

Институт математики имени А.Джураева
Академия наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

Арабов Муллошараф Курбонович

**Исследование периодических колебаний и анализ
устойчивости решений дифференциальных уравнений
второго порядка с кусочно-линейными правыми
частями**

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Нуров И.Д.

Душанбе — 2016

Оглавление

Введение	4
Общая характеристика работы	4
Краткое содержание работы	10
1 Фазовые портреты траекторий динамических систем	17
1.1 Понятие динамической системы	17
1.1.1 Конечномерные и бесконечномерные динамические системы	20
1.1.2 Непрерывные динамические системы	21
1.1.3 Компьютерное представление динамических систем	22
1.1.4 Линейные и нелинейные динамические системы	24
1.1.5 Фазовые портреты динамической системы	25
1.2 Элементы теории устойчивости	32
1.2.1 Основные понятия и определения устойчивости	34
1.2.2 Основные утверждений по теории устойчивости	35
1.3 Предельные циклы в динамических системах	40
1.4 Постановка и примеры бифуркационных явлений	42
1.4.1 Элементы теории бифуркаций.	42
1.4.2 Бифуркация периодических решений Андронова–Хопфа	45
2 Анализ устойчивости решений кусочно-линейных динамических систем	48

2.1	Анализ особой точки квазилинейного уравнения второго порядка	48
2.1.1	Стационарные решения кусочно-линейного дифференциального уравнения второго порядка, зависящего от параметра	58
2.1.2	Пример 1: груз на транспортере	73
2.2	Признаки существования предельных циклов дифференциальных уравнений второго порядка	74
2.2.1	Анализ фазового портрета однородного уравнения	75
2.2.2	Условия ограниченности решений на полуоси	79
2.2.3	Устойчивость изолированной особой точки	81
2.2.4	Признаки существования предельных циклов	84
2.3	Исследование локальных бифуркаций динамических систем, содержащих негладкие нелинейности	87
2.3.1	Случай нулевого собственного значения.	88
2.3.2	Бифуркация Андронова-Хопфа.	89
2.3.3	Вспомогательное утверждение	92
2.3.4	Пример: уравнение второго порядка.	98
3	Приложения	100
3.1	Алгоритм и пакет программ	100
3.1.1	Операторное описание алгоритма	101
	Заключение	111
	Список литературы	112

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Модели с негладкими эффектами имеют важное значение в различных разделах физики и механики (теория фазовых переходов, электричество, магнетизм), в инженерных задачах, в задачах теории управления, в экономике, биологии и др. Часто негладкие эффекты связаны с наличием в системе участков, характеризующихся включением (выключением) отдельных элементов или их переключением. Например, характеристика диода даже в простейшей идеализации имеет два участка: участок нулевого тока (запертый диод) и участок, на котором ток пропорционален напряжению. Фазовые траектории таких систем сшиваются из отдельных гладких участков.

Модели негладких систем обычно включают в себя дифференциальные уравнения с негладкими, релейными, гистерезисными, многозначными нелинейностями. Примерами являются динамические модели с сухим трением, модели с перескоками, модель "двухпозиционный авторулевой", модели, возникающие при изучении систем автоматического регулирования температур, напряжения и др.

Существенный вклад в развитие теории динамических систем, содержащих негладкие и разрывные нелинейности, внесли исследования А.А. Андропова, Н.Н. Баутина, Б.Д. Гельмана, М.А. Красносельского, А. Ласоты, Я.З. Цыпки-на, Е.А. Барбашина, Ю.И. Неймарка, А.Х. Гелига, А.Ф. Филиппова, Ю.Г. Борисовича, А.Д. Мышкисо, В.В. Обуховского, R.I. Leine и др.

Важное место при исследовании дифференциальных уравнений занимает изучение задач о периодических, почти-периодических и ограниченных решениях и об их устойчивости. В классической "гладкой" теории дифференциальных уравнений разработан ряд эффективных

методов исследования таких задач. Для негладких систем такая теория развита существенно меньше. Это связано, в первую очередь, с существенно более сложными проблемами, возникающими при анализе негладких систем. Поэтому при их изучении важны разработки как новых теоретических подходов, так и численных методов исследования. Важно также, чтобы эти численные методы были основаны на качественном исследовании данных моделей.

Особое место в теории “негладких” систем занимают задачи о дифференциальных уравнениях, содержащих кусочно-линейные функции и, в частности, функции типа модуля. Так, многие теоретические и практические задачи приводят к необходимости рассмотрения квазилинейных автономных систем:

$$x' = Ax + \varphi(x), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

где A - постоянная матрица, а вектор-функция $\varphi(x)$ содержит кусочно-линейные слагаемые вида

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} b_{11}|x_1 - \gamma_{11}| + \dots + b_{1n}|x_n - \gamma_{1n}| \\ \vdots \\ b_{n1}|x_1 - \gamma_{n1}| + \dots + b_{nn}|x_n - \gamma_{nn}| \end{bmatrix},$$

в которых b_{ij} - некоторые числа, а γ_{ij} могут быть как постоянными, так и некоторыми ограниченными функциями, зависящими от x . В частности, к системе вида (1) приводят дифференциальные уравнения второго порядка следующего вида:

$$x'' + ax' + bx = c|x - \lambda|, \quad (2)$$

$$x'' + ax' + bx = c|x' - \varphi(x, x')|, \quad (3)$$

$$x'' + ax' + bx = b_1|x| + b_2|x'| + \varphi(x, x'), \quad (4)$$

где a, b, c - вещественные числа, а функция $\varphi(x, y)$ -непрерывна и удовлетворяет некоторому условию роста при $|x| + |y| \rightarrow \infty$.

Исследованию таких уравнений посвящены работы S. Maezava [89], R.I. Leine [87], Э.М. Мухамадиев [53], И.В.Фоменко, М.Г. Юмагулов [74] и др. Ими исследован ряд вопросов о фазовых портретах, о существовании периодических решений и, в частности, о предельных циклах, об устойчивости решений, о бифуркации периодических решений и т. п. В то же время многие вопросы здесь остаются ещё открытыми. В частности, актуальным с теоретической и практической точек зрения представляется изучение для уравнений вида (2) - (4) следующих вопросов:

- Классификация фазовых портретов в зависимости от их коэффициентов.
- Анализ устойчивости состояний равновесия и признаки существования предельных циклов.
- Анализ основных сценариев бифуркаций.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию указанных вопросов.

Объект исследования. Исследование периодических колебаний и анализ устойчивости решений дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-линейными правыми частями.

Предмет исследования. Уравнения с кусочно-линейными правыми частями.

Цель работы. Для дифференциальных уравнений вида (2) - (4) провести классификацию и анализ фазовых портретов в зависимости от их коэффициентов, провести анализ устойчивости состояний равновесия, изучить вопросы существования предельных циклов, провести анализ основных сценариев бифуркаций.

Задачи работы. В соответствии с поставленной целью выделяются следующие задачи:

1. Для дифференциального уравнения (2) получить классификацию и анализ фазовых портретов и провести анализ устойчивости состояний равновесия.
2. Получить признаки существования предельного цикла для уравнения вида (3).
3. Исследовать основные сценарии бифуркаций, в том числе получить новый признак бифуркации Андронова - Хопфа для дифференциальных уравнений, содержащих негладкие нелинейности.
4. Разработать алгоритмы и пакеты программ построения фазовых портретов квазилинейных уравнений.

Методы исследования. В работе используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний, теории устойчивости, топологические методы исследования локальных бифуркаций.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Для дифференциального уравнения вида (2) дана классификация и анализ фазовых портретов, и проведён анализ устойчивости состояний равновесия.
2. Получены признаки существования предельных циклов уравнений вида (3).
3. Исследованы основные сценарии бифуркаций, в том числе, получен достаточный признак бифуркации Андронова - Хопфа для уравнений вида (4).
4. Разработаны алгоритмы и пакеты программ построения фазовых портретов квазилинейных уравнений вида (2) - (3).

Положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство теоремы ограниченности и устойчивости в целом решений дифференциального уравнения (2) и получение классификации фазовых портретов её анализ.
2. Доказательство теоремы существования предельного цикла для уравнения вида (3).
3. Доказательство теоремы возникновения бифуркации Андронова - Хопфа для дифференциальных уравнений, содержащих негладкие нелинейности.
4. Разработка алгоритмов и пакетов программ построения фазовых портретов квазилинейных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. В работе обоснована схема исследования устойчивости решений динамических систем с негладкими правыми частями, а также схема анализа периодических колебаний. Предлагаемые методы могут быть использованы при исследовании динамических систем, математических моделей, содержащих кусочно-линейные функции, функции типа модуля и т.д. Полученные результаты доведены до расчетных формул. Программы реализованы в среде современных языков программирования, в частности, Visual Basic.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний, теории устойчивости, топологические методы исследования локальных бифуркаций.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах Института математики им.

А. Джураева АН РТ (2012-2015 гг.), Вологодского государственного технического университета (2014 г., руководитель - профессор Э.М. Мухамадиев); на апрельских конференциях ТНУ (2012-2015 гг.); на международной научной конференции, посвященной 80 - летию академика АН РТ А.Д. Джураева (Душанбе, 07-08 декабря 2012 г.); на международном научно-практическом семинаре, посвящённом 75-летию доктора технических наук, профессора М.А. Саттарова "Проблемы гидромеханики и развитие гидроэнергетики, мелиорации и экологии в Центральной Азии" (г. Душанбе, 15-16 марта 2013 г.); на международной научной конференции, посвящённой 85-летию профессора Б.Б. Гафура "Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел" (Душанбе, 25-26 октября 2013 г.); на международных научных конференциях "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ" (г. Уфа, БашГУ, 24-26 сентября 2014 г. и 1-3 октября 2015 г.); на международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" , посвящённой 80-летию доктора физико-математических наук, профессора В.Я. Стеценко (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.).

Личный вклад автора. Постановка основных задач принадлежит научному руководителю. Результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ, опубликованных в соавторстве, соискатель принимал участие в обосновании предлагаемых алгоритмов, а также им получены основные результаты компьютерного моделирования.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах [93 – 106] автора, в том числе 4 статьях [93 – 96] в журналах из списка ВАК Российской Федерации.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трёх глав, разделенных на параграфы, приложения и списка литературы. Текст диссертации насчитывает 124 страниц. В списке литературы - 106

наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность рассматриваемых в диссертационной работе задач, приводится обзор литературных источников, формулируется цель исследований, кратко излагается основное содержание работы.

В **первой главе** приводятся необходимые общие сведения из теории динамических систем, устойчивости решений, фазовых портретов, сценариев различных бифуркаций и т.п. Глава носит вспомогательный характер и содержит 3 параграфа.

Во **второй главе** (§§2.1-2.3) приводятся основные результаты диссертации, связанные с классификацией и анализом фазовых портретов, анализом устойчивости состояний равновесий, нахождением предельных циклов дифференциальных уравнений второго порядка вида (2) и (3); исследуются основные сценарии бифуркаций для уравнений вида (4).

В §2.1 рассматривается квазилинейное уравнение вида

$$x'' + ax' + bx = -c|x - \lambda|. \quad (5)$$

Изучается устойчивость состояния равновесия уравнения (5). Уравнение (5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -ax_2 - bx_1 + c|x_1 - \lambda|, \end{cases} \quad (6)$$

где $x = x_1$, $x' = x_2$.

Сначала проводится анализ фазового портрета траекторий однородного уравнения

$$x'' + ax' + bx + c|x| = 0, \quad (7)$$

в зависимости от расположения коэффициентов (a, b, c) как точки трехмерного пространства R^3 .

В случае когда, $(b \pm c) \neq 0$, даётся классификация основных случаев поведения траекторий решений уравнения (7) на фазовой плоскости.

В данном параграфе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $b \cdot c \cdot (b^2 - c^2) \neq 0$. Тогда:

а) если $\lambda = 0$, то система (6) имеет единственную нулевую особую точку $(0,0)$;

б) если $\lambda > 0$, то система (6) имеет единственную особую точку $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$ при $|c| < |b|$, две особые точки $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$ $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|b| < |c|$, $b \cdot c < 0$ и не имеет особых точек при $|b| < |c|$, $b \cdot c > 0$;

с) если $\lambda < 0$, то система (6) имеет единственную особую точку $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|c| < |b|$, две особые точки $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$, $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|b| < |c|$, $b \cdot c > 0$ и не имеет особых точек при $|b| < |c|$, $b \cdot c < 0$.

Лемма 1. Пусть коэффициенты уравнения (5) удовлетворяют неравенствам

$$0 < b - c < \frac{a^2}{4} < b + c \quad \text{или} \quad 0 < b + c < \frac{a^2}{4} < b - c.$$

Тогда для любого λ все решения система (6) ограничены при $t > 0$, если $a > 0$, и при $t < 0$, если $a < 0$.

Теорема 2. Пусть $\lambda \neq 0$, $a > 0$ и $b - |c| > \frac{a^2}{4}$, тогда стационарные решения уравнения (5) устойчивы в целом.

В §2.2 исследуется нелинейное уравнение второго порядка

$$x'' + ax' + bx = -c|x' - \varphi(x, x')|, \quad (8)$$

где a, b, c - вещественные числа, а функция $\varphi(x, y)$ -непрерывна и удовлетворяет некоторому условию роста при $|x| + |y| \rightarrow \infty$. Найдены условия на коэффициенты a, b, c и функцию $\varphi(x, y)$, которые обеспечивают существование предельного цикла уравнения (8).

Уравнение (8) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -ay - bx_1 - c|y - \varphi(x, y)|. \end{cases} \quad (9)$$

Ниже будем предполагать, что функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(x, y)|}{|x| + |y|} = 0. \quad (10)$$

Условие (10) обеспечивает продолжимость решения системы (9) на всю числовую ось $(-\infty, \infty)$.

Предполагается, что $b > 0, c > 0$, и функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию (10), $\varphi(0, 0) > 0$, и система (9) имеет единственную особую точку, т.е. скалярное уравнение

$$bx + c|\varphi(x, 0)| = 0 \quad (11)$$

имеет единственное решение x_0 , причем $x_0 \neq 0$.

В качестве примера рассматривается функция $\varphi(x, y) = \cos(x + y)$. Она удовлетворяет условию (10), и $\varphi(0, 0) = 1 > 0$. Следующее утверждение определяет условие единственности решения уравнения (11).

Лемма 2. Уравнение $dx + |\cos(x)| = 0$, где d -заданное число, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $|d|\sqrt{1 + x_1^2} > 1$, где $x_1 \in (\pi/2, \pi)$ и является решением уравнения $\cos(x) + x \sin(x) = 0$ ($x_1 \approx 2,798386, 1/\sqrt{1 + x_1^2} \approx 0,336508$).

