Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Министерство образования и науки Российской Федерации.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина» (УрФУ)

ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002,
факс: +7 (343) 375-97-78; тел.: +7 (343) 374-38-84;
контакт-центр: +7 (343) 375-44-44, 8-800-100-50-44 (звонок бесплатный)
e-mail: rector@urfu.ru, www.urfu.ru
ОКПО 02069208, ОГРН 1026604939855, ИНН/КПП 6660003190/667001001

18.04.2016г. № 05-15/1-48

На № ______ от ______

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по науке
Уральского федерального университета
Кружаев Владимир Венедиктович

«18» апреля 2016 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации
на диссертацию Юсупова Гулзорхона Амиршоевича
«Некоторые вопросы наилучших приближений и значения поперечников функциональных классов»,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Тематика диссертации Гулзорхона Амиршоевича Юсупова — изучение различных классов гладких функций, периодических, определенных на всей вещественной оси и аналитических в единичном круге. Изучаются экстремальные задачи в пространстве L_2 о скорости приближения классов гладких функций соответственно тригонометрическими полиномами, целыми функциями экспоненциального типа, алгебраическими многочленами. Вычисляются поперечники, включая поперечники Бернштейна, Колмогорова, Гельфанда. Исследуются структурные и конструктивные свойства функций из соответствующих классов. В этой тематике работали многие известные математики: С.Н.Бернштейн, Д.Джексон, А.Н.Колмогоров, С.М.Никольский, С.Б.Стечкин, А.Ф.Тиман, Ж.Фавар, Н.И.Ахиезер, М.Г.Крейн, В.М.Тихомиров, Н.П.Корнейчук, Н.И.Черных, В.И.Бердышев, В.А.Юдин, В.К.Дзядык, Л.В.Тайков, В.В.Жук, А.А.Лигун, В.И.Иванов, И.И.Ибрагимов, Ф.Г.Насибов, В.Ю.Попов, Е.Е.Бердышева, Д.В.Горбачев, Б.С.Вакарчук, М.Ш.Шабозов, С.Н.Васильев, А.И.Козко, А.В.Рождественский, В.С.Балаганский и многие другие. Тем не менее, эта тематика и на нынешний день остается актуальной ввиду фундаментального характера самих экстремальных задач, идей и методов, создаваемых и использующихся при их решении. Результаты и методы теории приближения оказываются весьма полезными в других областях математики и ее приложений, позволяя практикам оптимальным образом решать вопросы, чем и как с требуемой точностью аппроксимировать нужные им объекты. Аппроксимация в пространстве

L_2 имеет особенности. С одной стороны, наилучшее приближение функции линейным подпространством в L_2 легко находится, а именно, наилучшее приближение дают суммы Фурье. Однако задачи для классов функций являются уже далеко нетривиальными. Так (точное) неравенство Джексона для наилучших приближений 2π-периодических функций тригонометрическим полиномами в L_2, доказанное Н.И.Черных (1967), оказалось далеко нетривиальным и было получено с привлечением новых тонких идей. Основная часть результатов диссертации Г.А.Юсупова как раз и относится к аппроксимации в пространствах L_2. Полученные в ней результаты имеют, пожалуй, на нынешний день самый общий характер; они новые, тонкие и глубокие. По нашему мнению, тематика диссертации Г.А.Юсупова весьма актуальная.

Диссертация Г.А.Юсупова объемом 229 страниц состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 200 наименований. Дадим обзор результатов диссертации.

В первой главе рассматривается круг вопросов, связанных с наилучшим приближением $E_{n-1}(f)_2$ периодических функций в метрике L_2 тригонометрическими полиномами любого фиксированного порядка $n-1$. Термин «неравенства Джексона – Стечкина» автор применяет ко всем оценкам сверху величин наилучшего приближения в любом линейном нормированном пространстве 2π-периодических функций конечномерными подпространствами через различные количественные характеристики гладкости приближаемых функций. В диссертации рассматриваются по большей части средне-взвешенные степени классических модулей непрерывности m-го порядка функций или их производных типа

$$\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}.$$

Отметим, что впервые точные неравенства Джексона – Стечкина в L_2 в терминах средневзвешенных (степени $p=2$ с конкретными весами φ) первого и старших модулей непрерывности были установлены Н.И.Черных (1967).

В § 1.1 вводятся обозначения, определения, а также приводятся результаты предшественников, имеющие непосредственное отношение к изучаемой теме.

