На правах рукописи

АРАБОВ МУЛЛОШАРАФ КУРБОНОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

01.01.02-Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Душанбе – 2016

Работа выполнена в Институте математики имени А. Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент **Нуров Исхокбой Джумаевич**
Официальные оппоненты:	**Каменский Михаил Игоревич** - доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», заведующий кафедрой функционального анализа и операторных уравнений математического факультета;
	Наимов Алижон Набиджанович - доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Вологодский государственный университет», профессор кафедры информационных систем и технологий.
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет».

Защита состоится 09 *декабря 2016 г. в 12*:00 *часов* на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http: //www.mitas.tj.

Автореферат разослан «____» _____________2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Хайруллоев Ш.А.

Введение

Актуальность темы. Модели с негладкими эффектами имеют важное значение в различных разделах физики и механики (теория фазовых переходов, электричество, магнетизм), в инженерных задачах, в задачах теории управления, в экономике, биологии и др. Часто негладкие эффекты связаны с наличием в системе участков, характеризующихся включением (выключением) отдельных элементов или их переключением. Например, характеристика диода даже в простейшей идеализации имеет два участка: участок нулевого тока (запертый диод) и участок, на котором ток пропорционален напряжению. Фазовые траектории таких систем сшиваются из отдельных гладких участков.

Модели негладких систем обычно включают в себя дифференциальные уравнения с негладкими, релейными, гистерезисными, многозначными нелинейностями. Примерами являются динамические модели с сухим трением, модели с перескоками, модель "двухпозицонный авторулевой", модели, возникающие при изучении систем автоматического регулирования температур, напряжения и др.

Существенный вклад в развитие теории динамических систем, содержащих негладкие и разрывные нелинейности, внесли исследования А.А. Андронова, Н.Н. Баутина, Б.Д. Гельмана, М.А. Красносельского, А. Ласоты, Я.З. Цыпкина, Е.А. Барбашина, Ю.И. Неймарка, А.Х. Гелига, А.Ф. Филиппова, Ю.Г. Борисовича, А.Д. Мышкисо, В.В. Обуховского, R.I. Leine и др.

Важное место при исследовании дифференциальных уравнений занимает изучение задач о периодических, почти-периодических и ограниченных решениях и об их устойчивости. В классической “гладкой” теории дифференциальных уравнений разработан ряд эффективных методов исследования таких задач. Для негладких систем такая теория развита существенно меньше. Это связано, в первую очередь, с существенно более сложными проблемами, возникающими при анализе негладких систем. Поэтому при их изучении важны разработки как новых теоретических подходов, так и численных методов исследования. Важно также, чтобы эти численные методы были основаны на качественном исследовании данных моделей.

Особое место в теории "негладких" систем занимают задачи о дифференциальных уравнениях, содержащих кусочно-линейные функции и, в частности, функции типа модуля. Так, многие теоретические и практические задачи приводят к необходимости рассмотрения квазилинейных автономных систем:

$$x' = Ax + \varphi(x)\,, \quad x \in R^n\,, \tag{1}$$

где A - постоянная матрица, а вектор-функция $\varphi(x)$ содержит кусочно-линейные слагаемые вида

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} b_{11}|x_1 - \gamma_{11}| + ... + b_{1n}|x_n - \gamma_{1n}| \\ \vdots \\ b_{n1}|x_1 - \gamma_{n1}| + ... + b_{nn}|x_n - \gamma_{nn}| \end{bmatrix},$$

в которых b_{ij} - некоторые числа, а γ_{ij} могут быть как постоянными, так и некоторыми ограниченными функциями, зависящими от x. В частности, к системе вида (1) приводят дифференциальные уравнения второго порядка следующего вида:

$$x'' + ax' + bx = c|x - \lambda|, \tag{2}$$

$$x'' + ax' + bx = c|x' - \varphi(x, x')|, \tag{3}$$

$$x'' + ax' + bx = b_1|x| + b_2|x'| + \varphi(x, x'), \tag{4}$$

где a, b, c - вещественные числа, а функция $\varphi(x, y)$-непрерывна и удовлетворяет некоторому условию роста при $|x| + |y| \to \infty$.

Исследованию таких уравнений посвящены работы S. Maezava[1], R.I. Leine[2], Э.М. Мухамадиев[3], И.В.Фоменко, М.Г. Юмагулов[4] и др. Ими исследован ряд вопросов о фазовых портретах, о существовании периодических решений и,

[1]Maezava S. Superharmonic resonance in piecewise linear system with unsymmetrical characteristics // Труды V международной конференции по нелинейным колебаниям, Киев 25 августа - 4 сентября 1969 г. Т. 1. С. 401-422.