Далее рассматривается общее уравнение второго порядка

$$x'' = f(x, x'), \quad (12)$$

где $f(x, y)$ -определенная на всей плоскости (x, y) непрерывная функция. Уравнение (12) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = f(x, y). \end{cases} \quad (13)$$

Ниже мы будем предполагать, что любое решение системы (13) продолжимо на всю числовую ось.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть имеет место (10) и коэффициенты системы (9), удовлетворяют условиям: $b > 0, c > 0, a \notin [\min\{0, 2\sqrt{b} - c\}, \max\{0, c - 2\sqrt{b}\}]$. Тогда все решения системы (9) ограничены при $t > 0$, если $a > 0$, и при $t < 0$, если $a < 0$, т.е. $a \neq 0$, и для любого решения $(x(t), y(t))$ справедливо неравенство

$$\sup\{|x(t)| + |y(t)| : a \cdot t > 0\} < \infty.$$

Лемма 3. Предположим, что функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, ($\sigma > 0$) особой точки $(x_0, 0)$ удовлетворяет условиям:

а) $f(x, 0)(x - x_0) \leq 0$ и $f(x, 0)$ тождественно не равна нулю в любом интервале $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$, $\delta > 0$;

б) $(f(x, y) - f(x, 0))y \geq 0$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (13), отличного от стационарного решения $(x_0, 0)$, имеет место

$$\inf_{t \geq 0} [|x(t) - x_0| + |y(t)|] > 0.$$

Теорема 4. Предположим, что

а) коэффициенты уравнения (8) удовлетворяют условиям

$$a > \max\{0, c - 2\sqrt{b}\};$$

б) функция $\varphi(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ особой точки $(x_0, 0)$ удовлетворяет условиям: $((c - a)y + c\varphi(x, y) - c\varphi(x, 0))y \geq 0$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (9), отличного от стационарного, и любой последовательности $h_k \rightarrow +\infty$ существует подпоследовательность h_{k_j} такая, что решения $(x(t + h_{k_j}), y(t + h_{k_j}))$ равномерно на каждом отрезке приближаются к некоторому периодическому решению системы (9) при $j \rightarrow +\infty$.

В §2.3 исследуется дифференциальное уравнение вида

$$x' = A(\mu)x + b(x, \mu) + \varphi(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad (14)$$

правая часть которого зависит от скалярного параметра μ . Здесь

– $A(\mu)$ – квадратная матрица порядка N с непрерывно дифференцируемыми элементами;

– $b(x, \mu)$ – кусочно-линейная вектор-функция, определяемая равенством

$$b(x, \mu) = \begin{bmatrix} b_{11}(\mu)|x_1| + \dots + b_{1N}(\mu)|x_N| \\ \dots \\ b_{N1}(\mu)|x_1| + \dots + b_{NN}(\mu)|x_N| \end{bmatrix},$$

в которой $b_{ij}(\mu)$ – непрерывно дифференцируемые функции, для которых выполнены равенства $b_{ij}(\mu_0) = 0$; $\varphi(x, \mu)$ – непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных вектор-функция, удовлетворяющая условию $\varphi(x, \mu) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \rightarrow 0$ равномерно по μ .

Уравнение (14) при всех значениях параметра μ имеет нулевое решение $x = 0$. Изучается задача о локальных бифуркациях в окрестности точки равновесия $x = 0$ уравнения (14). Рассматриваются ситуации, когда матрица $A(\mu_0)$ имеет простое нулевое собственное значение или пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$.

Ограничимся здесь приведением одного из результатов, относящегося ко второй из указанных ситуаций. Так как матрица $A(\mu_0)$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, то существует непрерывная ветвь собственных значений $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ матрицы $A(\mu)$ такая, что $\alpha(\mu_0) = 0$ и $\omega(\mu_0) = \omega_0$.

Теорема 5. Пусть матрица $A(\mu_0)$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых собственных

значений. Пусть

$$\alpha'(\mu_0) \neq 0.$$

Пусть, наконец, при некоторых положительных числах b_0 и δ_0 выполнено соотношение:

$$\max_{i,j} |b_{ij}(\mu)| \leq b_0 |\mu - \mu_0|^2 \text{ при } |\mu - \mu_0| \leq \delta_0.$$

Тогда пара (μ_0, T_0) является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (14).

В **третьей главе** приводятся алгоритмы построения рассматриваемых в диссертации фазовых портретов динамических систем, математические модели которых содержат модульные и кусочно-линейные нелинейности. Эти алгоритмы разработаны на основе теоретических положений, полученных во второй главе диссертации. В частности, разработаны следующие алгоритмы:

1. Алгоритм построения фазовых портретов в окрестностях состояний равновесия. Приведена программная реализация этого алгоритма для некоторых моделей, в частности, для уравнений (2) и (3). Предусматривается проверка основных требований, (например, условий вышеприведенной таблицы), численное построение решений и их визуализация.
2. Алгоритм исследования устойчивости и ограниченности решений, а также выявления предельного цикла.

Предложенные алгоритмы частично программно реализованы в среде Mathcad, разработан соответствующий пакет программ на Visual Basic, основные положения которого вынесены в Приложение.

В **заклучении** к диссертации представлены основные результаты работы и возможные дальнейшие темы исследований.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя - доктора физико-математических наук Исхокбая Джумаевича Нурова за постановку задач, обсуждение результатов и ценные замечания.

Глава 1

Фазовые портреты траекторий динамических систем

В этой главе приводятся краткие сведения из общей теории гладких и негладких динамических систем (ДС). Рассматриваются классификация динамических систем, а также известные классические результаты об устойчивости решений. Глава носит вспомогательный характер. В ней используются сведения и результаты из [1] - [12], [14], [15], - [16], [18], [21], [29], [39], [44] - [48], [52], [55], [56], [62] - [66], [69] - [92].

1.1 Понятие динамической системы

Прежде чем описать понятие динамической системы, следует отметить, что оно является обобщением понятия механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями Ньютона. Одним из основных понятий во многих областях знаний является понятие системы. Системой [79] называют совокупность каких-либо элементов (реальных или идеальных), находящихся как во взаимной связи, так и во взаимодействии со своим окружением. Понятие системы активно используется в естественных и общественных науках, в технике. В качестве примеров могут быть биосфера (совокупность всех живых организмов Земли), Солнечная система (в нее, наряду с Солнцем,

входит также ряд планет и астероидов), автомобиль (как техническая система, включающая совокупность различных механизмов, агрегатов и узлов автомобиля), банковская система данного государства, числовая система (например, система целых чисел). Множества систем описывают и изучают, опираясь на соответствующую математическую модель. Такая модель включает совокупность некоторых величин, определяющих состояние системы, и законов, которые описывают взаимосвязь между этими величинами. Создавая правильную математическую модель, можно быстро и дешево решить многие проблемы, относящиеся к структуре и эволюции системы. Модели, отражающие систему в определенный момент времени, либо неизменяемую в определенном смысле в течение некоторого промежутка времени, называют статическими моделями. В данном случае говорят также о статической системе. Статические системы возникают, например, в задачах построения математических моделей, описывающих состояния каких-либо технических конструкций (мостов, балок и т. п.) в условиях равновесия. Модели, в которых описание системы включает зависимость ее состояния от времени, называют динамическими моделями. В этом случае говорят также о динамической системе (ДС). Состояния динамической системы в определенный момент времени t определяются набором x величин, при этом x может быть скалярной или векторной величиной, матрицей, функцией и т.д. Состояния x в реальных системах обычно связаны с наблюдаемыми количественными характеристиками: перемещение или скорость объекта, величина тока или напряжения, температура тела, численность популяции и т. п. Фундаментальным в теории динамических систем является концепция детерминированности, предполагающая, что состояния системы изменяются с течением времени по строго фиксированным (неизменным во времени) законам. Будущие состояния ДС однозначно определяются ее состоянием в настоящее время. Определение динамической системы обычно включает

- 1) множество возможных состояний D , называемое пространством состояний или фазовым пространством системы;
- 2) закон или оператор эволюции [79] F , ставящий в соответствие каждому состоянию $x \in D$ системы в начальный момент времени $t = 0$ и каждому последующему моменту времени $t \geq 0$ новое значение состояния $F(x, t) \in D$ (см. Рис. 1.1).

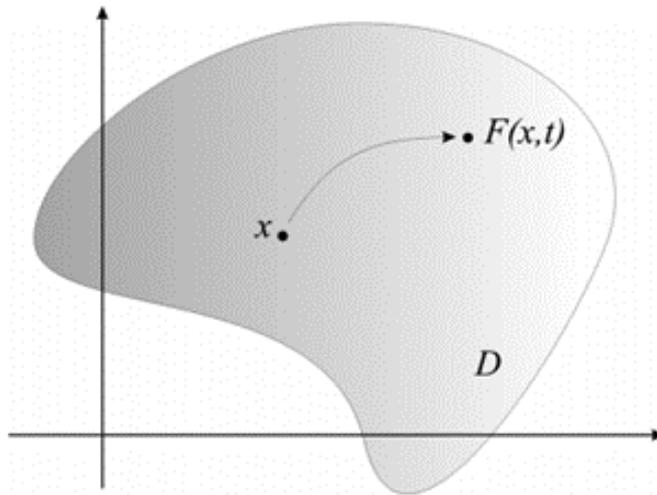


Рис. 1.1. Оператор эволюции

Следовательно, знание оператора эволюции F и состояния x_0 системы в начальный момент времени позволяет однозначно определить её состояния во все последующие моменты времени. Детерминированность характера поведения динамической системы отражают следующие свойства оператора эволюции:

1. $F(x, 0) = x$;
2. $F(F(x, t_1), t_2) = F(x, t_1 + t_2)$.

Таким образом, первое свойство означает, что в каждый момент времени динамическая система может находиться только в одном состоянии. Второе

свойство означает, что результат эволюции системы за время $t_1 + t_2$ единиц будет таким же, как если бы сначала зафиксировать её изменение за время t_1 единиц, а затем получить состояние измененной системы ещё через t_2 единиц времени.

Термин динамической системы является естественным обобщением понятия механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями Ньютона. Законы Ньютона послужили основой для математического моделирования многих задач классической и небесной механики, электричества, магнетизма, термодинамики и др. Основы современной теории динамических систем были заложены в работах А. М. Ляпунова, А. Пуанкаре и Дж. Биркгофа.

Анализ современной теории динамических систем оказался чрезвычайно полезным для исследования различных эволюционных, (т. е. изменяющихся во времени) процессов не только в физике и механике, но и в химии, биологии, экономике, информатике и др. В своем развитии понятие динамической системы наполнялось всё более и более глубоким содержанием. В настоящее время понятие динамической системы охватывает объекты любой природы, состояние которых изменяется во времени по некоторым законам. Это могут быть физические [27], химические, биологические [49], экономические и другие объекты, вычислительные процессы в математике и информатике [68] и т.д.

1.1.1 Конечномерные и бесконечномерные динамические системы

Динамическую систему называют конечномерной если её фазовое пространство D является множеством из конечномерного линейного пространства. В противном случае говорят о бесконечномерной динамической системе. В настоящей диссертационной работе будут

рассматриваться только конечномерные динамические системы. При этом, как правило, будет предполагаться, что $D \subset R^N$, причём множество D может быть ограниченным или неограниченным, открытым, замкнутым или компактным; часто оно будет совпадать со всем пространством R^N .

1.1.2 Непрерывные динамические системы

Одной из важнейшей характеристик ДС является способ зависимости системы от времени t , который может быть непрерывным или дискретным. А именно, состояние системы может изменяться либо в любые моменты времени $t \geq 0$, либо только в отдельные (дискретные) моменты времени $t = t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, где $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$.

Если в определении динамической системы время t непрерывно, то говорят о непрерывной динамической системе, о динамической системе с непрерывным временем или о потоке. Для непрерывной динамической системы закон эволюции позволяет по каждому начальному (в момент времени $t = 0$) состоянию x системы определить ее будущие состояния $x(t) \in D$ во все последующие моменты времени $t > 0$.

Таким образом, непрерывные динамические системы обычно описываются дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in D \subset R^N, \quad (1.1)$$

также обычно при этом предполагаются выполненными условия:

А) функция $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой в ограниченной или неограниченной области D ;

В) для каждого $x_0 \in D$ решение $x = x(t)$ задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

продолжимо на всю числовую ось $t \in (-\infty, +\infty)$.

Множество $D \subset R^N$ образует фазовое пространство [67] динамической системы. При этом по каждому начальному (в момент времени $t = 0$) состоянию $x_0 \in D$ рассматриваемой динамической системы её дальнейшие состояния $x(t)$ определяются по решению задачи Коши (1.2).

Особо отметим условие В). В общем случае решение $x = x(t)$ задачи Коши (1.2) может быть определено лишь в некоторой окрестности точки t_0 . Например, решением уравнения $x' = 1 + x^2$ с начальным условием $x(0) = 0$ является функция $x = tg(t)$, определенная лишь при $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

В теории динамических систем, однако, интерес представляют, в первую очередь, такие дифференциальные уравнения, решения которых могут быть определены, по крайней мере, для всех положительных t . Это связано, во-первых, с тем обстоятельством, что огромное число представляющих практический интерес задач приводят именно к таким уравнениям.

Во-вторых, наиболее интересные явления, наблюдаемые в динамических системах, связаны с неограниченностью возрастания времени t .

1.1.3 Компьютерное представление динамических систем

Наряду с гладкими (непрерывными) динамическими системами (1.1), при моделировании многих процессов важная роль принадлежит дискретным динамическим системам [18], которые задаются уравнениями вида

$$x_{n+1} = f(x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n), n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

где k – целое неотрицательное число, $x_n \in D \subset R^N$, $f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ – функция, определенная и гладкая в области $D^{k+1} = D \times D \dots \times D$, при этом область значений функции $f(x)$ содержится в D . Состояние системы (1.3) в момент времени $t = n$ – это вектор x_n . Для системы (1.3) фазовым пространством будет область D , (она может быть ограниченной, неограниченной или совпадающей со всем пространстве R^N).

Уравнение (1.3) удобно трактовать именно как описание динамики некоторой системы, так что состояние x_n системы изменяется в фиксированные моменты времени, например, в моменты t_0, t_1, t_2 и т.д., где $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, оставаясь неизменным в интервалах $t_n < t < t_{n+1}$. При этом продолжительность этого интервала времени не имеет принципиального значения, так же как и то, является ли она различной для разных n . Поэтому можно считать, что состояние x_n дискретной системы изменяется в целочисленные моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$.

Уравнение (1.3) выражает тот факт, что состояние x_{n+1} системы однозначно определяется с помощью предшествующих состояний $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n$. Решением или орбитой системы (1.3) [79] называют последовательность

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \quad (1.4)$$

определяемую уравнением (1.3). Решение (1.4) однозначно определяется с помощью предшествующих состояний $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_0$.

При $k = 0$ получаем важный частный случай системы (1.3).

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

состояние x_{n+1} которой однозначно определяется с помощью предшествующего состояния x_n .

Оператор эволюции $F(x_n, m)$ системы (1.5), ставящий в соответствие каждому состоянию x_n и каждому моменту времени $t = m, m \geq n$, новое значение состояния $x_m = F(x_n, m)$, представляет в виде

$$F(x_n, m) = f^{m-n}(x_n);$$

здесь $f^p(x) = f(f(\dots(f(x))\dots))$ при $p \geq 1$, и $f^0(x) = x$.

Всюду ниже, если это специально не оговаривается, понятие дискретной динамической системы будем относить к системе, описываемой уравнениями вида (1.5).

Явная формула, задающая уравнение (1.5), (позволяющая по x_0 найти x_1 , затем x_2 и т.д.), говорит о простоте модели. Поведение дискретной системы (1.5) может оказаться как относительно простым, так и очень сложным.

Теория дискретных отображений вида (1.5) имеет богатую историю. Простейшие отображения были известны еще Евклиду и Архимеду: например, арифметическая прогрессия получается из (1.5) при $f(x) = x + d$, а геометрическая - при $f(x) = qx$.

В настоящее время дискретные системы (1.5) выступают и как модели многих процессов (в технике, экономике, биологии и др.), и как удобный аппарат, позволяющий описывать на простом языке сложные явления: здесь достаточно упомянуть теорию универсальности Фейгенбаума [24]. Исследованию дискретных систем посвящено множество работ.

