ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА
о диссертации Юсупова Гулзорхона Амиршоевича
„Некоторые вопросы наилучших приближений и значения поперечников функциональных классов",
представленной на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Теория приближения функций – одна из наиболее интенсивно развивающихся областей современной математики. Почти во всех областях математики важную роль играют задачи о приближении более сложных объектов менее сложными. В большинстве таких случаев очень полезно знание основных методов исследования, результатов и круг задач теории аппроксимации. При этом приходится иметь дело, как с приближением отдельных функций, так и классов функций при помощи подпространств заданной размерности, каждое из которых является линейной комбинацией более простых функций, чем аппроксимируемые функции. Чаще всего роль таких подпространств играет множество алгебраических многочленов, а в периодическом случае – множество тригонометрических полиномов.

Таким образом, на первом этапе возникает задача приближения индивидуальных функций, а на втором этапе требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом или указать наилучший аппарат приближения для этого класса функций.

В 1936 году А.Н.Колмогоров ввёл в теорию приближений понятие поперечника множества, известного теперь как поперечник по Колмогорову, где требуется отыскать наилучшие приближающие подпространства, реализующие указанный поперечник. С этого момента начинается третий этап развития теории приближения. Кроме поперечника по Колмогорову, в теории приближения используются также поперечники по Александрову, Гельфанду, Бернштейну, линейные, проекционные, тригонометрические и информационные.

В диссертационной работе Г.А.Юсупова решаются следующие три цикла экстремальных задач:

– наилучшее среднеквадратическое приближение периодических дифференцируемых классов функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков r-ых производных функций в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ и вычисление точных значений различных n-поперечников указанных классов (глава I);

– наилучшее приближение классов функций, суммируемых с квадратом на всей оси целыми функциями экспоненциального типа, и отыскание точных значений средних ν-поперечников некоторых функциональных классов, определяемых специальными модулями непрерывности высших порядков r-ых производных (глава II);

– построение наилучших линейных методов приближения классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди H_p $(p \geq 1)$ (глава III).

Поскольку диссертационная работа Г.А.Юсупова посвящена решению именно этих вопросов, то рассмотренные в ней экстремальные задачи, несомненно, являются актуальными для дальнейшего развития теории приближения функций.

Охарактеризуем основные результаты диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, списка литературы из 200 наименований, составляет 229 страниц набранных на LaTeX.

Во введении описываются постановка задач, история вопроса и теоретическая значимость, а также формулируются основные результаты.

Первая глава посвящена изучению наилучших приближений 2π-периодических суммируемых с квадратом функций $f(x)$ тригонометрическими полиномами на классах функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков. Здесь рассматривается задача вычисления точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством размерности n оценивается через модуль непрерывности m-го порядка самой функции или некоторой её производной в некоторой точке $h \in (0, \pi/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Эта задача в разное время была предметом исследования таких известных учёных, как Н.П.Корнейчук, Н.И.Черных, В.И.Бердышев, Л.В.Тайков, А.А.Лигун, В.В.Жук, В.А.Юдин, В.В.Арестов, В.Ю.Попов, А.Г.Бабенко, В.И.Иванов, В.В.Шалаев, С.Б.Вакарчук и многие другие.

С целью компактного изложения полученных ранее и вывода основных результатов первой главы в задаче отыскания точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина, вводится в рассмотрение наиболее общая экстремальная аппроксимационная характеристика следующего вида:

$$\chi_{\beta,\alpha,n,p}(\varphi; h) = \sup_{f \in L_2^{(\alpha)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_\beta^p(f^{(\alpha)}; t)\, \varphi(t) dt \right)^{1/p}}, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq 2$, φ – весовая функция, не эквивалентная нулевой функции на отрезке $[0, h]$, а $\omega_\beta(f; t)$ – модуль непрерывности произвольного дробного порядка $\beta \in \mathbb{R}_+$ производной $f^{(\alpha)}$ $(\alpha > 0)$ в смысле Вейля в пространстве L_2.

Одним из основных результатов первой главы является следующая теорема.