[2]Leine R.I.,Van Campen D.H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // European Journal of Mechanigs A/Solids. 5(2006). Pp. 595-616.

[3]Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш. Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка. // Уфимский математический журнал. Т. 6. №1 (2014). С. 84-93.

[4]Фоменко И.В., Юмагулов М.Г. Бифуркационные значения параметров в задаче о периодических решениях дифференциальных уравнений без единственности. // ДАН Тадж. ССР, 1988. Т. 31. № 10. С. 637-640.

в частности, о предельных циклах, об устойчивости решений, о бифуркации периодических решений и т. п. В то же время многие вопросы здесь остаются ещё открытыми. В частности, актуальным с теоретической и практической точек зрения представляется изучение для уравнений вида (2) - (4) следующих вопросов:

- Классификация фазовых портретов в зависимости от их коэффициентов.
- Анализ устойчивости состояний равновесия и признаки существования предельных циклов.
- Анализ основных сценариев бифуркаций.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию указанных вопросов.

Объект исследования. Исследование периодических колебаний и анализ устойчивости решений дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-линейными правыми частями.

Предмет исследования. Уравнения с кусочно-линейными правыми частями.

Цель работы. Для дифференциальных уравнений вида (2) - (4) провести классификацию и анализ фазовых портретов в зависимости от их коэффициентов, провести анализ устойчивости состояний равновесия, изучить вопросы существования предельных циклов, провести анализ основных сценариев бифуркаций.

Задачи работы. В соответствии с поставленной целью выдяются следующие задачи:

1. Для дифференциального уравнения (2) получить классификацию и анализ фазовых портретов и провести анализ устойчивости состояний равновесия.
2. Получить признаки существования предельного цикла для уравнения вида (3).
3. Исследовать основные сценарии бифуркаций, в том числе получить новый признак бифуркации Андронова - Хопфа для дифференциальных уравнений, содержащих негладкие нелинейности.

4. Разработать алгоритмы и пакеты программ построения фазовых портретов квазилинейных уравнений.

Методы исследования. В работе используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний, теории устойчивости, топологические методы исследования локальных бифуркаций.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Для дифференциального уравнения вида (2) дана классификация и анализ фазовых портретов, и проведён анализ устойчивости состояний равновесия.

2. Получены признаки существования предельных циклов уравнений вида (3).

3. Исследованы основные сценарии бифуркаций, в том числе, получен достаточный признак бифуркации Андронова - Хопфа для уравнений вида (4).

4. Разработаны алгоритмы и пакеты программ построения фазовых портретов квазилинейных уравнений вида (2) - (3).

Положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство теоремы ограниченности и устойчивости в целом решений дифференциального уравнения (2) и получение классификации фазовых портретов её анализ.

2. Доказательство теоремы существования предельного цикла для уравнения вида (3).

3. Доказательство теоремы возникновения бифуркации Андронова - Хопфа для дифференциальных уравнений, содержащих негладкие нелинейности.

4. Разработка алгоритмов и пакетов программ построения фазовых портретов квазилинейных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. В работе обоснована схема исследования устойчивости решений динамических систем с негладкими правыми частями, а также схема анализа периодических колебаний. Предлагаемые методы могут быть использованы при исследовании динамических систем, математических моделей, содержащих кусочно-линейные функции, функции типа модуля и т.д. Полученные результаты доведены до расчетных формул. Программы реализованы в среде современных языков программирования, в частности, Visual Basic.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний, теории устойчивости, топологические методы исследования локальных бифуркаций.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах Института математики им. А. Джураева АН РТ (2012-2015 гг.), Вологодского государственного технического университета (2014 г., руководитель - профессор Э.М. Мухамадиев); на апрельских конференциях ТНУ (2012-2015 гг.); на международной научной конференции, посвященной 80 - летию академика АН РТ А.Д. Джураева (Душанбе, 07-08 декабря 2012 г.); на международном научно-практическом семинаре, посвящённом 75-летию доктора технических наук, профессора М.А. Саттарова "Проблемы гидромеханики и развитие гидроэнергетики, мелиорации и экологии в Центральной Азии" (г. Душанбе, 15-16 марта 2013 г.); на международной научной конференции, посвящённой 85-летию профессора Б.Б. Гафура "Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел" (Душанбе, 25-26 октября 2013 г.); на международных научных конференциях "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ" (г. Уфа, БашГУ, 24-26 сентября 2014 г. и 1-3 октября 2015 г.); на международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений", посвящённой 80-летию доктора физико-математических наук, профессора В.Я. Стеценко (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.).