В § 1.2 решаются задачи о точных оценках $E_{n-1}(f)_2$ через усредненные модули непрерывности порядка m. В этом параграфе наиболее интересен, на наш взгляд, результат, представленный в теореме 1.2.2, где определен широкий класс весовых функций $\varphi(t)$ (см. (1.2.12)), для которых вычислены точные константы в неравенстве

$$E_{n-1}(f)_2 \le C\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p} dt$$

для $0<h\le\pi/n$ и натуральных r. Ключевым моментом доказательства этого результата является применение дифференциального тождества (см. (1.2.17) и предшествующую ей выделенную формулу), позволившего заменить под интегралом производную функции $(1-\cos xt)^{mp/2}$ по переменной x на производную по переменной интегрирования t. В качестве следствий указанный результат содержит результаты нескольких предшественников — от Л.В.Тайкова до С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова. Было бы интересно получить аналогичный результат и для случая $r=0$, что, возможно, помогло бы продвинуть исследование точных неравенств Джексона для классических модулей гладкости для $h\le\pi/n$.

В § 1.3 вслед за Л.В.Тайковым и Н.Айнулоевым введены классы функций, расслаивающие классические классы W_p^r при (значении параметра интегрального усреднения) $p=2$ на более узкие подклассы, определяемые с помощью модулей непрерывности r-х производных функций. Наиболее прямым обобщением классов W_2^r являются классы $W_{p,h}^{(r)}(\omega_m, \varphi)$, в которых ограничение $\|f^{(r)}\| \leq 1$ заменено на ограничение $\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)\,dt \leq 1$ при любом фиксированном $h \in (0, \pi)$. В теореме 1.3.1 (§ 1.3) вычислены поперечники таких классов порядка $2n-1$ и $2n$ при $n \leq \pi/h$ в случае $\varphi(t) = \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t$ при некоторых p, γ и натуральных r, включая колмогоровские, бернштейновские и гельфандовские поперечники. Выбор веса более общий, чем у В.В.Шалаева, М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука, и их результаты становятся следствием теоремы 1.3.1 и ее следствия 1.3.1. Автор формулирует результат теоремы 1.3.1, акцентируя внимание на том, что он справедлив для всех $h \in (0, \pi/n]$. Хотя, конечно, естественнее для каждого фиксированного класса функций изучать скорости приближения, поперечники для разных n, что фактически и сделано в теореме 1.3.1. При каждом n, для каждого класса $W_{p,h}$ все перечисленные именные поперечники, а также линейный проекционный и линейный поперечники оказались одинаковыми.

В теореме 1.3.3 рассматриваются классы по структуре существенно отличные от классов $W_{p,h}^r(\omega_m, \varphi)$, поскольку у функций f из класса $W_p(\omega_m, \varphi, \Phi)$ учитывается не только среднестепенное с весом φ значение модуля $\omega_m(f^{(r)}, t)$, но и скорость убывания $\omega_m(f, t)$ при $t \to 0$, а именно в класс $W_p(\omega_m, \varphi, \Phi)$ объединяются функции, у которых p-среднее значение

$$\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)\,dt$$

при $h \downarrow 0$ убывает не медленнее, чем p-ая степень заданной возрастающей непрерывной функции $\Phi(h)$, удовлетворяющей условию $\Phi(0) = 0$. В теореме 1.3.3 для таких классов при специальных φ (таких, как в теореме 1.2.2) вычислены все указанные выше поперечники в случае, когда «функционал»

$$\Phi(\lambda\pi) \Big/ \int_0^{\lambda\pi} \left(\sin \frac{t}{2}\right)^{mp} \sin \frac{\beta t}{\lambda\pi}\,dt$$

имеет минимум в единственной точке $\mu \in (0, 1]$. Доказано именно это утверждение (с легко устранимой неточностью в доказательстве). Но, к сожалению, символ h попал как в определение класса ($W_{p,h}^r(\omega_m, \varphi, \Phi)$ вместо $W_p^r(\omega_m, \varphi, \Phi)$) так в формулировку теоремы. Возможно, это произошло из-за компьютерного набора, при котором начальные символы класса $W_{p,h}^r(\omega_m, \varphi)$, определяемого для каждого фиксированного h, по ошибке были скопированы в начальную часть «имени» нового класса. Эта теорема (при правильном прочтении) обобщает и усиливает соответствующий результат Н.Айнулоева. Аналогичная неточность с использованием символа h была перенесена на следствие 1.3.2 и теорему 1.3.5.

В § 1.4 по существу рассматривается вопрос в духе Колмогорова о возможности уменьшения наилучшей константы в неравенстве Джексона – Стечкина, установленного в § 1.2 (теорема 1.2.2), за счет замены приближающего подпространства $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов другим подпространством такой же размерности. Исчерпывающий (отрицательный) ответ дает теорема 1.4.2. Данный результат дополняет известные результаты в этом направлении, установленные ранее Н.П.Корнейчуком и Н.А.Барабошкиной.