1.1.4 Линейные и нелинейные динамические системы

Предположим, что оператор эволюции $F(x, t)$ динамической системы при каждом t ($t \in R$ - для непрерывной системы, $t \in Z$ - для дискретной системы) является линейным оператором в R^N , т. е. удовлетворяет следующим принципам

1. $F(x_1 + x_2, t) = F(x_1, t) + F(x_2, t)$ для любых $x_1, x_2 \in R^N$;
2. $F(\alpha x, t) = \alpha F(x, t)$ для любого вещественного числа α и $\forall x \in R^N$.

Тогда говорят о линейной динамической системе. В противном случае динамическую систему называют нелинейной. Примеры линейных динамических систем будут приведены ниже. Отметим здесь следующее. Теория линейных динамических систем является важнейшей и наиболее развитой составной частью общей теории динамических систем. Во-первых, это связано с тем, что огромное множество теоретических и практических задач приводят именно к линейным динамическим системам. Такие

системы возникают в задачах физики, механики, астрономии, техники, биологии, экономики и других областях. Во-вторых, для большинства линейных систем структуру орбит [79] относительно легко исследовать, опираясь, в основном, на методы линейной алгебры [20]. Наконец, в-третьих, теория линейных динамических систем полезна в качестве первого приближения и при анализе нелинейных задач. Изучение общей теории динамических систем невозможно без овладения определённой "культурой" линейной науки, без знания её основных понятий и методов. Приведем утверждения, позволяющие дать описание класса линейных динамических систем.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы непрерывная динамическая система была линейной, необходимо и достаточно, чтобы её состояние $x = x(t)$ описывалось линейным дифференциальным уравнением*

$$x' = Ax, \quad x \in R^N.$$

Теорема 1.2. *Для того, чтобы дискретная динамическая система была линейной, необходимо и достаточно, чтобы её состояние $x = x_n$, описывалось линейным уравнением*

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_n \in R^N.$$

1.1.5 Фазовые портреты динамической системы

Рассмотрим классическую линейную систему (см. [7], [8], [72], [76])

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{1.6}$$

где a и b - заданные вещественные числа. Предположим, что характеристическое уравнение

$$\mu^2 + a\mu + b = 0 \tag{1.7}$$

имеет различные корни μ_1, μ_2 , т.е. $a^2 \neq 4b$. Тогда общее решение уравнения (1.6) имеет представление

$$y(t) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t}, \quad \text{при} \quad a^2 > 4b, \quad (1.8)$$

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \quad \text{при} \quad a^2 < 4b. \quad (1.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b}, \quad \text{при} \quad a^2 > 4b, \\ \alpha &= -\frac{a}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2}, \quad \text{при} \quad a^2 < 4b, \end{aligned}$$

а C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Если корень характеристического уравнения кратный, т.е. $a^2 = 4b$, то общее решение уравнения (1.6) представляется в виде

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 + C_2 t). \quad (1.10)$$

Из представлений (1.8), (1.9) и (1.10), имеем

$$y'(t) = C_1 \mu_1 e^{\mu_1 t} + C_2 \mu_2 e^{\mu_2 t}, \quad \text{при} \quad a^2 > 4b,$$

$$y'(t) = e^{\alpha t} [(\alpha C_1 + \beta C_2) \cos \beta t + (\alpha C_2 - \beta C_1) \sin \beta t], \quad \text{при} \quad a^2 < 4b,$$

$$y'(t) = e^{\alpha t} (\alpha C_1 + C_2 + \alpha C_2 t), \quad \text{при} \quad a^2 = 4b.$$

Для построения траекторий уравнения (1.6) на фазовой плоскости перейдем к системе

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1, \end{cases} \quad (1.11)$$

где $x_1 = y, x_2 = y'$. Для вектор-функции $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, которая является решением системы (1.11), имеем представление

$$x(t) = C_1 e^{\mu_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\mu_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \text{при} \quad a^2 > 4b, \quad (1.12)$$

$$x(t) = e^{\alpha t} \left\{ \cos \beta t \begin{pmatrix} C_1 \\ \alpha C_1 + \beta C_2 \end{pmatrix} + \sin(\beta t) \begin{pmatrix} C_2 \\ \alpha C_2 - \beta C_1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{при } a^2 < 4b, \quad (1.13)$$

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ \alpha C_1 + C_2 + \alpha C_2 t \end{pmatrix}, \quad \text{при } a^2 = 4b. \quad (1.14)$$

Постоянные C_1 и C_2 можно выразить через начальное значение $x(0)$ решения $x(t)$ при $t = 0$:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} [\mu_2 \cdot x_1(0) - x_2(0)], \\ C_2 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 \cdot x_1(0) - x_2(0)], \end{cases} \quad a^2 > 4b;$$

$$\begin{cases} C_1 = x_1(0), \\ C_2 = \frac{1}{\beta} [x_2(0) - \alpha x_1(0)], \end{cases} \quad a^2 < 4b;$$

$$\begin{cases} C_1 = x_1(0), \\ C_2 = x_2(0) - \alpha x_1(0), \end{cases} \quad a^2 = 4b.$$

Приведём анализ особенностей поведения траекторий системы (1.11) на фазовой плоскости, предполагая, что $b \neq 0$. Нижеприведенные случаи геометрически представляются на рис. 1.2 в виде секторов. В плоскости параметров системы a и b можно выделить области, занимаемые различными типами состояния равновесия типами особых точек, (см. рисунок 1.2).

Парабола $b = \frac{a^2}{4}$ отделяет колебательные движения системы от апериодических ([30], [51]) (фокусы - узлы); при $b < 0$ - седла. Центры занимают пограничную линию между устойчивыми и неустойчивыми фокусами. При изменении параметров системы качественные свойства особой точки (тип особой точки) изменяются.

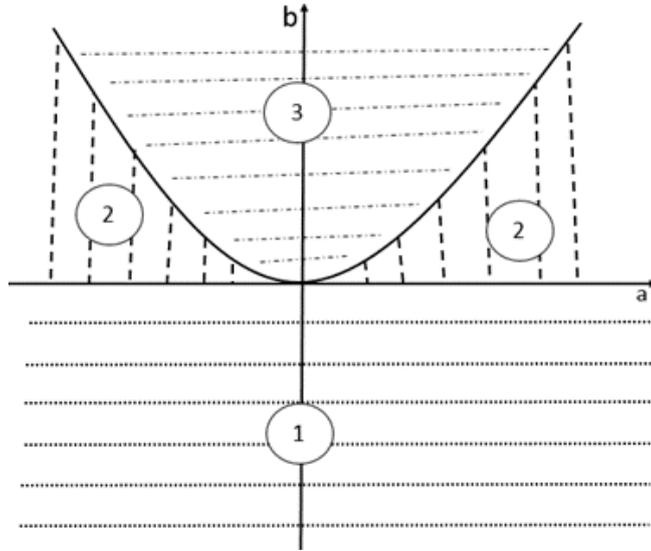


Рис. 1.2. Секторы

Из рисунка видно, как может меняться тип особой точки при изменении значения того или иного параметра системы: неустойчивый фокус => центр => устойчивый фокус => устойчивый узел.

Рассмотрим основные случаи поведения траекторий системы (1.11) в фазовом пространстве.

Случай 1. $b < 0$. В этом случае корни $\mu_{1,2}$ характеристического уравнения (1.7) вещественны и имеет разные знаки: $\mu_1 \cdot \mu_2 = b < 0$. Так как $\mu_2 < 0 < \mu_1$, то векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ принадлежат соответственно первой и четвертой четверти фазовой плоскости. Фазовыми траекториями, соответствующими частным решениям (1.12) при $C_1 = \pm 1, C_2 = 0$, являются полупрямые $x_2 = \mu_1 \cdot x_1, \pm x_1 > 0$. Эти фазовые траектории приближаются к особой точке $(0,0)$ при $t \rightarrow -\infty$. Фазовыми траекториями, соответствующими частным решениям $C_1 = 0, C_2 = \pm 1$, являются полупрямые $x_2 = \mu_2 x_1, \mp x_1 > 0$. Эти фазовые траектории приближаются к особой точке $(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$. Другие траектории системы (1.11), отличные от особой точки, пересекают одну из координатных осей Ox_1

или Ox_2 и имеют представления

$$x(t) = C \left\{ \mu_2 e^{\mu_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} - \mu_1 e^{\mu_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} C(\mu_2 - \mu_1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$x(t) = C \left\{ e^{\mu_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} - e^{\mu_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ C(\mu_2 - \mu_1) \end{pmatrix},$$

где произвольная постоянная C отлична от нуля; эти траектории неограниченно удаляются как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$.

В этом случае особая точка $(0,0)$ называется седлом (Рис. 1.3).

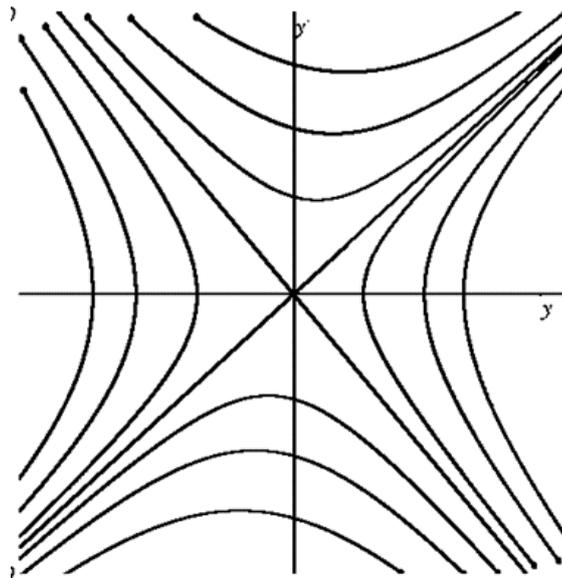


Рис. 1.3. Седло

Случай 2. Предположим, что имеет место $0 < 4b \leq a^2$. Тогда корни $\mu_{1,2}$ характеристического уравнения (1.7) вещественны и одного знака. Если $0 < 4b < a^2$ и $a > 0$, то $\mu_2 < \mu_1 < 0$, и векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ принадлежат четвертой четверти. Фазовыми траекториями, соответствующими частным решениям (1.12) при $C_1 = \pm 1, C_2 = 0$

($C_1 = 0, C_2 = \pm 1$), являются полупрямые $x_2 = \mu_1 \cdot x_1, \pm x_1 > 0$ ($x_2 = \mu_2 \cdot x_1, \pm x_1 > 0$). Эти фазовые траектории приближаются к особой точке $(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$ и неограниченно удаляются при $t \rightarrow -\infty$. Далее, из представления (1.12) следует, что, если $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ или $C_1 < 0$ и $C_2 < 0$, то соответствующие траектории расположены в секторе между полупрямыми $x_2 = \mu_2 x_1, x_2 = \mu_1 x_1, x_1 > 0$ или $x_1 < 0$, соответственно, а если $C_1 > 0$ и $C_2 < 0$ ($C_1 < 0$ и $C_2 > 0$), то траектории переходят через первую четверть (третью четверть). Все эти траектории приближаются к особой точке $(0,0)$, касаясь прямой $x_2 = \mu_1 x_1$ при $t \rightarrow +\infty$, и удаляются в бесконечность, асимптотически приближаясь к прямой $x_2 = \mu_2 x_1$ при $t \rightarrow -\infty$.

Если $a < 0$, то $0 < \mu_2 < \mu_1$, а векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ расположены в первой четверти. В этом случае поведение траектории исследуется аналогично вышеприведенному случаю. Все траектории приближаются к особой точке $(0,0)$ при $t \rightarrow -\infty$.

Если $4b = a^2$, то $0 < \mu_1 = \mu_2$, и в этом случае полупрямые $x_2 = \mu_1 x_1, x_2 = \mu_2 x_1$ совпадают с полупрямой $x_2 = \alpha x_1$, и общее решение системы (1.11) имеет представление (1.14). Рассмотрим случай, когда $a > 0$.

Если $C_2 = 0$ и $C_1 \neq 0$, то соответствующие траектории образуют полупрямую $x_2 = \alpha x_1, x_1 > 0$ при $C_1 > 0$ и полупрямую $x_2 = \alpha x_1, x_1 < 0$ при $C_1 < 0$; траектории приближаются к точке $(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$. Если $C_2 \neq 0$, то соответствующие траектории пересекают оси координат Ox_2 и Ox_1 в точках $(0, C_2)$ и $(-C_2/\alpha, 0)$ при $t_0 = -C_1/C_2$ и $t_1 = t_0 - 1/\alpha$ соответственно; траектории приближаются к особой точке $(0,0)$, касаясь полупрямой $x_2 = \alpha x_1, x_1 < 0$, если $C_2 > 0$ и полупрямой $x_2 = \alpha x_1, x_1 > 0$, если $C_2 < 0$.

В этих случаях особая точка $(0,0)$ называется узлом; устойчивым узлом, если $a > 0$ (Рис. 1.4.а) и неустойчивым узлом, если $a < 0$ (Рис. 1.4.б).



Рис. 1.4

Случай 3. Предположим, что $4b > a^2$. Тогда корни $\mu_{1,2} = \alpha \pm \pm i\beta$ характеристического уравнения (1.7) являются комплексными. Из представления (1.13) решения системы (1.11) следует, что траектория системы (1.11), выходящая из некоторого луча $x_2 = k\mu_2, x_1 > 0(x_1 < 0)$ в момент времени t_0 , совершая полный оборот вокруг начала координат в момент времени $t_1 = t_0 + 2\pi/\beta$, возвращается к этому лучу, причём точка возврата удаляется от начала координат $(0,0)$, если $\alpha > 0$, и приближается к началу координат, если $\alpha < 0$. Если же $\alpha = 0$, то все траектории системы (1.11) - периодические с периодом $2\pi/\beta$.

Особая точка $(0,0)$, если $\alpha \neq 0$ называется фокусом, устойчивым фокусом, если $\alpha < 0$ (Рис. 1.5.a) и неустойчивым фокусом, если $\alpha > 0$ (Рис.1.5.b). В случае $\alpha = 0$ особая точка $(0,0)$ называется центром (Рис.1.5.c).

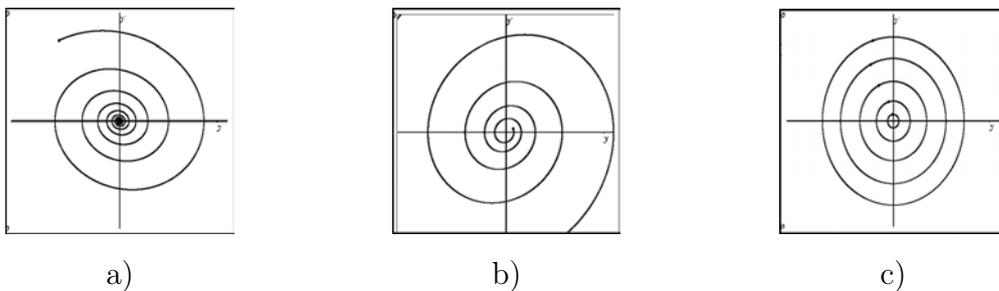


Рис. 1.5

1.2 Элементы теории устойчивости

Возникновение математической теории устойчивости движения связано с именем гениального русского математика и механика Александра Михайловича Ляпунова (1857-1918). Основы этой теории были разработаны А.М. Ляпуновым более 100 лет назад, когда им было опубликовано знаменитое сочинение "Общая задача об устойчивости движения" (1892). Однако лишь с начала 30-х годов теория устойчивости получила интенсивное развитие. Частично это объяснимо бурным развитием в эти годы науки и техники, которые ставили новые, ранее не известные задачи. К настоящему времени теория устойчивости по Ляпунову является общепринятой и применяется во многих областях естествознания. Например, в механике её используют при анализе устойчивости полета снаряда, стабилизации движения спутника, устойчивости механических систем с вращающимися массами (роторами), движения твёрдых тел с упругими элементами и полостями, содержащими жидкость, и т.д. В последнее время теорию устойчивости начали применять также при решении задач химической кинетики, экологии, экономики и др.