Личный вклад автора. Постановка основных задач принадлежит научному руководителю. Результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ, опубликованных в соавторстве, соискатель принимал участие в обосновании предлагаемых алгоритмов, а также им получены основные результаты компьютерного моделирования. В диссертации изложены результаты, полученные автором самостоятельно.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах автора, в том числе 4 статьях в журналах из списка ВАК Российской Федерации. Список статей приведён в конце автореферата.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трёх глав, разделенных на параграфы, приложения и списка литературы. Текст диссертации насчитывает 124 страниц. В списке литературы - 106 наименований.

Краткое содержимое работы. Во **введении** обосновывается актуальность рассматриваемых в диссертационной работе задач, приводится обзор литературных источников, формулируется цель исследований, кратко излагается основное содержание работы.

В **первой главе** приводятся необходимые общие сведения из теории динамических систем, устойчивости решений, фазовых портретов, сценариев различных бифуркаций и т.п. Глава носит вспомогательный характер и содержит 3 параграфа.

Во **второй главе** (§§2.1-2.3) приводятся основные результаты диссертации, связанные с классификацией и анализом фазовых портретов, анализом устойчивости состояний равновесий, нахождением предельных циклов дифференциальных уравнений второго порядка вида (2) и (3); исследуются основные сценарии бифуркаций для уравнений вида (4).

В §2.1 рассматривается квазилинейное уравнение вида

$$x'' + ax' + bx = -c|x - \lambda|. \tag{5}$$

Изучается устойчивость состояния равновесия уравнения (5). Уравнение (5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 + c|x_1 - \lambda|, \end{cases} \tag{6}$$

где $x = x_1$, $x' = x_2$.

Сначала проводится анализ фазового портрета траекторий однородного уравнения

$$x'' + ax' + bx + c|x| = 0, \tag{7}$$

в зависимости от расположения коэффициентов (a, b, c) как точки трехмерного пространства R^3. Если $c = 0$, то (7) есть линейное уравнение второго порядка, фазовый портрет которого хорошо известен. Ниже будем предполагать, что $c \neq 0$.

Уравнение (7) "склеивается" из линейных уравнений

$$x'' + ax' + (b + c)x = 0, \quad \texttt{если} \quad x > 0 \tag{8}$$

и

$$x'' + ax' + (b - c)x, \quad \texttt{если} \quad x \leq 0. \tag{9}$$

Обозначим через $\mu_1^{\pm}$ и $\mu_2^{\pm}$ корни характеристического уравнения

$$\mu^2 + a\mu + (b \pm c) = 0, \tag{10}$$

соответствующего уравнениям (8) и (9):

$$\mu_1^{\pm} = -\frac{1}{2}\left\{(a - \sqrt{a^2 - 4(b \pm c)}\right\}, \qquad \mu_2^{\pm} = -\frac{1}{2}\left\{a + \sqrt{a^2 - 4(b \pm c)}\right\}.$$

Из этих формул для корней характеристических уравнений (10) следует, что в полупространстве $\{(a, b, c)\}$ коэффициентов уравнения (7) корни $\mu_1^{\pm}$ соответственно обращаются в нуль при $(b \pm c) = 0$ и меняют знак при возрастании $(b \pm c)$; корни $\mu_1^{\pm}, \mu_2^{\pm}$, соответственно, вещественны при $\frac{a^2}{4} >$ $> (b \pm c)$; становятся кратными при $\frac{a^2}{4} = (b \pm c)$ и комплексно сопряженными при $\frac{a^2}{4} < (b \pm c)$.

Исходя из этих свойств корней характеристических уравнений, полупространство $\{(a, b, c)\}$ разложим на следующие подмножества:

1. $\{(a,b,c):\ (b+|c|)<0\}$;

2. $\{(a,b,c):\ 4(b+|c|)\le a^2,\ |b|<|c|\}$;

3. $\{(a,b,c):\ 4(b+|c|)>a^2,\ |b|<|c|\}$;

4. $\{(a,b,c):\ 4(b+|c|)\le a^2,\ |c|<b\}$;

5. $\{(a,b,c):\ 4(b-|c|)<a^2<4(b+|c|),\ |c|<b\}$;

6. $\{(a,b,c):\ 4(b-|c|)>a^2\}$;

Проекция пересечений этих подмножеств с плоскостью $c = const > 0$ на координатную плоскость (a,b) приведена на рис.1.