В последнем § 1.5 первой главы некоторые результаты предыдущих параграфов перенесены на случай дробных производных и их «дробных» модулей непрерывности, определенных ранее другими авторами. В частности, в этом направлении обобщена теорема 1.2.1 об оценке точной константы в неравенствах для наилучших приближений $E_{n-1}(f)_2$ через усредненные модули непрерывности и несколько результатов, подобных полученным в §§ 1.2–1.4 на ее основе.

Вторая глава посвящена вопросам приближения функций из пространства $L_2(\mathbb{R})$ на числовой оси множеством $B_{\sigma,2}$ целых функций экспоненциального типа $\sigma > 0$, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R})$. Кроме того, в гл. II рассматриваются задачи о точных значениях средних ν-поперечников классов функций. Используемое в диссертации определение средней размерности было введено Г.Г.Магарил-Ильяевым (1990), которое является модификацией соответствующего понятия, введенного ранее В.М.Тихомировым (1980).

Подробнее. В § 2.1 (теорема 2.1.2) решена задача о точной константе в неравенстве Джексона – Стечкина между величиной $A_\sigma(f)_2$ наилучшего приближения функции f из $L_2(\mathbb{R})$ множеством $B_{\sigma,2}$ и величиной

$$\left(\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,\psi(t)dt\right)^{1/q},$$

где $0 < q \le 2$, $0 < h < 3\pi/(4\sigma)$, ψ — весовая функция на $[0, h]$,

$$\Omega_m(g;t)_2 = \left\{\frac{1}{t^m}\int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta^m_{(h_1,\dots,h_m)}g\|^2_{L_2(\mathbb{R})}dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/2},$$

$$\Delta^m_{(h_1,\dots,h_m)} = \Delta^1_{h_1}\circ\cdots\circ\Delta^1_{h_m}, \quad \Delta^1_{h_j}g(x) = g(x+h_j) - g(x).$$

В § 2.2 для произвольных фиксированных значений параметров $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $q \in (0, 2]$ рассматриваются четыре класса $W_q^{(r)}(\Omega_m;\psi)$, $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_1)$, $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_2)$, $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Phi_3)$ функций f из $L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, задаваемых соответственно с помощью следующих неравенств:

$$\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,\psi(t)dt \le 1, \qquad \int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,dt \le \Phi_1^q(h),$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,dt \le \Phi_2^q(h), \qquad \frac{2}{h^2}\int_0^h t\Omega_m^q(f^{(r)},t)_2\,dt \le \Phi_3^q(h),$$

справедливых сразу для всех $h \in (0, \pi]$. Здесь Φ_j $(j = 1, 2, 3)$ – произвольные непрерывные возрастающие функции, принимающие нулевое значение при $t = 0$; ψ — весовая функция (т. е. неотрицательная суммируемая и неэквивалентная нулю функция на $[0, h]$). Отметим, что третий класс сводится ко второму с помощью замены $h\Phi_2^q(h) = \Phi_1^q(h)$. Во втором параграфе главы II исследуются средние ν-поперечники этих классов в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$, а именно средние ν-поперечники по Колмогорову, Бернштейну и линейные. Указанные поперечники найдены (теоремы 2.2.1, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6) при дополнительных ограничениях на мажоранты Φ_1, Φ_2, Φ_3, аналогичные тем, которые использовались в периодическом случае в третьем параграфе первой главы.

Результаты, полученные во второй главе, обобщают некоторые результаты, установленные ранее А.А.Лигуном, С.Б.Вакарчуком, В.Г.Дорониным и В.И.Забутной.

В третье главе изучаются аппроксимативные свойства аналитических в единичном круге функций. В частности, рассматриваются задачи о точных значениях n-поперечников некоторых классов функций как в метрике классического пространства Харди H_q (случай единичного круга), так и в метрике пространства Харди $H_{q,\rho}$ (случай круга радиуса $\rho < 1$). Здесь $1 \le q \le \infty$. Упомянутые классы функций задаются с помощью мажорант усредненных (с единичным весом) по отрезку $[0, h]$ модулей непрерывности (первого или второго порядка) по аргументу t комплексного переменного $z = |z|e^{it}$ граничных значений либо обычной r-й производной $f^{(r)}(z)$, либо r-й производной $f_a^{(r)}(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z = |z|e^{it}$. Найдены условия на упомянутые мажоранты, при которых удается вычислить точные значения поперечников по Колмогорову, Бернштейну, Гельфанду, а также линейные и тригонометрические поперечники указанных классов функций (теоремы 3.2.1–3.2.6, 3.3.1–3.3.5, 3.4.1–3.4.3). Полученные результаты являются усилением результатов, установленных ранее Л.В.Тайковым, Н.Айнулоевым и другими математиками.