Математическая теория устойчивости изучает поведение решений системы дифференциальных уравнений при $t \rightarrow +\infty$. Основной вопрос: в каких случаях можно утверждать, что решение мало меняется на всем бесконечном интервале $t_0 \leq \infty$ при любых достаточно малых изменениях начальных условий и функций, входящих в уравнения рассматриваемой системы. Теория устойчивости имеет большое значение в технике, так как в реальных задачах исходные данные, а часто и уравнения движения, (например, из-за неучитываемых помех), известны лишь приближённо. Для создания машины, способной выполнить определённую работу, не всегда достаточно качественных физических соображений, во многих случаях нужен математический анализ.

Первым важным техническим вопросом, решённым с помощью теории устойчивости, был вопрос об условиях работы регулятора Уатта. В изобретенной Уаттом паровой машине имеется механизм - центробежный регулятор, который должен поддерживать постоянную скорость работы машины. Но когда стали строить большие паровые машины, регулятор Уатта часто не справлялся с работой. Русский инженер Вышнеградский, чтобы найти причины плохой работы регулятора, составил систему дифференциальных уравнений, описывающую работу паровой машины вместе с регулятором, и исследовал эту систему на устойчивость (см. [7], §27). Он получил условия устойчивости в виде ограничений на конструктивные параметры регулятора. Регуляторы, изготовленные с учётом этих ограничений, работали хорошо.

В настоящее время в связи с автоматизацией производства всё шире применяются системы автоматического управления, которые должны обеспечить работу управляемого объекта в заданном режиме. Математическое исследование устойчивости таких систем ещё на стадии их проектирования ускоряет и удешевляет создание таких систем, позволяя заранее отбросить многие негодные варианты.

Важная роль в создании и развитии теории устойчивости принадлежит советским и российским ученым, начиная с основоположника этой теории А. М. Ляпунова.

Изучению данной теории посвящена обширная литература [2], [10], [11] [16], [17], [19], [28], [29], [33], [34], [36], [39], [46], [48], [52], [54], [55], [58], [60], [62], [63], [65], [66], [69], [72], [76], [77], [78], [88].

1.2.1 Основные понятия и определения устойчивости

Рассмотрим следующую систему ([10], [29], [72]) в векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n \quad (1.15)$$

и её частное решение $x = \varphi(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$). Обозначим через $|x|$ норму элемента $x \in R^n$. Вектор-функция $f(t, x)$ и все $\partial f_i / \partial x_j$ определены и непрерывны при $|x - \varphi(t)| < \rho$, ($t_0 \leq t < \infty$).

Решение $x = \varphi(t)$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ называется устойчивым (или устойчивым по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для каждого такого \tilde{x}_0 , что $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, решение $\tilde{x}(t)$ с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ при ($t_0 \leq t < \infty$) существует и

$$|\tilde{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad (t_0 \leq t < \infty) \quad (1.16)$$

Это означает, что каждое решение с начальным условием из δ -окрестности точки $x_0 \in R^n$ существует при ($t_0 \leq t < \infty$) и не выходит из ε -трубки, ось которой - решение $x = \varphi(t)$ (1.16).

Решение $x = \varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если

- 1) оно устойчиво по Ляпунову,
- 2) все решения $\tilde{x}(t)$ с начальными условиями $\tilde{x}(t_0)$ из некоторой δ_0 -окрестности точки x_0 неограниченно сближаются с решением $x = \varphi(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, то есть $|\tilde{x}(t) - \varphi(t)| \rightarrow 0$, ($t \rightarrow +\infty$). Требования 1) и 2) независимы. Из 1) не следует 2), так как из неравенства (1.16) не следует, что $|\tilde{x}(t) - \varphi(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а из 2) не следует 1).

Исследование устойчивости любого решения $x = \varphi(t)$ системы (1.15) можно привести к исследованию устойчивости нулевого решения другой системы. Для этого в (1.15) делается замена искомой функции $x = \varphi(t) + y$.

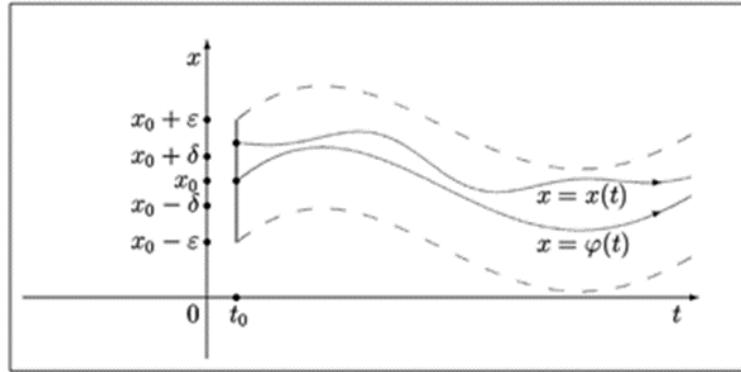


Рис. 1.6. Устойчиво по Ляпунову

Получается система $\varphi'(t) + y'(t) = f(t, \varphi(t) + y)$. Так как $x = \varphi(t)$ - решение системы (1.15), то $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, и мы имеем

$$y' = f(t, \varphi(t) + y) - f(t, \varphi(t)). \quad (1.17)$$

Решение $x = \varphi(t)$ системы (1.15) при такой замене переходит в решение $y \equiv 0$ системы (1.17). Устойчивость (или неустойчивость) решения при этом сохраняется, так как разность $\tilde{x}(t) - \varphi(t)$ переходит в равную ей разность $\tilde{y}(t) - 0$, где обозначено $\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) - \varphi(t)$.

Устойчивость нулевого решения системы (1.17) означает, что из $|\tilde{y}(t_0)| < \delta$ следует $|\tilde{y}(t)| < \varepsilon$ при $(t_0 \leq t < \infty)$.

Исследовать устойчивость, пользуясь лишь определениями, можно только тогда, когда удастся найти в том или ином виде общее решение данной системы или когда удаётся выяснить такие свойства решений, как ограниченность, возрастание и убывание.

1.2.2 Основные утверждений по теории устойчивости

Пусть в системе $dx/dt = Ax$ матрица A имеет собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Теорема 1.3. [73]

1) Если все $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

2) Если все $\operatorname{Re}\lambda_j \leq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, и для тех λ_j , у которых $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, все жордановы клетки размера 1, то нулевое решение устойчиво.

3) Если имеется λ_j , у которого $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, или у которого $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, и жорданова клетка имеет размера ≥ 2 , то нулевое решение неустойчиво.

Кроме понятий устойчивости и асимптотической устойчивости, о которых говорилось выше, для приложений важно понятие устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Такая устойчивость означает, что при $(t_0 \leq t < \infty)$ решение мало меняется не только из-за малых изменений начальных условий, но и из-за любых достаточно малых внешних воздействий, например, помех, действующих всё время. Решение $x = \varphi(t)$ системы (1.15) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $\eta > 0$, что при любых \tilde{x}_0 и $h(t, x) \in C$ таких, что $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|h(t, x)| < \eta$ при $t > t_0$, $|x| < \varepsilon$, каждое решение $\tilde{x}(t)$ задачи

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f(t, \tilde{x}) + h(t, \tilde{x}), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$$

при $(t_0 \leq t < \infty)$ существует и удовлетворяет неравенству (1.16). Условия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость, часто обеспечивают и устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Таким является, в частности, условие 1 теоремы 1.3.

Теперь исследуем устойчивость с помощью функций Ляпунова.

Производной функции $v(t, x)$ в силу системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (f(t, x) \in R^n \text{ при любом } t \text{ и любом } x \in R^n) \quad (1.18)$$

называется функция

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{(1.18)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot f_1 + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \cdot f_n, \quad (1.19)$$

где v и f_1, f_2, \dots, f_n зависят от t, x_1, x_2, \dots, x_n . Формула (1.19) позволяет найти производную сложной функции

$$v(t, x(t)) \equiv v(t, x_1(t)), \dots, v(t, x_n(t)),$$

где $x(t)$ - любое решение системы (1.18), не зная решений системы. По теореме о производной сложной функции

$$\frac{d}{dt}v(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}. \quad (1.20)$$

Так как $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ - решение системы (1.18), то $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$, и сумма в (1.20) равна (1.19).

Теорема 1.4. [73] (теорема Ляпунова об устойчивости).

Пусть $x(t) \equiv 0$ - решение системы (1.18), и пусть при $|x| \leq \rho$, ($\rho > 0$) существует функция $v(x) \in C^1$, удовлетворяющая условиям $v(0) = 0$, $v(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(1.18)} \leq 0$. Тогда нулевое решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво.

Теорема 1.5. [73] (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости).

Пусть выполнены условия теоремы 2 с заменой последнего неравенства на $\frac{dv}{dt} \leq -\omega(x) < 0$ при $0 < |x| \leq \rho$; функция $\omega(x)$ непрерывна при $|x| \leq \rho$. Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво.

Замечание 1.1. При выполнении условий этой теоремы нулевое решение будет также устойчивым при постоянно действующих возмущениях.

А.М. Ляпунов доказал более общие теоремы - с функцией $v(t, x)$ вместо $v(x)$, удовлетворяющей некоторым другим ограничениям. Функция $v(x)$ или $v(t, x)$, применяемая при доказательстве устойчивости, называется функцией Ляпунова. Для конкретных систем дифференциальных уравнений её подбирать нелегко. Для несложных систем иногда можно

брать функцию $v(x)$ равной квадрату расстояния точки x от положения равновесия.

Теорема 1.6. [73] (Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский).

Пусть в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$f \in C^1, f(0) = 0$, и пусть при $|x| \leq \rho$, ($\rho > 0$) существует такая функция $v(x) \in C^1$, что $v(0) = 0, v(x) > 0 (x \neq 0), dv/dt \leq 0$, а множество N тех значений x , при которых $dv/dt = 0$, не содержит целых траекторий, кроме $x = 0$. Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво.

Теорема 1.7. [73] (теорема Четаева об неустойчивости).

Пусть $x(t) \equiv 0$ - решение системы (1.18). Пусть область D пространства x лежит в шаре $S(|x| < \varepsilon)$, а её граница $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, 0 \in \Gamma_0, |x| < \varepsilon$ на $\Gamma_0, |x| = \varepsilon$ на Γ_1 , множество Γ_1 может быть пустым. Пусть в $D \cup \Gamma$ существует непрерывная функция $v(x), v(x) = 0$ на Γ_0 , а в D имеем $v \in C^1, v(x) > 0, dx/dt \geq \omega(x) > 0, \omega$ непрерывна в $D \cap \Gamma$. Тогда нулевое решение системы (1.18) неустойчиво.

Вследствие трудностей при подборе функции Ляпунова возникает вопрос о её существовании - вопрос, когда можно пытаться подбирать функцию $v(x)$ или $v(t, x)$, удовлетворяющую условиям теорем 1.4 и 1.5 (или подобных теорем), а когда нет. Массера доказал, что для систем вида $x' = f(x), x \in R^n$, в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия всегда существует функция Ляпунова $v(x)$, а для систем $x' = f(t, x)$ с периодической по t функцией f - периодическая функция Ляпунова $v(t, x)$. Для устойчивого положения равновесия системы $x' = f(t, x)$ существует функция Ляпунова $v(t, x)$, а функция $v(x)$ может не существовать даже для системы $x' = f(x)$.

Однако не существует общих методов построения функции Ляпунова в случаях, когда решения системы неизвестны. Для нужд приложений разрабатывались методы построения функций Ляпунова для отдельных классов систем.

Следует отметить, что в теореме 1.3 были получены условия асимптотической устойчивости и условия неустойчивости для линейной системы с постоянными коэффициентами $x' = Ax$. Следующая теорема 1.8 утверждает, что в случае $\max \operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ эти условия пригодны и для нелинейной системы $x' = Ax + \varphi(t, x)$, где A - постоянная матрица, $|\varphi(t, x)| \leq \varphi^*(x) = o(|x|)$ при $x \rightarrow 0$.

Многие системы приводятся к такому виде. Пусть $x = x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ - положение равновесия системы $x' = f(x)$, ($x \in R^n$), то есть $f(x_0) = 0$. Разлагая $f(x)$ вблизи точки $x = x_0$ по формуле Тейлора до членов первого порядка малости, получаем систему

$$x'_i = a_{i1}(x_1 - x_{10}) + \dots + a_{in}(x_n - x_{n0}) + \varphi_i(x), i = 1, \dots, n,$$

где $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$, $\varphi_i(x) = o(|x - x_0|)$ при $x \rightarrow x_0$. Переносим начало координат в точку x_0 заменой $x = x_0 + y$, получаем (в векторной записи)

$$y' = Ay + \varphi_0(y), \quad \varphi_0(y) = o(|y|), y \rightarrow 0,$$

матрица $A = (a_{ij})$. В более общем случае, когда матрица A зависит от t , теорема 1.7 не применима.

Теорема 1.8. [73] (об устойчивости по первому приближению)

Рассмотрим систему

$$x' = Ax + \varphi(t, x), \quad x \in R^n.$$

Пусть при $t \geq t_0$, $|x| < \rho_0$ функция $\varphi \in C^1$, $|\varphi(t, x)| \leq \gamma(x)|x|$, $\gamma(x) \rightarrow 0$, ($x \rightarrow 0$).

1) *Если матрица A имеет все $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*

2) Если матрица A имеет хотя бы одно λ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то нулевое решение неустойчиво.

3) В "критическом" случае, то есть когда $\max \operatorname{Re}\lambda_j = 0$, наличие устойчивости или неустойчивости зависит не только от матрицы A , но и от функции $\varphi(t, x)$.

1.3 Предельные циклы в динамических системах

Понятие предельных циклов ввёл Анри Пуанкаре [64], создавая качественную теорию дифференциальных уравнений. Он занимался задачей n тел, не решённой до сих пор. Уже тогда, в конце XIX века, становилось понятно, что обычно найти решение дифференциального уравнения в явном виде нельзя. Основная идея А. Пуанкаре состояла в том, чтобы исследовать свойства решений, не находя их. Прежде всего его интересовала асимптотика решений, т.е. их поведение на больших отрезках времени.

На сегодняшний день предельные циклы нашли широкое применение во многих областях естествознания: радиофизике, теории колебаний, математической биологии (фотосинтез, гликолиз), химии (периодические процессы в реакциях), авиации (мертвая петля самолета, волнообразный полет самолета), автоматическом регулировании, математической экономике, астрономии (цефеиды), теории конструирования точных приборов, медицине (психические заболевания) и др.

Определение 1.1. *Замкнутая траектория C на фазовом портрете динамической системы называется предельным циклом, если она изолирована от всех остальных замкнутых траекторий, то есть, если существует трубчатая окрестность траектории C , не содержащая других замкнутых траекторий.*

Замкнутые траектории автономных систем на плоскости чаще всего бывают двух типов.

- Имеется бесконечное множество замкнутых траекторий, вложенных друг в друга и заполняющих некоторую область. Пример: траектории вблизи особой точки типа центр.
- Отдельные замкнутые траектории, к которым все близкие траектории неограниченно приближаются, (необязательно монотонно), при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$. Такие замкнутые траектории называются предельными циклами.

Предельный цикл называется устойчивым, если существует такая область на фазовой плоскости, содержащая этот предельный цикл - окрестность ε - окрестность, $\varepsilon > 0$, что все фазовые траектории, начинающиеся в окрестности ε , асимптотически при $t \rightarrow \infty$ приближаются к предельному циклу (Рис. 1.7 а).