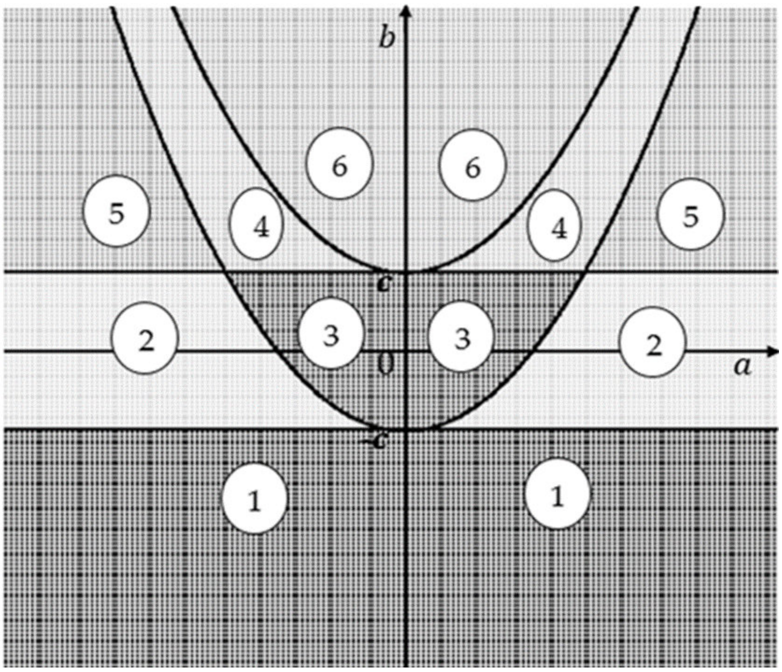
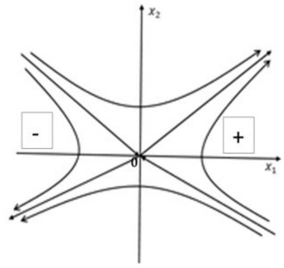
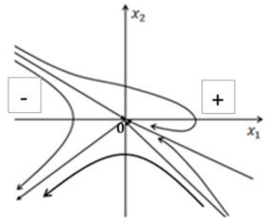
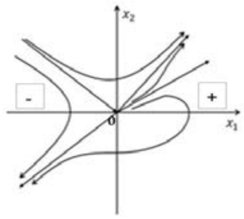
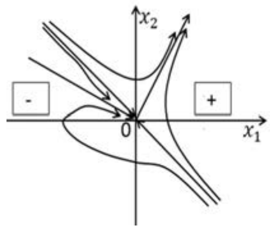
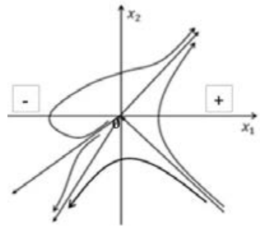
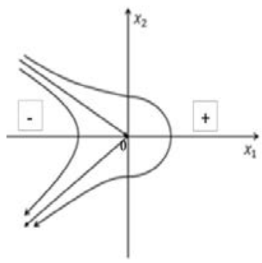
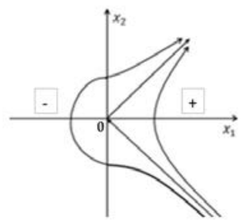


Рис. 1. Секторы для анализа уравнения 7.

Далее уравнение (7) записывается в виде системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 + c|x_1|. \end{cases} \tag{11}$$

В нижеприведенной таблице, в случае когда, $(b \pm\ c) \neq 0$, даётся классификация основных случаев поведения траекторий системы (11) на фазовой плоскости.

N	Область в пространстве параметров	Корни характеристического уравнения	Тип положения равновесия
1	$(b+\|c\|)<0.$	Числа $\mu_{1,2}^{\pm}$ - вещественные и разного знака	 Седло
2	$\|b\|<\|c\|$ и $4(b+\|c\|)\leq a^2$	Либо $\mu_{1,2}^{+}-$ вещественные и разного знака, и $\mu_{1,2}^{-}-$ вещественные и одного знака, либо числа $\mu_{1,2}^{-}-$ вещественные и разного знака, и $\mu_{1,2}^{+}-$ вещественные и одного знака	  2.1) a>0 2.1) a<0   2.2) a>0 2.2) a<0 Седло-узел
3	$\|b\|<\|c\|$ и $4(b+\|c\|)>a^2$	Либо $\mu_{1,2}^{-}-$ вещественные и разного знака, и $\mu_{1,2}^{+}=\alpha\pm i\beta-$ комплексно сопряжённые, либо $\mu_{1,2}^{+}-$ вещественные и разного знака, и $\mu_{1,2}^{-}=\alpha\pm i\beta-$ комплексно сопряжённые	  Седло-фокус