Теорема 1.5.1. *Пусть $\beta, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$ φ – весовая функция на $[0, h]$. Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{ A_{n,p}^{\alpha,\beta}(\varphi; h) \right\}^{-1} \leq \chi_{\beta,\alpha,n,p}(\varphi; h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi; h) \right\}^{-1}, \tag{2}$$

где

$$A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi; h) = 2^{\beta/2} \left(k^{\alpha p} \int\limits_0^h (1 - \cos kt)^{\beta p/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}, \quad k \geq n, \ k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.5.1 при $p = 2$, $\alpha = r \in \mathbb{N}$, $\beta = m \in \mathbb{N}$ ранее доказана А.А.Лигуном. Отметим также, что из этой теоремы при различных значениях параметров n, p, α, β и конкретных весовых функциях φ следуют ранее полученные результаты Н.И.Черных, Л.В.Тайкова, А.А.Лигуна, В.В.Шалаева, С.Н.Васильева, С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова.

В связи с вопросом о точности неравенства (2) возникает задача установление соотношения $\inf\limits_{n\le k<\infty} A_{k,p}^{\alpha,\beta}(\varphi;h) = A_{n,p}^{\alpha,\beta}(\varphi;h)$. Ответ на этот вопрос получен в следующем утверждении.

Теорема 1.5.2. *Пусть $\beta>0$, $\alpha\ge 0$, φ - заданная на $[0,h]$ непрерывно дифференцируемая весовая функция. Если при некоторых $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<p\le 2$ и любых $t\in[0,h]$ выполнено дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\ge 0, \tag{3}$$

то при всех $n\in\mathbb{N}$ и $0<h<\pi/n$ справедливы равенства

$$\chi_{\beta,\alpha,n,p}(\varphi;h)=\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Полученные результаты обобщаются в задаче вычисления верхних граней наилучших совместных приближений самой функции и её последовательных производных тригонометрическими полиномами (теоремы 1.2.3, 2.1.3, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.9).

В качестве иллюстрации применения полученных результатов в этой же главе рассматривается ряд задач о точном вычислении значения серий поперечников на некоторых классах функций, задаваемых модулями произвольного дробного порядка, естественно возникающих из теоремы 1.5.1 и 1.5.2.

Если обозначить через $W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega$ – класс функций $f\in L_2^{(\alpha)}$ таких, что для $0\le t\le h$, $0<h\le\pi/n$ выполняется условие

$$W_\beta(f^{(\alpha)};\varphi,h)_p=\left(\int\limits_0^h\omega_\beta^p(f^{(\alpha)};t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\le\omega(h),$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть неотрицательная неубывающая полуаддитивная на $[0,h]$ $(0\le h\le\pi)$ функция такая, что $\omega(0)=0$, то имеет место следующая

Теорема 1.5.4. *Пусть $\alpha,\beta>0$, $0<h\le\pi/n$ и выполнено неравенство (3). Тогда справедливы равенства*

$$\delta_{2n-1}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega;L_2\right)=\delta_{2n}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega;L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_{p,h,\varphi}^{(\alpha)}H_\beta^\omega\right)=\frac{1}{2^\beta n^\alpha}\left(\frac{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\beta p}\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\omega(h),$$

где $\delta_k(\cdot)$ - любой из k-поперечников Бернштейна $b_k(\cdot)$, Гельфанда $d^k(\cdot)$, Колмогорова $d_k(\cdot)$, линейного $\lambda_k(\cdot)$, проекционного $\pi_k(\cdot)$. Все n-поперечники реализуются частичными суммами Фурье $S_{n-1}(f;t)$ порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f\in L_2^{(\alpha)}$.

Полученный в теореме 1.5.4 результат в качестве следствия при конкретных значениях веса φ и параметров α, β, p, h содержит почти все известные результаты по этой проблематике.

Во второй главе диссертации изучается одно из важнейших направлений исследования, связанное с аппроксимацией функций суммируемых с квадратом на всей оси целыми функциями экспоненциального типа на классах функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков r-ых производной функции. Этой проблематике посвящены фундаментальные работы С.Н.Бернштейна, Н.Винера, Н.И.Ахиезера, М.Г.Крейна, С.М.Никольского, А.Ф.Тимана, Р.Боаса, И.И.Ибрагимова и других. Указанные работы получили дальнейшее развитие в конце восьмидесятых годов в работах И.И.Ибрагимова и Ф.Г.Насибова, В.Ю.Попова, в которых найдены точные константы и недавно опубликованные работы Г.Г.Магарил-Ильяева, С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и М.Р.Лангаршоева, в которых вычислены точные значения средних ν-поперечников некоторых классов функций.