Если же, наоборот, в любой сколь угодно малой окрестности ε ($\varepsilon > 0$) предельного цикла существует по крайней мере одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при $t \rightarrow \infty$, то такой предельный цикл называется неустойчивым (Рис. 1.7 б)). Такие циклы разделяют области влияния (бассейны) разных притягивающих множеств.

Предельный цикл называется полуустойчивым, когда с одной стороны от цикла траектории приближаются при $t \rightarrow +\infty$, а с другой - при $t \rightarrow -\infty$ (Рис. 1.7 в)).

Следует отметить, что в нелинейных и кусочно-линейных системах может наблюдаться периодическое движение с постоянным периодом, не зависящим от выбора начальных условий. Причиной данного явления является наличие в системе предельного цикла. Детальное обсуждение этих понятий приведено , например, в [5], [10], [17], [53], [64], [73], [87], [88].

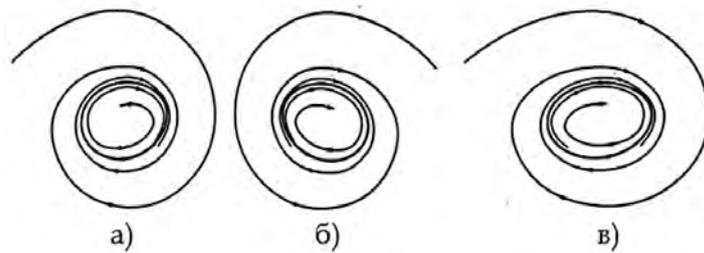


Рис. 1.7. Устойчивые (а), неустойчивые (б), полуустойчивые (в) предельные циклы на фазовой плоскости.

1.4 Постановка и примеры бифуркационных явлений

1.4.1 Элементы теории бифуркаций.

Функционирование различных природных и технических систем зависит от внутренних или внешних параметров. При математическом моделировании таких задач важно проследить поведение системы при различных значениях параметров. Здесь возможны два принципиально разных случая. Первым является случай, когда малые изменения параметров не влекут кардинальных изменений поведения системы. Особый интерес вызывает второй случай, когда при малом изменении параметров поведение системы существенно меняется: возникают или исчезают особые точки, периодические или ограниченные решения, изменяется характер их устойчивости и т.п.

Пример 1.1. Рассмотрим два дифференциальных уравнения

$$x' = \lambda - x, \quad x' = \lambda + x^2,$$

зависящих от вещественного параметра λ . Первое из этих уравнений при каждом λ имеет точку равновесия $x = \lambda$, к которой при возрастании времени t стремятся остальные решения. Поэтому малые изменения параметра λ не вызывают существенных изменений поведения системы.

Второе из уравнений при $\lambda > 0$ не имеет точек равновесия, при $\lambda = 0$ имеет одну точку равновесия $x = 0$, являющуюся неустойчивой, а при $\lambda < 0$ – две точки равновесия $x = \sqrt{-\lambda}$ и $x = -\sqrt{-\lambda}$, первая из которых неустойчива, а вторая – устойчива. Поэтому при переходе параметра λ через значение $\lambda = 0$ происходит качественная перестройка фазового портрета второго из уравнений.

Появление качественно неэквивалентных фазовых портретов системы при изменении параметров называют бифуркацией, а соответствующие критические значения параметров – точками бифуркации.

Пример 1.2. Рассмотрим линейную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(\lambda)x, \quad x \in R^2, \quad (1.21)$$

в которой

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = 0$ матрица $A(\lambda)$ имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i$. Проследим поведение решений этой системы при изменении параметра. При всех значениях λ эта система имеет состояние равновесия $x_1 = x_2 = 0$. При $\lambda < 0$ оно представляет собой устойчивый фокус. При $\lambda = 0$ поведение системы изменяется. У неё изменяется семейство периодических решений, которые на фазовом портрете представляют собой окружности с центром в нуле. Нулевая особая точка становится центром. При $\lambda > 0$ у системы вновь появляется фокус $x_1 = x_2 = 0$, но уже неустойчивый. Если изобразить поведение системы в пространстве (x_1, x_2, λ) , то семейство циклов образует плоскость $\lambda = 0$.

Теперь добавим к системе (1.21) нелинейные слагаемые и проследим, как они влияют на поведение системы при изменении параметра. А именно,

рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = x_1 + \lambda x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (1.22)$$

В полярных координатах (p, φ) ($x_1 = p \cos \varphi$, $x_2 = p \sin \varphi$) она примет вид:

$$\begin{cases} p' = p(\lambda - p^2), \\ \varphi' = 1. \end{cases} \quad (1.23)$$

Будем изучать поведение системы (1.23) при возрастании параметра λ . Первое уравнение имеет состояние равновесия $p = 0$ при всех значениях λ . При $\lambda \leq 0$ оно состояние равновесия устойчиво. При $\lambda > 0$ оно становится неустойчивым. Но появляется новое устойчивое состояние равновесия $p = \sqrt{\lambda}$. Второе уравнение системы (1.23) описывает вращение с постоянной скоростью. Поэтому особая точка $p = 0$ является устойчивым фокусом при $\lambda \leq 0$ и неустойчивым фокусом при $\lambda > 0$. Состоянию равновесия $p = \sqrt{\lambda}$, возникающему при $\lambda > 0$, соответствует периодическое решение периода 2π и амплитуды $\sqrt{\lambda}$ системы (1.22). На фазовом портрете системы этому решению будет соответствовать окружность с центром в нуле и радиусом $\sqrt{\lambda}$. При этом все остальные решения, начинающиеся внутри и вне этой окружности, (за исключением точки $p = 0$), с течением времени приближаются к этой окружности, "наматываясь" на нее. Такое периодическое решение называют устойчивым предельным циклом. Таким образом, при переходе параметра через значение $\lambda = 0$ меняется фазовый портрет системы (1.22): устойчивый фокус в нуле становится неустойчивым, и появляется устойчивый предельный цикл.

У нелинейной системы (1.22), как и у линейной (1.21), при переходе параметра λ через 0 появилось семейство циклов. В отличие от линейной системы (1.21), у которой это семейство возникает при $\lambda = 0$, у системы (1.22) семейство циклов таково, что при каждом значении параметра $\lambda > 0$ существует только одно ненулевое периодическое решение.

Если изобразить поведение системы (1.22) в пространстве (x_1, x_2, λ) , то семейство предельных циклов образует параболоид. Плоскость циклов $\lambda = 0$ линейной системы при добавлении нелинейных слагаемых "искривилась", превратившись в параболоид, касающийся этой плоскости в точке $x_1 = x_2 = \lambda = 0$.

Число $\lambda = 0$ в этом примере является точкой бифуркации рождения цикла. В литературе явление рождения предельного цикла при переходе параметра λ через нуль называют также бифуркацией Пуанкаре – Андронова – Хопфа, бифуркацией Андронова – Хопфа или бифуркацией Хопфа.

Изучению данной теории посвящена обширная литература [4], [12], [22], [25], [26], [37], [38], [40] - [44], [47], [50], [57]-[59], [69], [74], [79] - [82], [85], [86], [90], [92].

1.4.2 Бифуркация периодических решений Андронова–Хопфа

Рассмотрим теперь автономную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x; \lambda), \quad x \in R^N, \quad N \geq 2, \quad (1.24)$$

зависящую от вещественного параметра λ . Пусть $F(x; \lambda)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных $x \in R^N$ и $\lambda \in [\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1]$, (здесь λ_0 – некоторое число), и $F(0; \lambda) \equiv 0$, т.е. система (1.24) при всех значениях λ имеет нулевое решение $x = 0$. Предполагается, что каждое начальное условие $x(0) = x_0$ определяет единственное решение $x(t)$ системы (1.24), существующее при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Определение 1.2. Число λ_0 называют точкой бифуркации Андронова – Хопфа для системы (1.24), если найдётся последовательность λ_n такая, что при каждом $\lambda = \lambda_n$ система (1.24) имеет ненулевое периодическое решение $x = x_n(t)$ некоторого периода T_n , при этом $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ и $|x_n(t)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В этом случае функции $x_n(t)$ будем называть бифурцирующими решениями системы (1.24).

Пусть вектор – функция $F(x, \lambda)$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ имеет непрерывные частные производные по компонентам вектора x , при этом $F(0, \lambda) \equiv 0$. Тогда она представима в виде

$$F(x, \lambda) = A(\lambda)x + a(x, \lambda),$$

где $A(\lambda) = F'_x(0, \lambda)$ – матрица Якоби для вектор – функции $F(x, \lambda)$, вычисленная в точке $x = 0$, нелинейность $a(x; \lambda)$ удовлетворяет условию $\|a(x; \lambda)\| = o(\|x\|)$ при $x \rightarrow 0$. Другими словами, рассмотрим систему (1.24) в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(\lambda)x + a(x; \lambda), \quad x \in R^N, \quad N \geq 2; \quad (1.25)$$

при этом $A(\lambda)$ и вектор – функция $a(x; \lambda)$ непрерывны по совокупности переменных, и выполнено соотношение

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \max_{|\lambda - \lambda_0| \leq 1} \frac{\|a(x; \lambda)\|}{\|x\|} = 0.$$

В этом случае, оказывается, наличие или отсутствие точек бифуркации, как правило, определяется только свойствами матрицы $A(\lambda)$.

Сначала А.А. Андроном для двумерного случая, а затем Хопфом и другими авторами для систем размерности $N \geq 2$ были доказаны теоремы о признаках бифуркации Андронова – Хопфа.

Теорема 1.9. (Хопф). Пусть для системы (1.24) выполнены следующие предположения:

- 1) при всех λ из открытого интервала, содержащего 0, справедливо равенство $F(0; \lambda) = 0$, и $x = 0$ – изолированное состояние равновесия системы (1.24);
- 2) вектор – функция $F(x; \lambda)$ аналитична по x и λ в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ в $R^N \times R^1$;
- 3) матрица $A(\lambda) = F'_x(0; \lambda)$ имеет пару комплексно – сопряжённых собственных значений $\tau(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$, таких что

$$\omega(0) = \omega_0 > 0, \quad \tau(0) = 0, \quad \tau'(0) \neq 0;$$

4) остальные $N - 2$ собственные значения $A(0)$ имеют строго отрицательные вещественные части.

Тогда система (1.24) имеет семейство периодических решений. Точнее, существуют некоторое $\varepsilon_H > 0$ и аналитическая функция

$$\lambda_H(\varepsilon) = \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i \lambda \varepsilon^i, \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_H).$$

такие, что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_H)$ система (1.24) при $\lambda_i = \lambda_H(\varepsilon)$ имеет периодическое решение $x_\varepsilon(t)$. Период $T_H(\varepsilon)$ решения $x_\varepsilon(t)$ есть аналитическая функция

$$T_H(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[1 + \sum_{i=2}^{\infty} T_i \varepsilon^i \right], \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_H).$$

Для каждого $L > \frac{2\pi}{\omega_0}$ существуют такие два положительных числа a и b , что для $|\lambda| < b$ не существует периодических решений, кроме стационарного решения, и решений семейства $x_\varepsilon(t)$, периоды которых меньше L и которое целиком лежит в окрестности $\|x\| < a$.

Теорема 1.10. Пусть числа $\pm k\omega_0 i$, $k = 0, 1, 2, \dots$, не являются собственными значениями матрицы $A(\lambda_0)$, и функция $\tau(\lambda)$ принимает значения обоих знаков в любой окрестности λ_0 .

Тогда λ_0 является точкой бифуркации Хопфа для системы (1.25).

В условиях этой теоремы число λ_0 будет точкой бифуркации для системы (1.25), однако детализировать тип бифуркации, асимптотическое поведение решений, устойчивость решений и т.п. невозможно. Можно лишь утверждать, что число бифурцирующих решений, отвечающих различным λ , континуально.

Глава 2

Анализ устойчивости решений кусочно-линейных динамических систем

В этой главе рассматривается специальный класс уравнений с модульными и кусочно-линейными нелинейностями [23], [30], [31], [51], [53], [61], [70], [73] - [75], [81], [84], [87], [89], [93] - [106]: динамические системы, правые части которых не являются гладкими в окрестности состояния равновесия.

2.1 Анализ особой точки квазилинейного уравнения второго порядка

Негладкие эффекты имеют важное значение в различных разделах физики, механики, биологии, экономики и т.д. Функционирование системы с негладкими элементами, как правило, зависит от одного или нескольких параметров. Изменение каких-либо параметров может влиять на структуру решений в целом, или переводит систему из одного состояния в другое. В процессе моделирования большинства физических и механических объектов изменения реальной ситуации сопровождаются включением (выключением) отдельных элементов или

переключением участков нелинейных, кусочно-линейных характеристик. Например, характеристика диода даже в простейшей идеализации имеет два участка: участок нулевого тока (запертый диод), и участок, на котором ток пропорционален напряжению. Фазовые траектории таких систем сшиваются из отдельных гладких участков.

Функционирование динамических объектов обычно описываются дифференциальными уравнениями. Систему дифференциальных уравнений назовём кусочно-линейной, если в некоторых областях фазового пространства переменных она описывается различными системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [36]. Однако, решение дифференциальных уравнений не всегда удаётся найти в квадратурах. Следовательно, задачи численного исследования устойчивости состояний равновесий в негладких динамических системах, как правило, достаточно сложны, и поэтому при их исследовании эффективным представляется применение стандартных пакетов либо параллельное построение собственной программы. Таким образом, актуальными являются разработка программы и компьютерное моделирование поведения решений в окрестностях особых точек, предельных циклов, (если они имеются), негладких (модельных и кусочно-линейных) динамических систем.

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка вида:

$$y'' + ay' + by + c|y| = 0, \quad (2.1)$$

где a, b, c -любые вещественные числа. Уравнение (2.1) "склеивается" из двух линейных уравнений

$$y'' + ay' + (b + c)y = 0, \quad \text{если } y > 0 \quad (2.2)$$

и

$$y'' + ay' + (b - c)y = 0, \quad \text{если } y \leq 0. \quad (2.3)$$

В свою очередь уравнение (2.1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -ax_2 - bx_1 - c|x_1|, \end{cases} \quad (2.4)$$

а уравнения (2.2) и (2.3) эквивалентны соответственно системам

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -ax_2 - (b+c)x_1, \quad x_1 \geq 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -ax_2 - (b-c)x_1, \quad x_1 < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Подробно остановимся на изучении поведения траектории кусочно-линейной системы (2.4). Обозначим через μ_1^\pm и μ_2^\pm корни характеристического уравнения

$$\mu^2 + a\mu + (b \pm c) = 0, \quad (2.7)$$

соответствующего уравнениям (2.2) и (2.3):

$$\mu_1^\pm = -\frac{1}{2} \left\{ a - \sqrt{a^2 - 4(b \pm c)} \right\}, \quad \mu_2^\pm = -\frac{1}{2} \left\{ a + \sqrt{a^2 - 4(b \pm c)} \right\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $(b \pm c) \neq 0$. Рассмотрим все возможные случаи поведения траекторий системы (2.4) на фазовой плоскости.

