насибова, В.Ю. Попова, Г.Г. Магарил-Ильяева и многих других.

В качестве меры гладкости функции используется обобщенный модуль непрерывности порядка m вида

$$\Omega_m(f;t)_p = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta^1_{h_1} \cdots \Delta^1_{h_m} f(\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{R})} dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/p}.$$

Для 2π-периодических функций этот модуль непрерывности был введен К.В. Руновским, который доказал его эквивалентность классическому модулю непрерывности.

Результаты второй главы диссертации интересны тем, что автору удалось получить окончательные в том или ином смысле утверждения, связанные с задачами аппроксимации в среднем функций на прямой. В частности, в теоремах 2.1.1–2.1.3 получены различные неулучшаемые варианты неравенства Джексона–Стечкина для наилучшего приближения $A_\sigma(f^{(r)})_{L_2(\mathbb{R})}$ функций и их производных, где в качестве меры гладкости применяется усредненное с заданным весом значение величины $\Omega_m(f;t)_p$.

В качестве примера можно привести один характерный результат второй главы. Известно, что если $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$, то и все промежуточные производные $f^{(r-s)} \in L_2(\mathbb{R})$, $s = 1, 2, \ldots, r-1$. Представляет интерес отыскание экстремальных характеристик, содержащих величину наилучшего приближения $A_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}$.

Теорема 2.1.3. *При* $m, r \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, 2, \dots, r$, $0 < q \le 2$, $\sigma > 0$ *и* $0 < h \le 3\pi/(4\sigma)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{2^{m/2}\sigma^s A_\sigma(f^{(r-s)})_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}; \tau)\psi(\tau)\,d\tau\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq/2} \psi(\tau)\,d\tau\right)^{-1/q}.$$

Отсюда вытекают разные интересные следствия, которые сформулированы в теле этой же теоремы.

Так же во второй главе диссертации вычислены точные значения средних поперечников $\overline{\pi}_\nu(\cdot)$ по Колмогорову, Бернштейну и средних линейных поперечников классов

$$W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1) = \left\{ f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}) \colon \int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}; t)_2\,dt \le \Phi_1^q(h) \right\},$$

где Φ_1 — непрерывная возрастающая функция, такая что $\Phi_1(0) = 0$.

В частности, в теореме 2.2.1 доказано, что если мажоранта Φ_1 удовлетворяет условию

$$\Phi_1^q\left(\frac{h}{\mu}\right) \int\limits_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq/2} dt \le \Phi_1^q(h) \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt,$$

то для любого $\nu > 0$

$$\overline{\pi}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m; \Phi_1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$
$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q} \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mq/2} dt\right)^{-1/q} \Phi_1(1/\nu).$$

Третья глава диссертационной работы посвящена задачам наилучшего полиномиального приближения аналитических в единичном круге функций, отысканию точных значений n-поперечников и построению наилучших линейных методов приближения различных классов аналитических в круге функций принадлежащих пространству Харди H_q. В связи с результатами диссертации, в первую очередь, следует отметить работы К.И. Бабенко, Л.В. Тайкова, В.И. Белого, М.З. Дверина, Ж. Шейка, К.Ю. Осипенко, С.Б. Вакарчука и М.Ш. Шабозова. Автором найдены наилучшие линейные методы приближения ряда классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди H_q, и для них найдены точные значения линейного, гельфандовского и некоторых других n-поперечников. Результаты формулируется достаточно тяжеловесно, поэтому мы их здесь неприводим.

Оценивая диссертацию в целом, следует отметить, что изложение полученных результатов в работе проведено четко и последовательно. Все утверждения сформулированы ясно и математически строго доказаны.

Основные результаты диссертации являются новыми, обобщают и усиливают ранее известные результаты многих специалистов в данной области. Для доказательства результатов работы диссертанту пришлось преодолеть значительные идейные и технические сложности.

К некоторым местам диссертации есть незначительные замечания:

- Наверное не стоило снова повторять так подробно исторические сведения из введения в соответствующих главах. Тогда изложение было бы компактнее.

- На стр. 60 в величине χ есть третий аргумент, но в конце страницы он пропадает. Видимо, он равен π, но нужно прилагать усилия, чтобы понять это.

- На стр. 76 в п. (а) написано, что из следствия 1.2.2 получается результат Черных. Но это не так, поскольку для этого результата $r = 0$, а следствие 1.2.2 сформулировано для $r \in \mathbb{N}$. Это заметно, поскольку в этом случае про функцию $y(x)$ из (1.2.15) нельзя сказать, что она монотонно возрастает (при $r = 0$ она неубывает). Кроме того, в (1.2.18) показано, что $y'(x) \geq 0$, откуда еще не следует строгая (!) монотонность y.

- В третьей главе при вычислении значений n-поперечников классов аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди, сначала вычисляются точные значения бернштейновского и колмогоровского n-поперечников (например, теоремы 3.2.1 и 3.2.2), а затем после нахождении явного вида наилучшего линейного метода класса вычисляются значения линейных и гельфандовских n-поперечников. Вероятно, эти утверждения можно было бы объединить в одну общую теорему.

- Кроме того, должен отметить ряд грамматических погрешностей, например, в заголовках § 3.2 и § 3.3 оглавления в обозначении соответствующих классов функций пропущены индексы, вместо Φ и Ψ нужно писать Φ_1 и Ψ_1.

Тем не менее, указанные недостатки носят технический характер и никак не снижают весьма высокой научной ценности диссертационной работы.

Основные результаты диссертации являются новыми, они полностью отражены в публикациях автора, опубликованы в 31 научной работе, из них 23 из перечня ВАК РФ. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях и различных научных семинарах, в работе которых принимали участие известные специалисты в данной области.

Диссертационная работа Г.А. Юсупова «Некоторые вопросы наилучших приближений и значения поперечников функциональных классов» является научно-квалификационной работой, удовлетворяющей всем требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», предъявляемым

ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор — Юсупов Гулзорхон Амиршоевич, безусловно, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
профессор Горбачев Дмитрий Викторович.

300012, г. Тула, пр. Ленина, д. 92
ФГБОУ Тульский государственный университет
Институт прикладной математики и компьютерных наук
Профессор кафедры прикладной математики
и информатики Д.В. Горбачев

e-mail: dvgmail@mail.ru
Тел. дом.: (4872)264905
Тел. раб.: (4872)254620

23.04.2016

Подпись Д.В. Горбачева удостоверяю.
Начальник ОК ТулГУ М.В. Метелищенкова

23.04.16