Другое направление теории приближения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ целыми функциями экспоненциального сферического типа рассматривается в недавно опубликованных работах Д.В.Горбачева.

Следует отметить, что точные оценки средних ν-поперечников известны в сравнительно малом количестве.

В диссертационной работе Г.А.Юсупова вычислены точные значения бернштейновских, колмогоровских и линейных ν-поперечников классов функций, усреднённые значения специальных модулей непрерывности, которые в $L_p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq 2$ ограничены мажорантой, удовлетворяющей некоторым условиям. Указанные результаты, в частности, содержат ранее полученные результаты С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной. Г.А.Юсупову удалось преодолеть значительные трудности, чтобы вычислить средние ν-поперечники в наиболее общем случае.

В главе 3 изучается задача отыскания точных значений бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и тригонометрических n-поперечников классов аналитических в круге функций в пространстве Харди $H_q\,(1 \leq q \leq \infty)$. Первые результаты при вычислении колмогоровского n-поперечника были получены ещё в начале семидесятых годов для классов функций с ограниченным по норме пространством H_q r-й производной В.М.Тихомировым (случай $q = \infty$) и Л.В.Тайковым ($1 \leq q \leq \infty$), использововавшими результат К.И.Бабенко, пригодный для оценки сверху n-поперечников. Следующий шаг был предпринят Л.В.Тайковым и Н.Айнуллоевым, которыми найдено точное значение колмогоровского n-поперечника классов аналитических в единичном круге функций, усреднённые модули непрерывности или гладкости граничных значений которых мажорируются заданными функциями. Чтобы вычислить линейные или гельфандовские n-поперечники, потребовалось построение наилучших линейных методов приближения. М.З.Двейрин нашёл наилучшие линейные методы приближения для классов функций, изучавшихся Л.В.Тайковым (1967 г.), и вычислил точные значения всех вышеперечисленных n-поперечников. В дальнейшем указанная тематика развивалась в работах М.З.Двейрина и И.В.Чебаненко, Ю.А.Фаркова, К.Ю.Осипенко, T.J.Scheick, A.Pinkus, С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной, М.Ш.Шабозова и М.Р.Лангаршоева.

Г.А.Юсуповым найдены наилучшие линейные методы приближения как для ранее изученных перечисленными авторами классов аналитических в круге функций, так и для изученных им новых классов функций. Благодаря найденным им наилучшим линейным методам приближения, Г.А.Юсупову удалось вычислить точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных, тригонометрических n-поперечников классов аналитических в единичном круге функций, усреднённые модули непрерывности или гладкости которых в H_q, $1 \leq q \leq \infty$ ограничены мажорантой, удовлетворяющей на границе определённым условиям.

Основные результаты опубликованы в 31 работе, из которых 23 – в изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации. Диссертация является законченной научно-квалификационной работой и удовлетворяет требованиям пункта 9 «Положения о порядке присуждения учёных степеней». В диссертации решены важные научные проблемы: получены точные значения различных поперечников классов 2π-периодических дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности произвольного порядка $\beta \in \mathbb{R}_+$ от производного дробного порядка в смысле Вейля; найдены точные значения средних ν-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности; построены наилучшие линейные методы приближения классов аналитических в круге функций и вычислены точные значения различных n-поперечников в пространстве Харди. В совокупности, полученные Г.А.Юсуповым результаты можно квалифицировать как крупные научные достижения в области теории приближения функций.

Оценивая работу в целом, я считаю, что создано новое значительное направление в теории приближения, а разработанные при этом методы исследования позволили решить ряд давно стоящих задач. Представленная диссертация является самостоятельно выполненной работой. Научные результаты диссертации, выносимые автором на защиту, являются новыми, обоснованы в виде строгих математических доказательств. Диссертация удовлетворяет требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, и заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный консультант,
академик АН Республики Таджикистан,
доктор физико-математических наук,
профессор — Шабозов Мирганд Шабозович
Место работы: 734063, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики
им. А.Джураева АН Республики Таджикистан.
Тел.: (+992)93-500-86-52.
e-mail: shabozov@mail.ru

14.11.2015
Подпись М.Ш. Шабозова удостоверяю.
Ученый секретарь Института математики
им. А.Джураева АН Республики Таджикистан,
кандидат физ.-мат. наук, доцент — И. Шокамолов