Случай 1. $(b \pm c) < 0$. Эти условия в терминах корней характеристических уравнений (2.7) означают, что числа $\mu_{1,2}^\pm$ вещественны и $\mu_1^+ \mu_2^+ < 0$, $\mu_1^- \mu_2^- < 0$. Из описания линейного случая следует, что траектории, (кроме идущих по полупрямым $x_2 = \mu_2^+ x_1$, $x_2 = \mu_1^+ x_1$, $x_1 > 0$ и $x_2 = \mu_2^- x_1$, $x_2 = \mu_1^- x_1$, $x_1 < 0$), подобны гиперболам и расположены в секторах, образованных лучами

$$x_2 = \mu_2^+ x_1 \quad \text{и} \quad x_2 = \mu_1^+ x_1 \quad \text{при} \quad x_1 > 0;$$

$$x_2 = \mu_1^- x_1 \quad \text{и} \quad x_2 = \mu_2^- x_1 \quad \text{при} \quad x_1 < 0;$$

$$x_2 = \mu_2^- x_1 \quad \text{и} \quad x_2 = \mu_1^- x_1 \quad \text{при} \quad x_1 < 0;$$

$$x_2 = \mu_1^+ x_1 \quad \text{и} \quad x_2 = \mu_2^+ x_1 \quad \text{при} \quad x_1 > 0.$$

В этом случае особую точку кусочно-линейной системы (2.4) назовём *седлом*. Схематически фазовый портрет траекторий системы (2.4) показан на рис. 2.1

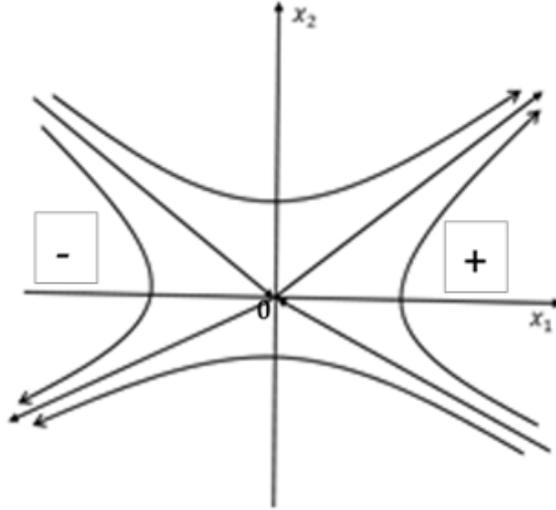


Рис. 2.1. Седло

Случай 2. $\min\{(b+c), (b-c)\} < 0 < \max\{(b+c), (b-c)\} \leq \frac{a^2}{4}$. Пусть для определённости $\min\{(b+c), (b-c)\} = b-c$, $\max\{(b+c), (b-c)\} = b+c$. Тогда $(b-c) < 0 < (b+c) \leq \frac{a^2}{4}$. Дополнительно, если $(b+c) < \frac{a^2}{4}$ и $a > 0$, то это означает, что корни характеристических уравнений (2.7) вещественны и удовлетворяют условиям

$$\mu_2^- < 0 < \mu_1^-, \quad \mu_2^+ < \mu_1^+ < 0.$$

Траектории системы (2.4) при $t \rightarrow +\infty$ вдоль полупрямых $x_2 = \mu_2^- x_1$, $x_1 < 0$, $x_2 = \mu_2^+ x_1$, $x_1 > 0$ приближаются к особой точке $(0,0)$, а вдоль полупрямой $x_2 = \mu_1^- x_1$, $x_1 < 0$ удаляются от точки $(0,0)$. Все траектории исходящие из точек сектора, образованного полупрямыми $x_2 = \mu_2^+ x_1$, $x_2 = \mu_1^+ x_1$, $x_1 > 0$ остаются в этом

секторе и определяются решением линейной системы (2.5). Аналогично, все траектории, исходящие из точек сектора, образованного полупрямыми $x_2 = \mu_2^- x_1$, $x_2 = \mu_1^- x_1$, $x_1 < 0$, остаются в этом секторе и определяются решением линейной системы (2.6).

Остальные, отличные от нуля, траектории проходят через точки $(0, x_{20})$, $x_{20} \neq 0$, при $t = 0$ и определяются решением системы (2.5) при $x_{20} \cdot t < 0$ и решением системы (2.6) при $x_{20} \cdot t > 0$:

$$x(t) = \frac{x_{20}}{\mu_1^- - \mu_2^-} \left[\exp(\mu_1^- t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1^- \end{pmatrix} - \exp(\mu_2^- t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2^- \end{pmatrix} \right] \quad \text{при } x_{20}t \leq 0;$$

$$x(t) = \frac{x_{20}}{\mu_1^+ - \mu_2^+} \left[\exp(\mu_1^+ t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1^+ \end{pmatrix} - \exp(\mu_2^+ t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2^+ \end{pmatrix} \right] \quad \text{при } x_{20}t \geq 0.$$

Если $4b = a^2$, то $0 < \mu_1 = \mu_2$, и полупрямые $x_2 = \mu_1 x_1$, $x_2 = \mu_2 x_1$ совпадают. В этом случае все траектории, не совпадающие с полупрямой $x_2 = ax_1/2$, $x_1 > 0$, проходящие через точки полуплоскости $x_1 > 0$, пересекают координатную ось Ox_1 в некоторой точке $(0, x_{20})$, $x_{20} \neq 0$ и определяются решением системы (2.5) при $x_{20} \cdot t < 0$ и решением системы (2.6) при $x_{20} \cdot t > 0$:

$$x(t) = \frac{x_{20}}{\mu_1^- - \mu_2^-} \left[\exp(\mu_1^- t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1^- \end{pmatrix} - \exp(\mu_2^- t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2^- \end{pmatrix} \right] \quad \text{при } x_{20}t \leq 0;$$

$$x(t) = x_{20} \exp \alpha t \begin{pmatrix} t \\ 1 + \alpha t \end{pmatrix} \quad \text{при } x_{20}t \geq 0.$$

Аналогично рассматриваются случаи $a < 0$, а также случаи, когда $\min\{(b+c), (b-c)\} = b+c$, $\max\{(b+c), (b-c)\} = b-c$ и $a > 0$ или $a < 0$.

В этом случае особую точку $(0, 0)$ кусочно-линейной системы (2.4) назовём *седло-узлом*. Такая сложная особая точка в линейной системе не возникает.

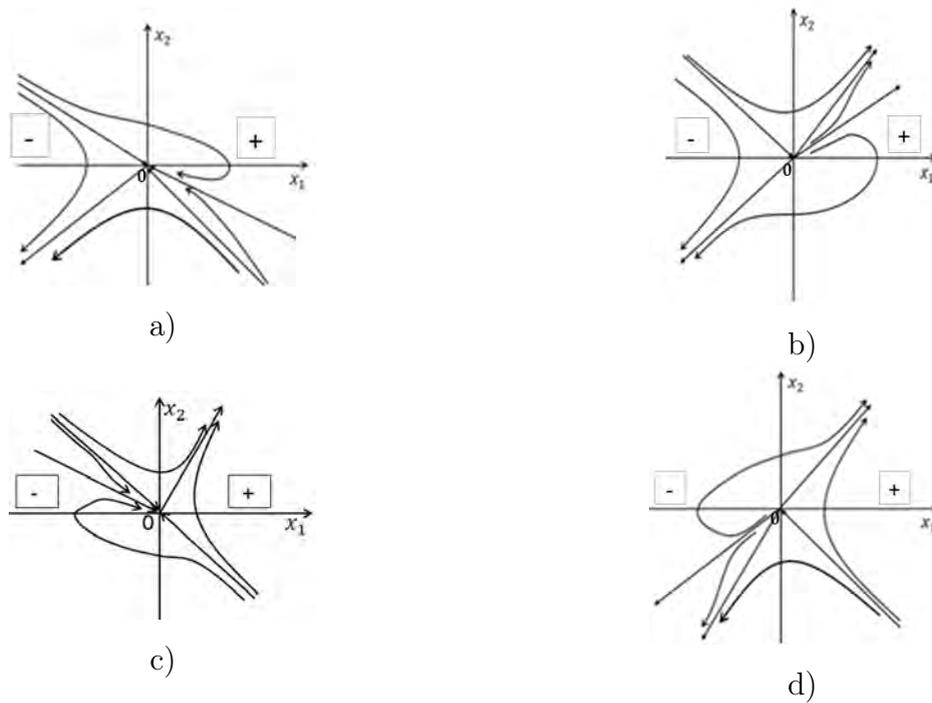


Рис. 2.2. Седло-узел

Схематически фазовый портрет траекторий системы (2.4) показан на рис. 2.2.

Случай 3. $b - c < 0 < \frac{a^2}{4} < b + c$ или $b + c < 0 < \frac{a^2}{4} < b - c$. В первом случае корни $\mu_{1,2}^-$ вещественны, разного знака, а корни $\mu_{1,2}^+ = \alpha + i\beta$ — комплексны, а во втором случае — наоборот: $\mu_{1,2}^- = \alpha + i\beta$ — комплексные, $\mu_{1,2}^+$ вещественны, разного знака.

В этом случае индекс особой точки равен нулю, (индекс Пуанкаре). Поэтому особая точка неустойчивая, и она может исчезнуть при малых возмущениях.

Схематически фазовый портрет траекторий системы (2.4) показан на рис. 2.3.



Рис. 2.3. Седло-фокус

Случай 4. $0 < b + c \leq \frac{a^2}{4}$, $0 < b - c \leq \frac{a^2}{4}$. В терминах корней характеристических уравнений (2.7) эти условия эквивалентны тому, что все корни μ_1^+, μ_2^+ вещественны и одного знака, противоположного знаку коэффициента a . Все полупрямые $x_2 = \mu_2^+ x_1$, $x_2 = \mu_1^+ x_1$ $x_1 > 0$, $x_2 = \mu_2^- x_1$, $x_2 = \mu_1^- x_1$, $x_1 < 0$ являются траекториями системы (2.5), (2.6).

Траектории, проходящие через точки сектора, образованного этими полупрямыми, оставаясь в этих секторах при $t \rightarrow \infty$, приближаются к особой точке $(0,0)$, если $a > 0$, и удаляются от неё при $a < 0$.

В этом случае особую точку $(0,0)$ назовём узлом: устойчивым узлом при $a > 0$ и неустойчивым узлом если $a < 0$.

Схематически фазовый портрет траекторий системы (2.4) показан на рис. 2.4.

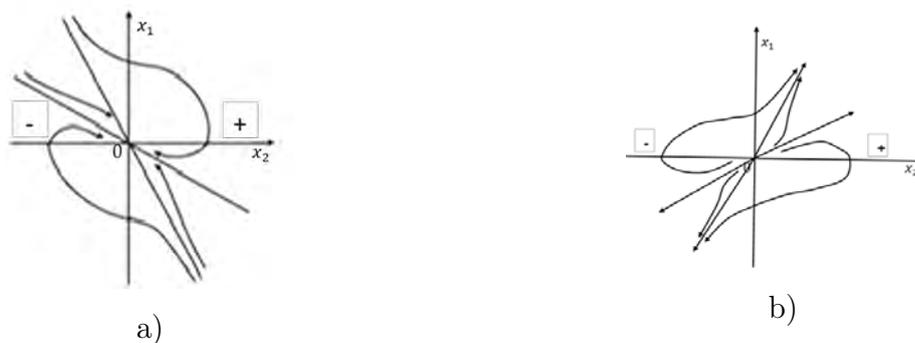


Рис. 2.4. Узел-узел

Случай 5. $0 < b - c \leq \frac{a^2}{4} < b + c$, или $0 < b + c \leq \frac{a^2}{4} < b - c$. Это означает, что либо $\mu_{1,2}^-$ вещественны, одного знака, $\mu_{1,2}^+ = \alpha \pm i\beta$ – комплексные числа, либо $\mu_{1,2}^- = \alpha \pm i\beta$ – комплексны, а $\mu_{1,2}^+$ вещественны и одного знака. Все траектории при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к особой точке $(0,0)$, если $a > 0$, и удаляются в бесконечность, если $a < 0$.

В этом случае особую точку $(0,0)$ назовём устойчивым узлом, если $a > 0$ и неустойчивым узлом если $a < 0$.

Схематически фазовый портрет траекторий системы (2.4) показан на рис. 2.5.

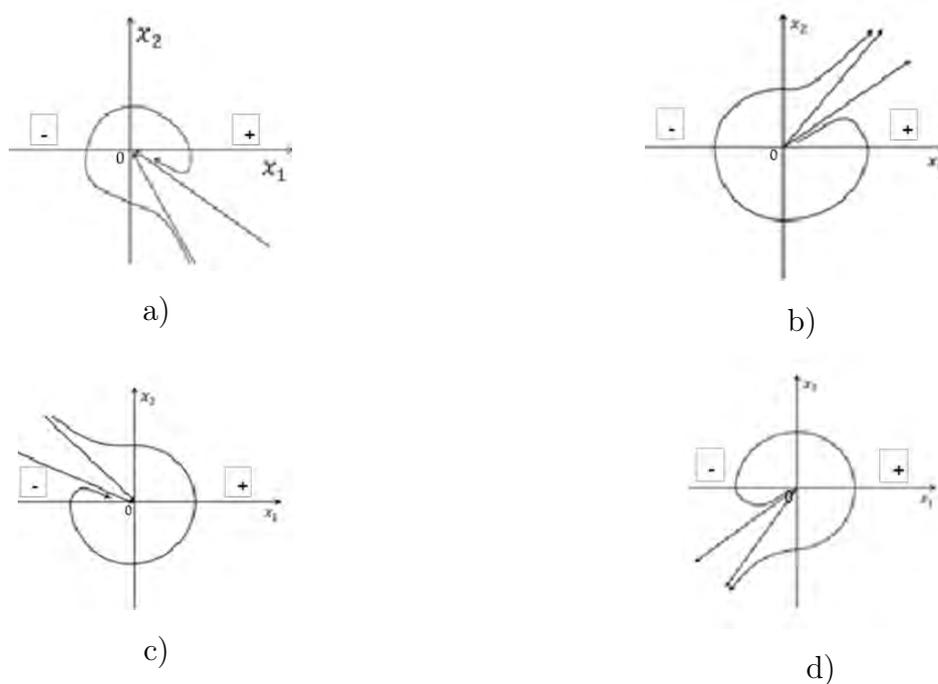


Рис. 2.5. Фокус-узел

Случай 6. $b + c > \frac{a^2}{4}$, и $b - c > \frac{a^2}{4}$. Это означает, что корни $\mu_{1,2}^+$ и $\mu_{1,2}^-$ характеристических уравнений (2.7) комплексные.

Схематически фазовый портрет траекторий системы (2.4) показан на рис. 2.6



Рис. 2.6. Фокус

Вышеприведенные случаи геометрически представляются на рис. 2.7 в виде секторов.

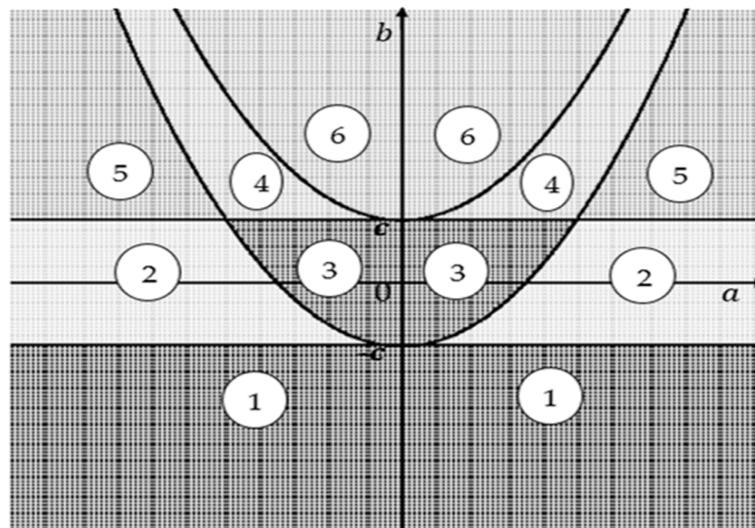


Рис. 2.7. Секторы

Лемма 2.1. Пусть числа $\mu_{1,2}^+$, $\mu_{1,2}^-$ — комплексные. Тогда ненулевые траектории системы (2.4), совершают бесконечно много оборотов вокруг особой точки $(0,0)$; при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к ней, если $a > 0$; удаляются от неё если $a < 0$; являются замкнутыми траекториями, если $a = 0$.