Замечания. Помимо замечания, сделанного выше к теореме 1.3.3, у нас есть еще несколько замечаний.

- В следствии 1.2.3 случай $r = s = 0$ нужно исключить, поскольку в этом случае для весовой функции $\varphi(t) \equiv 1$ дифференциальное неравенство (1.2.12) не имеет места. Аналогичное замечание относится и к следствию 1.2.6.
- В следствиях 1.2.4, 1.2.5 не указаны ограничения на параметр r, а в условиях следствия 1.4.1 — на параметры β, h.
- На стр. 26 в условиях теоремы A ограничения на параметр h должны быть такими: $0 < h \leq \pi/\sigma$; кроме того, в утверждении этой теоремы в интеграле, определяющем величину $\mathcal{D}_{t,r,m}(\psi; h)$, вместо $\psi(t)dt$ должно быть $\psi(\tau)d\tau$.
- На стр. 36 и 153 в условиях теоремы 2.2.6 вместо ограничения $h \leq 3\pi/4$ должно быть ограничение $h \leq 3\pi/(4\sigma)$, а вместо условия $\sigma h \in t_*$ должно быть условие $\sigma h = t_*$.
- На стр. 40 и 161 в определении пространства Харди H_q вместо $f \in \mathcal{A}(U_\rho)$ должно быть $f \in \mathcal{A}(U)$.
- В формулировках некоторых утверждений условие принадлежности некоторых параметров полуоси $\mathbb{R}_+$ следует заменить на условие положительности указанных параметров (поскольку в случае, когда параметры равны нулю, некоторые утверждения теряют смысл).
- В диссертации имеется ряд неточностей, относящихся к оформлению работы. Впрочем, все неточности очевидны и не мешают прочтению работы.

Перечисленные замечания, не являются существенными, они легко устраняются и не влияют на достоверность и значимость полученных результатов.

Все полученные в диссертации Г.А.Юсупова результаты являются новыми, они имеют важное теоретическое значение. Тема исследований является перспективной и актуальной. В диссертации получены интересные, глубокие результаты, которые в совокупности представляют собой существенный вклад в теорию приближений. Проделана кропотливая, трудоемкая и содержательная работа. Основные результаты диссертации опубликованы в 31 печатной работе автора, из них 23 статьи опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК России, а 8 статьей — в трудах международных конференций. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Автор хорошо знает состояние исследований в тематике диссертации, аккуратно и полно цитирует результаты предшественников.

Результаты диссертации могут быть использованы в организациях, научных институтах, занимающихся проблемами теории приближения функций, в частности, в Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения РАН, в Математическом Институте им. В.А.Стеклова РАН, Институте математики Сибирского Отделения РАН, Институте математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан, в учебном процессе при чтении спецкурсов в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, Саратовском государственном университете им. Н.Г.Чернышевского, Санкт-Петербургском государственном университете, Уральском федеральном университете им. первого Президента России Б.Н.Ельцина, Таджикском национальном университете, Хогорском государственном университете им. М.Назаршоева и других.

Диссертационная работа Юсупова Гулзорхона Амиршоевича «Некоторые вопросы наилучших приближений и значения поперечников функциональных классов» является законченным научным исследованием и соответствует всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Юсупов Гулзорхон Амиршоевич, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовили д. ф.-м. н., профессор В.В.Арестов и д. ф.-м. н. А.Г.Бабенко. Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры математического анализа и теории функций Института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н.Ельцина (протокол №10 от 12 апреля 2016 года). Адрес: 620000, Россия, г. Екатеринбург, проспект Ленина, 51. Телефон: +7 343 3506741.

Заведующий кафедрой
математического анализа и теории функций
Института математики и компьютерных наук
(ИМКН) УрФУ,
доктор физ.-мат. наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ,
профессор — Арестов Виталий Владимирович

Профессор кафедры
математического анализа
и теории функций ИМКН УрФУ,
доктор физ.-мат. наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ — Бабенко Александр Григорьевич

12.04.2016

Vitalii.Arestov@urfu.ru
babenko@imm.uran.ru

Подписи Арестова В.В. и Бабенко А.Г. заверяю:

УЧЁНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
УРФУ
МОРОЗОВА В. А.

Управление по делопроизводству и общим вопросам