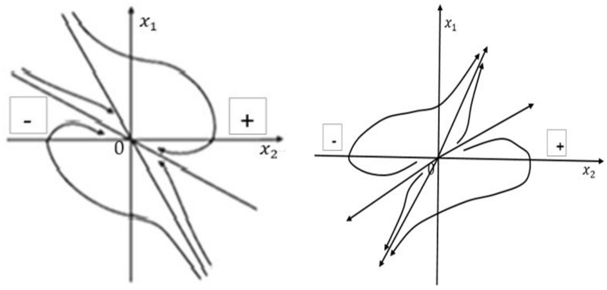
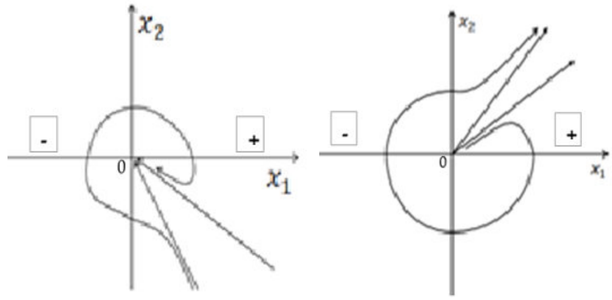
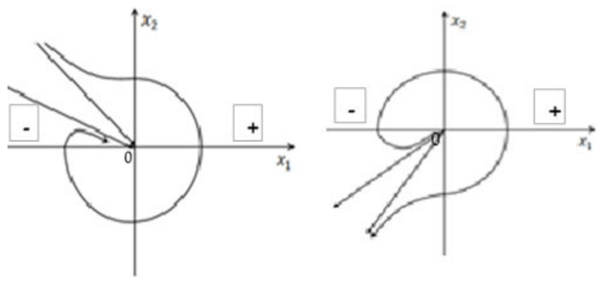
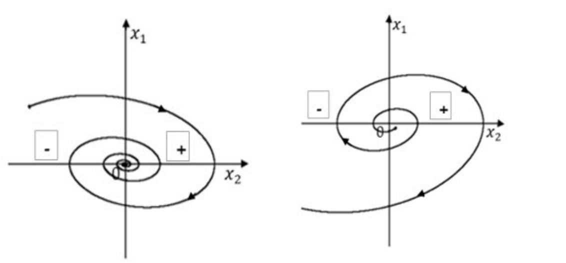
4	$\lvert c\rvert < b$ и $4(b+\lvert c\rvert) \le a^2$	Числа $\mu_1^{\pm}$, $\mu_2^{\pm}-$ вещественные и одного знака, противоположного знаку коэффициента a	 Узел (устойчивый узел при $a > 0$ и неустойчивый узел, при $a < 0$)
5	$\lvert c\rvert < b$ и $4(b-\lvert c\rvert) < a^2$ $< 4(b+\lvert c\rvert)$	Либо $\mu_{1,2}^{-}-$ вещественные и разного знака, и $\mu_{1,2}^{+} = \alpha \pm i\beta-$ комплексно сопряжённые, либо $\mu_{1,2}^{+}-$ вещественные и разного знака, и $\mu_{1,2}^{-} = \alpha \pm i\beta-$ комплексно сопряжённые	 5.1) a>0 5.1) a<0  5.2) a>0 5.2) a<0 Седло-фокус
6	$4(b-\lvert c\rvert) > a^2$	Числа $\mu_{1,2}^{+}$ и $\mu_{1,2}^{-}$- комплексные	 Фокус (устойчивый фокус, если $a > 0$, и неустойчивый фокус, если $a < 0$)

Таблица показывает, что для квазилинейного уравнения (7) возможны фазовые портреты, которые не наблюдаются в линейном случае. Примерами такого вида фазовых портретов являются седло-узел и седло-фокус.

В данном параграфе получены следующие утверждения для уравнения (5).