Доказательство. Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$y(t) = \exp(\alpha t) \{c_1 \cos(\beta^+ t) + c_2 \sin(\beta^+ t)\}$$

где c_1, c_2 -произвольные постоянные, а

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta^+ = \frac{1}{2}\sqrt{4(b+c) - a^2}, \quad \mu_{1,2}^+ = \alpha \pm \beta^+ i.$$

Отсюда, для частного решения $y_+(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $y_+(0) = 0, \quad y'_+(0) = x_{20} > 0$, имеем

$$y_+(t) = \frac{x_{20}}{\beta^+} \exp(\alpha t) \sin(\beta^+ t).$$

Это решение удовлетворяет условиям

$$y_+(t) > 0, \quad 0 < t < t_1 \equiv \frac{\pi}{\beta^+}, \quad y_+(t_1) = 0, \quad y'_+(t_1) = -x_{20} \exp(\alpha t_1).$$

Аналогично проверяется, что функция

$$y_-(t) = \frac{y'_-(t_1)}{\beta^-} \exp(\alpha t) \sin(\beta^-(t - t_1)),$$

где

$$\beta^- = \frac{1}{2}\sqrt{4(b-c) - a^2}, \quad \mu_{1,2}^- = \alpha \pm \beta^- i$$

является решением уравнения (2.3) и удовлетворяет условиям

$$y_-(t_1) = 0, \quad y_-(t) < 0, \quad t_1 < t < t_2, \quad y_-(t_2) = 0, \quad y'_-(t_2) > 0, \quad (t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\beta^-}).$$

Следовательно, если полагать $y'_-(t_1) = y'_+(t_1)$, то функция

$$y(t) = \begin{cases} y_+(t), & \text{если } 0 \leq t < t_1, \\ y_-(t), & \text{если } t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

является решением уравнения (2.1) и удовлетворяет условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = x_{20}, \quad y(t_2) = 0, \quad y'(t_2) = x_{20}(\exp(\alpha t_2)).$$

Таким образом, траектория $(x_1(t), x_2(t)) = (y(t), y'(t))$ решения системы (2.4) за промежуток времени $[0, t_2]$ совершает полный оборот вокруг особой точки $(0, 0)$ и возвращается на исходный луч $(0, x_2)$, $x_2 > 0$. При этом начальная точка $(0, y'(0))$ переходит в точку $(0, y'(t_2))$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Из леммы следует, что, если выполнено условие

$$a^2 < 4 \min \{(b + c), (b - c)\},$$

то особая точка $(0, 0)$ является фокусом при $a \neq 0$ и центром при $a = 0$, причем фокус устойчивый, если $a > 0$ и неустойчивый, если $a < 0$.

2.1.1 Стационарные решения кусочно-линейного дифференциального уравнения второго порядка, зависящего от параметра

Введем в рассмотрение следующее дифференциальное уравнение

$$y'' + ay' + by + c|y - \lambda| = 0, \quad (2.8)$$

где коэффициенты a, b, c и параметр λ вещественные числа. В отличие от (2.1), в уравнении (2.8) под модулем присутствует скалярный параметр λ .

Вводя обозначения $x_1 = y, x_2 = y'$ от уравнения (2.8) перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 - c|x_1 - \lambda|. \end{cases} \quad (2.9)$$

Следует отметить, что для системы (2.9) тоже получается такой же фазовый портрет, как и для системы (2.4). При этом в зависимости от значения параметра λ начало координат сдвинется вправо или влево. На рис. 2.8. приведем фазовый портрет системы (2.4) в соответствии со случаем 1 (Седло).

Стационарные решения (особые точки) системы (2.9) лежат на прямой $(x_1, 0), x_1 \in R$ и определяются как решения уравнения

$$bx_1 + c|x_1 - \lambda| = 0 \quad (2.10)$$

Если $b = c = 0$, то вся прямая $(x_1, 0), x_1 \in R$ состоит из особых точек системы (2.9), если же $b \neq 0$ и $c = 0$ или $b = 0$ и $c \neq 0$, то система

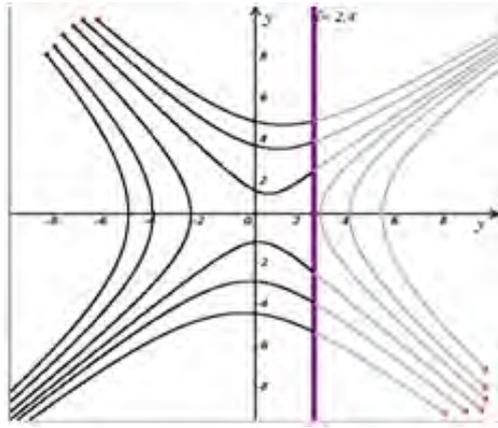


Рис. 2.8. Седло

(2.9) имеет единственную особую точку $(0, 0)$ или $(\lambda, 0)$ соответственно. Если $b = c \neq 0$, то уравнение (2.10) не имеет решения при $\lambda > 0$, имеет единственное решение $x_1 = \lambda/2$ при $\lambda < 0$ и имеет бесконечное множество $(-\infty, 0]$ решений при $\lambda = 0$. Аналогично, если $b = -c \neq 0$, то уравнение (2.10) не имеет решения при $\lambda < 0$, имеет единственное решение $x_1 = \lambda/2$ при $\lambda > 0$ и имеет бесконечное множество $[0, +\infty)$ решений при $\lambda = 0$.

Структура множества особых точек системы (2.9) в случае, когда $b \cdot c(b^2 - c^2) \neq 0$, определяется следующим утверждением.

Теорема 2.1. Пусть $b \cdot c \cdot (b^2 - c^2) \neq 0$. Тогда

а) если $\lambda = 0$, то система (2.9) имеет единственную нулевую особую точку $(0, 0)$;

б) если $\lambda > 0$, то система (2.9) имеет единственную особую точку $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$ при $|c| < |b|$, две особые точки $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$ $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|b| < |c|$, $b \cdot c < 0$ и не имеет особую точку при $|b| < |c|$, $b \cdot c > 0$;

в) если $\lambda < 0$, то система (2.9) имеет единственную особую точку $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|c| < |b|$, две особые точки $(\frac{c\lambda}{c-b}, 0)$, $(\frac{c\lambda}{c+b}, 0)$ при $|b| < |c|$, $b \cdot c > 0$ и не имеет особых точек при $|b| < |c|$, $b \cdot c < 0$.

Доказательство. Если $\lambda = 0$, то, очевидно, уравнение (2.10) имеет

нулевое решение $x_1 = 0$. Единственность нулевого решения следует из условия $|b| \neq |c|$. Утверждение а) доказано.

Докажем утверждение б). Разбивая числовую прямую на подмножества $(-\infty, \lambda)$, $[\lambda, +\infty)$, где $x_1 - \lambda$ сохраняет знак, и, освобождаясь от знака модуля, уравнение (2.10) перепишем в виде систем

$$\begin{cases} (b - c)x_1 + c\lambda = 0, \\ x_1 < \lambda, \end{cases} \quad (2.11)$$

или

$$\begin{cases} (b + c)x_1 - c\lambda = 0, \\ x_1 \geq \lambda. \end{cases} \quad (2.12)$$

Пусть $|c| < |b|$. Так как $(1 - t)^{-1} < 1$ при $|t| > 1$, то $\frac{c}{c-b} = \frac{1}{1-b/c} < 1$. Поэтому решение первого уравнения системы (2.11) $x_1 = \frac{c\lambda}{c-b}$ удовлетворяет неравенству $x_1 < \lambda$, т.е. является решением системы (2.11). Следовательно, $x_1 = \frac{c\lambda}{c-b}$ является решением уравнения (2.10). Единственность решения следует из того, что в силу неравенства $(1 + t)^{-1} < 1$ при $|t| > 1$, система (2.12) не имеет решения.

Если $|c| > |b|$ и $bc > 0$, то в силу неравенства $(1 + t)^{-1} > 1$, $(1 - t)^{-1} < 1$ при $-1 < t < 0$ для чисел $\frac{c\lambda}{c-b}$, $\frac{c\lambda}{c+b}$, имеем

$$\frac{c\lambda}{c-b} = \frac{\lambda}{1-b/c} < \lambda, \quad \frac{c\lambda}{c+b} = \frac{\lambda}{1+b/c} > \lambda.$$

Эти означают, что число $\frac{c\lambda}{c-b}$ является единственным решением системы (2.11), а $\frac{c\lambda}{c+b}$ является единственным решением системы (2.12), т.е. уравнение (2.10) имеет два решения.

Если $|c| > |b|$ и $bc < 0$, то справедливы неравенства

$$\frac{c\lambda}{c-b} = \frac{\lambda}{1-\frac{b}{c}} > \lambda, \quad \frac{c\lambda}{c+b} = \frac{\lambda}{1+\frac{b}{c}} < \lambda.$$

Эти означают, что системы (2.11), (2.12) не имеют решений. Следовательно, уравнение (2.10) не имеет решения. Утверждение б) доказано.

Аналогично доказывается утверждение с).

Лемма 2.2. Пусть коэффициенты уравнения (2.8) удовлетворяют неравенствам

$$0 < b - c < \frac{a^2}{4} < b + c \quad \text{или} \quad 0 < b + c < \frac{a^2}{4} < b - c.$$

Тогда для любого λ все решения системы (2.9) ограничены при $t > 0$, если $a > 0$, и при $t < 0$, если $a < 0$.

Доказательство. Следует напомнить, что решение $(x_1(t), x_2(t))$ системы (2.9) назовём ограниченным при $t \geq 0$, если существует такое $M > 0$,

$$|x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2 \leq M, \quad \forall t \geq 0$$

Приступим к доказательству теоремы. Пусть $a > 0$. Если некоторое решение $z(t) = (x_1(t), x_2(t))$ системы (2.9) неограниченно при $t > 0$, то существует последовательность t_k , $0 < t_k < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ такая, что $t_k \rightarrow \infty$ и $|z(t_k)| = \sqrt{|x_1(t_k)|^2 + |x_2(t_k)|^2} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Выберем числа $\tau_k \in [0, t_k]$ такие, что

$$|z(\tau_k)| = \max_{0 \leq t \leq t_k} |z(t)|.$$

Из неравенства $|z(\tau_k)| \geq |z(t_k)|$ следует $d_k \equiv |z(\tau_k)| \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\tau_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Вектор-функции

$$u_k(t) = \frac{1}{d_k} z(\tau_k + t), \quad -\tau_k \leq t \leq 0$$

удовлетворяют условиям

$$|u_k(0)| = 1, \quad |u_k(t)| \leq 1, \quad -\tau_k \leq t \leq 0.$$

и являются решением системы

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -au_2 - bu_1 - c|u_1 - \lambda/d_k|. \end{cases} \quad (2.13)$$

Пусть u^* предельная точка последовательности $u_k(0)$. Тогда решение системы (2.13), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = u^*$, является

ненулевым и ограниченным при $t \leq 0$. Но, согласно разобранным случаям 5, ненулевые решения системы (2.4) неограниченны при $t \leq 0$. Полученное доказывает утверждение леммы в случае $a > 0$ и $t > 0$.

Когда $a < 0$ и $t < 0$, доказательство леммы проводится аналогично.

Теорема 2.2. Пусть $\lambda \neq 0$, $a > 0$ и $b - |c| > \frac{a^2}{4}$, тогда стационарные решения уравнения (2.8) устойчивы в целом.

Прежде чем привести доказательство этой теоремы в виде отдельных лемм сформулируем и докажем некоторые общие свойства уравнения (2.8) или системы (2.9).

Лемма 2.3. Если уравнение (2.8) имеет периодическое решение, отличное от стационарного решения, при некотором значении $\lambda = \lambda_0 > 0$ ($\lambda = \lambda_0 < 0$), то оно имеет периодическое решение, отличное от стационарного, при любом $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$).

Доказательство. Пусть $y_{\lambda_0}(t) \neq const$ периодическое решение уравнения (2.8) при $\lambda = \lambda_0 > 0$. Тогда функция $y_\lambda(t) = \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot y_{\lambda_0}(t)$ является периодическим решением уравнения (2.8) и, очевидно, $y_\lambda(t) \neq const$. Аналогично, если $\lambda_0 < 0$, то $\frac{\lambda}{\lambda_0} > 0$ при $\lambda < 0$, и поэтому $y_\lambda(t)$ снова является периодическим решением уравнения (2.8). Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть $a > 0$ и $b > |c| + \frac{a^2}{4}$. Тогда если нестационарное периодическое решение $y(t)$ уравнения (2.8) существует, то оно удовлетворяет условиям

$$\max_t y(t) > \lambda, \quad \min_t y(t) < -\frac{c\lambda}{b-c}.$$

при $\lambda > 0$ и условиям

$$\min_t y(t) < \lambda, \quad \max_t y(t) > \frac{c\lambda}{b+c},$$

если $\lambda < 0$.

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$, и $y(t)$ — нестационарное решение уравнения (2.8). Если для $\forall t$ $y(t) \leq \lambda$ то оно является решением неоднородного уравнения

$$y'' + ay' + (b - c)y + c\lambda = 0, \quad (2.14)$$

которое при $a \neq 0$ не имеет нестационарных периодических решений. Следовательно,

$$\max_t y(t) > \lambda.$$

Чтобы доказать второе неравенство из (2.14) заметим, что область, ограниченная замкнутой кривой

$$\Gamma = \{(y(t), y'(t)) : t \in [0, T]\},$$

где T -период решения $y(t)$, содержит особую точку $(-\frac{c\lambda}{b-c}, 0)$ системы (2.9) (см. кроме вект. поле плоскость).

Поэтому справедливо неравенство

$$\min_t y(t) < -\frac{c\lambda}{b-c}.$$

В случае $\lambda > 0$ лемма доказана.

Аналогично рассматривается случай $\lambda < 0$.

Лемма доказана.

Пусть для определенности $\lambda > 0$. В силу леммы 2.4, если уравнение (2.8) имеет периодическое решение $y(t)$, отличное от стационарного решения, то без ограничения общности, можно предполагать, что $y(0) = \lambda$, $y'(0) = \xi > 0$. Действительно, если

$$y(\tau) = \max_t y(t) > \lambda,$$

то $y'(\tau) = 0$, и на интервале $(\alpha, \beta]$, где

$$\alpha = \inf\{s : y(t) > \lambda \quad s < t \leq \tau\},$$

$$\beta = \sup\{s : y(t) > \lambda \quad \tau \leq t < s\},$$

решение $y(t)$ удовлетворяет условиям $y(\alpha) = \lambda$, $y(\beta) = \lambda$, $y(t) > \lambda$,
 $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и уравнению

$$y'' + ay' + (b + c)y - c\lambda = 0. \quad (2.15)$$

Отсюда следует, что $y'(t) > 0$ при $\alpha \leq t < \tau$. Поэтому $y'(\alpha) = \xi > 0$.
 Решение $y_1(t) = y(t + \alpha)$ уравнения (2.8), является периодическим и
 удовлетворяет условиям

$$y_1(0) = y(\sigma_1) = \lambda, \quad y_1'(0) = y'(\sigma_1) = \xi > 0,$$

что требовалось доказать.

Лемма 2.5. Пусть $|b - c| \geq \frac{a^2}{4}$, и $a > 0$. Пусть $y(t)$ - нестационарное
 периодическое решение уравнения (2.8), удовлетворяющее условиям

$$y(0) = \lambda, \quad y'(0) = \xi > 0.$$

Тогда $\xi \geq \xi_0^{(\lambda)} = \lambda \xi_{00}$, где $\xi_{00} > 0$ не зависит от λ .