Теорема 1. *Пусть* $b \cdot c \cdot (b^2 - c^2) \neq 0$. *Тогда:*

а) если $\lambda = 0$, *то система (6) имеет единственную нулевую особую точку (0,0) ;*

б) если $\lambda > 0$, *то система (6) имеет единственную особую точку* $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$ *при* $|c| < |b|$, *две особые точки* $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$ $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ *при* $|b| < |c|, \quad b \cdot c < 0$ *и не имеет особых точек при* $|b| < |c|, \quad b \cdot c > 0$*;*

с) если $\lambda < 0$, *то система (6) имеет единственную особую точку* $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ *при* $|c| < |b|$, *две особые точки* $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$, $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ *при* $|b| < |c|, \quad b \cdot c > 0$ *и не имеет особых точек при* $|b| < |c|, \quad b \cdot c < 0$.

Лемма 1. *Пусть коэффициенты уравнения (5) удовлетворяют неравенствам*

$$0 < b - c < \frac{a^2}{4} < b + c \quad \textit{или} \quad 0 < b + c < \frac{a^2}{4} < b - c.$$

Тогда для любого λ *все решения система (6) ограничены при* $t > 0$, *если* $a > 0$, *и при* $t < 0$, *если* $a < 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \neq 0, \quad a > 0$ *и* $b - |c| > \frac{a^2}{4}$, *тогда стационарные решения уравнения (5) устойчивы в целом.*

В §2.2 исследуется нелинейное уравнение второго порядка

$$x'' + ax' + bx = -c|x' - \varphi(x, x')|, \tag{12}$$

где a, b, c - вещественные числа, а функция $\varphi(x, y)$-непрерывна и удовлетворяет некоторому условию роста при $|x| + |y| \to \infty$. Найдены условия на коэффициенты a, b, c и функцию $\varphi(x, y)$, которые обеспечивают существование предельного цикла уравнения (12).

Уравнение (12) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -ay - bx_1 - c|y - \varphi(x, y)|. \quad . \end{cases} \tag{13}$$

Ниже будем предполагать, что функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} \frac{|\varphi(x, y)|}{|x| + |y|} = 0. \tag{14}$$

Условие (14) обеспечивает продолжимость решения системы (13) на всю числовую ось $(-\infty, \infty)$.

Предполагается, что $b > 0, c > 0$, и функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию (14), $\varphi(0, 0) > 0$, и система (13) имеет единственную особую точку, т.е. скалярное уравнение

$$bx + c|\varphi(x, 0)| = 0 \tag{15}$$

имеет единственное решение x_0, причем $x_0 \neq 0$.

В качестве примера рассматривается функция $\varphi(x, y) = \cos(x + y)$. Она удовлетворяет условию (14), и $\varphi(0, 0) = 1 > 0$. Следующее утверждение определяет условие единственности решения уравнения (15).

Лемма 2. *Уравнение* $dx + |\cos(x)| = 0$*, где* d*-заданное число, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $|d|\sqrt{1 + x_1^2} > 1$*, где* $x_1 \in (\pi/2, \pi)$ *и является решением уравнения* $\cos(x) + x\sin(x) = 0$ $(x_1 \approx \approx 2,798386, 1/\sqrt{1 + x_1^2} \approx 0,336508)$.

Далее рассматривается общее уравнение второго порядка

$$x'' = f(x, x'), \tag{16}$$

где $f(x, y)$-определённая на всей плоскости (x, y) непрерывная функция. Уравнение (16) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = f(x, y). \end{cases} \tag{17}$$

Ниже мы будем предполагать, что любое решение системы (17) продолжимо на всю числовую ось.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть имеет место (14) и коэффициенты системы (13), удовлетворяют условиям:* $b > 0, c > 0, a \notin [\min\{0, 2\sqrt{b} - c\}, \max\{0, c - 2\sqrt{b}\}]$. *Тогда все решения системы (13) ограничены при* $t > 0$*, если* $a > 0$*, и при*

$t<0$, *если* $a<0$, *т.е.* $a\neq 0$, *и для любого решения* $(x(t),y(t))$ *справедливо неравенство*

$$\sup\{|x(t)|+|y(t)|: \quad a\cdot t>0\}<\infty.$$

Лемма 3. *Предположим, что функция* $f(x,y)$ *в некоторой окрестности* $|x-x_0|+|y|<\sigma, \quad (\sigma>0)$ *особой точки* $(x_0,0)$ *удовлетворяет условиям:*

а) $\quad f(x,0)(x-x_0)\leq 0$ *и* $f(x,0)$ *тождественно не равна нулю в любом интервале* $(-\delta,0)$ *и* $(0,\delta), \quad \delta>0$*;*

б) $\quad (f(x,y)-f(x,0))y\geq 0$.

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ *системы (17), отличного от стационарного решения* $(x_0,0)$*, имеет место*

$$\inf_{t\geq 0}[|x(t)-x_0|+|y(t)|]>0.$$

Теорема 4. *Предположим, что*

а) коэффициенты уравнения (12) удовлетворяют условиям $a>\max\{0,c-$ $-2\sqrt{b}\}$*;*

б) функция $\varphi(x,y)$ *в некоторой окрестности* $|x-x_0|+|y|<\sigma$, $\sigma>0$ *особой точки* $(x_0,0)$ *удовлетворяет условиям:* $\quad ((c-a)y+c\varphi(x,y)-c\varphi(x,0))y\geq 0$.

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ *системы (13), отличного от стационарного, и любой последовательности* $h_k\to+\infty$ *существует подпоследовательность* h_{k_j} *такая, что решения* $(x(t+h_{k_j}),y(t+$ $+h_{k_j}))$ *равномерно на каждом отрезке приближаются к некоторому периодическому решению системы (13) при* $j\to+\infty$.

В §2.3 исследуется дифференциальное уравнение вида

$$x'=A(\mu)x+b(x,\mu)+\varphi(x,\mu)\,, \quad x\in R^N\,, \tag{18}$$

правая часть которого зависит от скалярного параметра μ. Здесь

– $A(\mu)$ - квадратная матрица порядка N с непрерывно дифференцируемыми элементами;

– $b(x,\mu)$ - кусочно-линейная вектор-функция, определяемая равенством

$$b(x,\mu)=\left[\begin{array}{c} b_{11}(\mu)|x_1|+...+b_{1N}(\mu)|x_N| \\ \cdots \\ b_{N1}(\mu)|x_1|+...+b_{NN}(\mu)|x_N| \end{array}\right],$$

в которой $b_{ij}(\mu)$ – непрерывно дифференцируемые функции, для которых выполнены равенства $b_{ij}(\mu_0) = 0$; $\varphi(x, \mu)$ – непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных вектор-функция, удовлетворяющая условию $\varphi(x, \mu) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$ равномерно по μ.

Уравнение (18) при всех значениях параметра μ имеет нулевое решение $x = 0$. Изучается задача о локальных бифуркациях в окрестности точки равновесия $x = 0$ уравнения (18). Рассматриваются ситуации, когда матрица $A(\mu_0)$ имеет простое нулевое собственное значение или пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$.

Ограничимся здесь приведением одного из результатов, относящегося ко второй из указанных ситуаций. Так как матрица $A(\mu_0)$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, то существует непрерывная ветвь собственных значений $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ матрицы $A(\mu)$ такая, что $\alpha(\mu_0) = 0$ и $\omega(\mu_0) = \omega_0$.

Теорема 5. *Пусть матрица $A(\mu_0)$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых собственных значений. Пусть*

$$\alpha'(\mu_0) \neq 0 .$$

Пусть, наконец, при некоторых положительных числах b_0 и δ_0 выполнено соотношение:

$$\max_{i,j} |b_{ij}(\mu)| \leq b_0 |\mu - \mu_0|^2 \ \text{ при } \ |\mu - \mu_0| \leq \delta_0 .$$

Тогда пара (μ_0, T_0) является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (18).

В **третьей главе** приводятся алгоритмы построения рассматриваемых в диссертации фазовых портретов динамических систем, математические модели которых содержат модульные и кусочно-линейные нелинейности. Эти алгоритмы разработаны на основе теоретических положений, полученных во второй главе диссертации. В частности, разработаны следующие алгоритмы:

1. Алгоритм построения фазовых портретов в окрестностях состояний равновесия. Приведена программная реализация этого алгоритма для некоторых моделей, в частности, для уравнений (2) и (3).

Предусматривается проверка основных требований, (например, условий вышеприведенной таблицы), численное построение решений и их визуализация;

2. Алгоритм исследования устойчивости и ограниченности решений, а также выявления предельного цикла.

Предложенные алгоритмы частично программно реализованы в среде Mathcad, разработан соответствующий пакет программ на Visual Basic, основные положения которого вынесены в Приложение.

В заключении к диссертации представлены основные результаты работы и возможные дальнейшие темы исследований.

Автор благодарит своего научного руководителя - доктора физико-математических наук Исхокбоя Джумаевича Нурова за постановку задач, обсуждение результатов и ценные замечания.

Основные результаты диссертации

- Для дифференциального уравнения (2) дана классификация и анализ фазовых портретов и проведен анализ устойчивости состояний равновесия.
- Получены признаки существования предельного цикла для уравнения вида (3).
- Исследованы основные сценарии бифуркаций, в том числе, получен новый признак бифуркации Андронова - Хопфа для дифференциальных уравнений, содержащих негладкие нелинейности.
- Разработаны алгоритмы и пакеты программ построения фазовых портретов квазилинейных уравнений.

Публикации по теме диссертации

в изданиях из перечня ВАК России:

1. Нуров И.Д., Халилова М.Ш., Арабов М.К. Метод Рунге - Кутта в задаче исследования бифуркации негладких динамических систем // Доклады АН РТ. –2012. – Т. 55. –№12. – С. 960-964.

2. Арабов М.К., Гулов А.М., Нуров И.Д. Компьютерная визуализация поведения решений негладкой динамической системы // Доклады АН РТ. – 2014. –Т. 57. –№9-10. – С. 739-745.

3. Арабов М.К. Анализ устойчивости особой точки квазилинейного уравнения второго порядка // Известия Академии наук РТ, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2015. – №1 (158). – С. 42-49.

4. Арабов М.К. Анализ локальных бифуркаций динамических систем, содержащих негладкие нелинейности // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2015. – №1-4 (168). – С. 45-48.

В других изданиях:

5. Арабов М.К., Нуров И.Д., Каримова М.Х. Компьютерный метод нахождения предельного цикла и его единственность в динамической системе второго порядка // Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел: материалы Международной научной конференции посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Сабирова Темура Сафаровича (Душанбе, 29 - 30 октября 2015 г.).–Душанбе – 2015. – С. 79-80.

6. Арабов М.К., Нуров И.Д., Собиров Х.И. Секторное разделение и классификации особых точек квазилинейного уравнения второго порядка // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сборник тезисов международной научной конференции (Уфа, 1-3 октября 2015). – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2015 г. – С. 10-13.

7. Нуров И.Д., Арабов М.К. Исследования локальных бифуркаций динамических систем, с негладкими нелинейностями // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений: материалы Международной научной конференции посвященной 80-летию члена-корреспондента АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.). –Душанбе – 2015. – С. 79-80.

8. Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Арабов М.К., Гулов А.М. Компьютерная визуализация и секторный анализ фазовых портретов негладких динамических систем // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сборник тезисов международной научной конференции (Уфа, 24 - 26 сентября 2014). – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2014. – С. 61-63.

9. Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Арабов М.К., Гулов А.М. О существовании предельных циклов нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сборник тезисов международной научной конференции (Уфа, 24 - 26 сентября 2014). – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2014. – С. 59-60.

10. Гулов А.М., Арабов М.К., Давлатов И. Анализ устойчивости фазовых портретов негладкой двумерной системы // Материалы Республиканской научно-теоретической конференции "Актуальные проблемы современной математики и её преподавания": посвящается памяти профессора Муртазоева Д.М. (Душанбе, 20 декабря 2014 г.). – Душанбе – 2014. – С. 22-23.

11. Гулов А.М., Арабов М.К., Кобилзода М. Об одном алгоритме секторного анализа негладких двумерных систем // Современные проблемы прикладной математики и информатики: материалы Республиканской конференции посвящённой 70-летию професора Боймурод Алиев. – Душанбе – 2014. – С. 36-38.

12. Арабов М.К., Нуров И.Д., Ахмедова З.М. Фазовые переходы бифуркационных явлений в негладких динамических системах // Проблемы гидромеханики и развитие гидроэнергетики, мелиорации и экологии в Центральной Азии: материалы Международного научно-практического семинара, посвящённого 75-летию Заслуженного деятеля наук и техники Таджикистана, доктора технических наук, профессора Саттарова Малика Абдусатторовича (Душанбе, 15-16 марта 2013 г.). –Душанбе – 2013. – С. 108-111.

13. Арабов М.К., Нуров И.Д. Моделирование особых точек трёхмерной динамической системы // Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел: материалы Международной научной конференции посвящённой 85-летию со дня рождения профессора Гафура Бабаевича Бабаева (Душанбе, 25-26 октября 2013 г.). –Душанбе – 2013. – С. 9-10.

14. Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш., Арабов М.К. Фазовые портреты бифуркационных явлений в негладких динамических системах // Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа: материалы Международной научной конференции посвящённой 80-летию академика АН Республики Таджикистан Джураева Абдухамида Джураевича (Душанбе, 07-08 декабря 2012 г.). –Душанбе – 2012. – С. 58-60.