Доказательство. Рассмотрим решение $y_0(t)$ уравнения (2.8),
 удовлетворяющее начальным условиям

$$y_0(0) = \lambda, \quad y_0'(0) = 0.$$

Из (2.8) следует, что

$$y_0''(t) = -ay_0'(t) - by_0(t) - c|y_0(t) - \lambda|,$$

и поэтому при $t = 0$

$$y_0''(0) = -b\lambda < 0.$$

Следовательно, при достаточно малых по модулю значений $t < 0$ имеет
 место неравенство $y_0(t) < \lambda$. Пусть $t_0 < 0$ такое число, что

$$y_0(t) < \lambda, \quad t_0 < t < 0, \quad y_0(t_0) = \lambda.$$

На интервале $(t_0, 0)$ $y_0(t)$ является решением уравнения (2.14) и имеет представление

$$y_0(t) = \frac{b\lambda}{b-c} \left[e^{\alpha t} (\cos(\beta_- t) - \frac{\alpha}{\beta_-} \sin(\beta_- t) - \frac{c}{b}) \right].$$

Из этого представления решения $y_0(t)$ вытекает, что уравнение $y_0(t_0) = \lambda$ для определения t_0 имеет вид

$$e^{\alpha t_0} (\cos(\beta_- t_0) - \frac{\alpha}{\beta_-} \sin(\beta_- t_0)) = 1. \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) не зависит от λ , и поэтому его наибольшее отрицательное решение t_0 зависит лишь от коэффициентов α , β_- , то есть от a , b и c .

Уравнение (2.16) в интервале $(-\frac{2\pi}{\beta_-}, 0)$, имеет решение: $(-\frac{2\pi}{\beta_-} < t_0 < 0)$. Это следует из следующих свойств функции

$$f(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta_- t) - \frac{\alpha}{\beta_-} \sin(\beta_- t)) - 1 :$$

$f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = -(b-c) < 0$; $f(-\frac{2\pi}{\beta_-}) = e^{-\frac{\alpha 2\pi}{\beta_-}} - 1 > 0$, т.к. $\alpha = \frac{a}{2} < 0$. Положим

$$\eta_0 = y_0'(t_0) = -\frac{b\lambda}{\beta_-} e^{\lambda t_0} \cdot \sin(\beta_- t_0) = \lambda \cdot \eta_{00}.$$

Продолжение решения $y_0(t)$ при $t < t_0$ определяется решением линейного неоднородного уравнения (2.15), удовлетворяющим начальным условиям

$$y_+(t_0) = \lambda, \quad y_+'(t_0) = \eta_0 = \lambda \cdot \eta_{00}.$$

Так как $y_+(t)$ имеет представление

$$y_+(t) = e^{\alpha(t-t_0)} \left[\frac{b\lambda}{b+c} \cos(\beta_+(t-t_0)) + \frac{1}{\beta_+} \left(\eta_0 - \frac{b\lambda}{b+c} \alpha \right) \sin(\beta_+(t-t_0)) \right] + \frac{c\lambda}{b+c},$$

то имеем $y_0(t) = y_+(t)$ при $t_1 \leq t \leq t_0$, где t_1 - наибольшее решение уравнения $y_+(t_1) = \lambda$, удовлетворяющее условию $t_1 < t_0$. Заметим, что уравнение $y_+(t_1) = \lambda$ эквивалентно уравнению

$$e^{\alpha(t_1-t_0)} \left[\cos(\beta_+(t_1-t_0)) - \frac{1}{\beta_+} \left(\alpha - \frac{b+c}{\beta} \eta_{00} \right) \sin(\beta_+(t_1-t_0)) \right] = 1, \quad (2.17)$$

коэффициенты которого также не зависят от λ . Поэтому корень $t = t_1$ уравнения $y_+(t) = \lambda$ не зависит от λ .

Существование корня уравнения $y_+(t) = \lambda$ в интервале $t_0 - \frac{2\pi}{\beta_+} < t < t_0$ доказывается аналогично существованию корня уравнения (2.16).

Положим

$$\xi_0 = y_0(t_1) = y'_+(t_1).$$

Так как

$$y'_+(t) = e^{\alpha(t-t_0)} \left\{ \eta_0 \cdot \cos(\beta_+(t-t_0)) + \frac{\alpha\eta_0 - b\lambda}{\beta_+} \sin(\beta_+(t-t_0)) \right\}$$

и

$$\eta_0 = \lambda \cdot \eta_{00}, \text{ где } \eta_{00} \text{ не зависит от } \lambda, \text{ то } \xi_0 = \lambda \cdot \xi_{00},$$

где

$$\xi_{00} = e^{\alpha(t_1-t_0)} \left\{ \eta_{00} \cdot \cos(\beta_+(t_1-t_0)) + \frac{\alpha\eta_{00} - b}{\beta_+} \sin(\beta_+(t_1-t_0)) \right\} -$$

положительная постоянная, зависящая лишь от коэффициентов a , b и c .

Для завершения доказательства леммы теперь заметим, что любое периодическое решение $y(t)$ уравнения (2.8) удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \lambda$, $y'(0) = \xi > 0$ удовлетворяет условию $y'(0) \geq \lambda\xi_{00}$.

Действительно, если $0 < y'(0) = \xi < \lambda\xi_{00}$, то существует такое $s_0 > 0$, что

$$y(t) > \lambda, 0 < t < s_0, y(s_0) = \lambda, \lambda \cdot \eta_{00} < y'(s_0) < 0.$$

При $t \in [0, s_0]$ $y(t)$ является решением линейного уравнения (2.15). Согласно определению величины $\eta_0 = \lambda\eta_{00}$, решение $y(t)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(s_0) = \lambda, y'(s_0) \in (\eta_0, 0),$$

при $t > s_0$ удовлетворяет условию $y(t) < \lambda$ и является решением уравнения (2.14). В силу предположения $b - |c| > \frac{a^2}{4}$ и $a > 0$ траектория $(y(t), y'(t))$ решения линейного неоднородного уравнения (2.14), вращаясь вокруг особой точки $(y_0^-, 0)$, приближается к ней при $t \rightarrow +\infty$.

Но это противоречит предположению периодичности решения $y(t)$.
Лемма доказана.

Рассмотрим трансцендентное уравнение (2.17), в форме

$$e^{\alpha s}[\cos(\beta s) + d\sin(\beta s)] = 1, \quad (2.18)$$

где $\alpha < 0$, $\beta > 0$ фиксированы, а параметр $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Пусть $\theta_0 = \theta_0(d) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}, \\ \sin\theta = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}}. \end{cases}$$

Тогда уравнение (2.18) примет вид

$$e^{\alpha s} \cos(\beta s - \theta_0) = \cos\theta_0. \quad (2.19)$$

Лемма 2.6. Пусть $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Тогда уравнение (2.18) имеет бесконечное множество отрицательных корней. Если дополнительно выполнено неравенство

$$\alpha + \beta d > 0,$$

то уравнение (2.18) имеет по крайней мере один положительный корень.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(s) = e^{\alpha s} \cos(\beta s - \theta_0) - \cos\theta_0,$$

которая удовлетворяет условиям: $f(s) = \cos\theta < 0$, если $s = \frac{1}{\beta}(\theta_0 + k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

$$f(s) = e^{\alpha s} \cos(\beta s - \theta_0) - \cos\theta_0 > 0, \quad s = \frac{1}{\beta}(\theta_0 - 2k\pi), \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, на каждом интервале

$$\left(\frac{1}{\beta}(\theta_0 - 2k\pi - \frac{\pi}{2}), \frac{1}{\beta}(\theta_0 - 2k\pi + \frac{\pi}{2})\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

уравнение (2.19) имеет два корня. Первая часть утверждения леммы доказана.

Для доказательства второй части заметим, что функция $f(s)$ удовлетворяет условиям

$$f(0) = 0, f'(0) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+d^2}} + \frac{\beta d}{\sqrt{1+d^2}} > 0, f(s) < 0, \text{ при } s = \frac{1}{\beta}(\theta_0 + \frac{\pi}{2}).$$

Поэтому уравнение (2.19) имеет корень в интервале $(0, \frac{1}{\beta}(\theta_0 + \frac{\pi}{2}))$.

Лемма доказана.

Рассмотрим решение уравнения (2.15)

$$y_+(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta_+ t) + c_2 \sin(\beta_+ t)) + y_+^0, \quad y_+^0 = \frac{c\lambda}{b+c}, \quad (2.20)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_+(0) = \lambda, y'_+(0) = \xi > 0. \quad (2.21)$$

Так как

$$y'_+(t) = e^{\alpha t}[(\alpha c_1 + \beta_+ c_2) \cos(\beta_+ t) + (\alpha c_2 - \beta_+ c_1) \sin(\beta_+ t)], \quad (2.22)$$

то постоянные c_1, c_2 в силу (2.21) определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1 + y_+^0 = \lambda, \\ \alpha c_1 + \beta_+ c_2 = \xi, \end{cases}$$

то есть,

$$c_1 = \lambda - y_+^0, c_2 = \frac{1}{\beta_+}[\xi - \alpha(\lambda - y_+^0)].$$

Пусть $t=T$ - наименьший положительный корень уравнения $y_+(t) = \lambda$. Согласно лемме 2.6 существует такой корень.

Лемма 2.7. *Для решения $y_+(t)$, удовлетворяющего начальным условиям (2.21), справедливо неравенство*

$$y'_+(T) + y'_+(0) > 0, \quad (2.23)$$

Доказательство. В силу (2.20) и (2.22) имеем

$$y'_+(t) - \alpha(y_+(t) - y_+^0) = \beta_+ e^{\alpha t} [c_2 \cos \beta_+ t - c_1 \sin \beta_+ t].$$

Так как

$$y_+(T) - y_+^0 = \lambda - y_+^0 = c_1,$$

то из последнего равенства следует, что функция

$$y'_+(t) - \alpha(y_+(t) - y_+^0) + 2\alpha c_1 + \beta_+ c_2 = \beta_+ e^{\alpha t} [c_2 \cos \beta_+ t - c_1 \sin(\beta_+ t)] + 2\alpha c_1 + \beta_+ c_2$$

при $t=T$ принимает значение $y'_+(T) + y'_+(0)$.

Сначала покажем, что $y'_+(T) + y'_+(0) \neq 0$. С этой целью рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta_+ t) + c_2 \sin(\beta_+ t)] - c_1 = 0, \\ \beta_+ e^{\alpha t} [c_2 \cos(\beta_+ t) - c_1 \sin(\beta_+ t)] + 2\alpha c_1 + \beta_+ c_2 = 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

которая является развернутой записью системы

$$\begin{cases} y_+(t) = \lambda, \\ y'_+(t) - \alpha(y_+(t) - y_+^0) + 2\alpha c_1 + \beta_+ c_2 = 0. \end{cases}$$

В системе (2.24), производя замены

$$s = \beta_+ t, \gamma = \frac{\alpha}{\beta_+}, \cos \theta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \sin \theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

имеем

$$\begin{cases} e^{\gamma s} (c_1 \cos(s - \theta) - \cos \theta) = 0, \\ -e^{\gamma s} \sin(s - \theta) + 2\gamma \cos \theta + \sin \theta = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Систему (2.25) рассмотрим относительно вещественных s и γ области

$$0 \leq s < 2\theta, \quad -tg\theta \leq \gamma < 0. \quad (2.26)$$

Область (2.26) содержит точку $(s, \gamma) = (\beta_+ T, \frac{\alpha}{\beta_+})$.

Покажем, что система (2.25) в области (2.26) не имеет решений. Действительно, если предположить, что система (2.25) имеет решение (s, γ) , то оно удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} tg(s - \theta) = tg\theta + 2\gamma, \\ e^{2\gamma s} = 1 + 4\gamma \sin\theta \cdot \cos\theta + 4\gamma^2 \cos^2\theta, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} s - \theta = arctg(tg\theta + 2\gamma), \\ 2\gamma s = \ln(1 + 4\gamma \sin\theta \cdot \cos\theta + 4\gamma^2 \cos^2\theta). \end{cases} \quad (2.27)$$

Из равенств (2.27) определяются функции

$$\begin{aligned} s_1(\gamma) &= \theta + arctg(tg\theta + 2\gamma), \\ s_2(\gamma) &= \frac{1}{2\gamma} \ln(1 + 4\gamma \sin\theta \cdot \cos\theta + 4\gamma^2 \cos^2\theta), \end{aligned}$$

которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} s_1(\gamma) &= 2\theta > \sin(2\theta) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} s_2(\gamma), \\ s_1(-tg\theta) &= s_2(-tg\theta) = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$s'_1(\gamma) - s'_2(\gamma) = \frac{1}{2\gamma^2} \left\{ \ln(1 + \sigma) - \frac{\sigma}{1 + \sigma} \right\}, \quad (2.29)$$

где

$$\sigma = 4\gamma - \cos\theta(\sin\theta + \gamma \cos\theta), \quad \sigma \in [-\sin^2\theta, 0).$$

Так как

$$\ln(1 + \sigma) - \frac{\sigma}{1 + \sigma} > 0, \quad -1 < \sigma < 0,$$

то из (2.28) и (2.29) следует, что

$$s_1(\gamma) - s_2(\gamma) > 0, \quad -tg\theta \leq \gamma < 0. \quad (2.30)$$

Из неравенства (2.30) следует, что система (2.25) не имеет решений в области (2.26). Отсюда следует, что, если $s = s_0(\gamma)$ — наименьшее положительное решение первого уравнения системы (2.25), то функция

$$F(s, \gamma) \equiv -e^{\gamma s} \sin(s - \theta) + 2\gamma \cos\theta + \sin\theta$$

не обращается в нуль:

$$F(s_0(\gamma), \gamma) \neq 0, \quad -tg\theta \leq \gamma < 0.$$

Заметим, что $s_0(\gamma)$ удовлетворяет условиям

$$s_0(0) = 2\theta, \quad s_0\left(\frac{\alpha}{\beta_+}\right) = \beta_+ T,$$

$$\left. \frac{ds_0(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} = - \left. \frac{e^{\alpha s} \cdot s \cos(s - \theta)}{e^{\alpha s} (\gamma \cos(s - \theta) - \sin(s - \theta))} \right|_{\gamma=0, s=2\theta} = \frac{2\theta \cos\theta}{\sin\theta}.$$

Поэтому для функций $F(s_0(\gamma), \gamma)$ имеем

$$F(s_0(0), 0) = F(2\theta, 0) = -\sin\theta + \sin\theta = 0,$$

$$\left. \frac{d}{d\gamma} F(s_0(\gamma), \gamma) \right|_{\gamma=0} = F'_s(2\theta, 0) \cdot \left. \frac{ds_0(0)}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} + F'_\gamma(2\theta, 0) = -\cos\theta \cdot \frac{2\theta \cdot \cos\theta}{\sin\theta} - 2\theta \cdot \sin\theta +$$

$$+ 2\cos\theta = \frac{1}{\sin\theta} [-2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2\cos\theta \cdot \sin\theta] = \frac{\sin 2\theta - 2\theta}{\sin\theta}.$$

Так как $\sin 2\theta - 2\theta < 0$, $\sin\theta > 0$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, то функция $F(s_0(\gamma), \gamma)$ при малых по модулю отрицательных значениях γ принимает положительные значения. Согласно вышедоказанному функция $F(s_0(\gamma), \gamma)$ сохраняет знак при всех $\gamma \in [-tg\theta, 0)$.

Поэтому, в частности,

$$F\left(\beta_+ T, \frac{\alpha}{\beta_+}\right) = -e^{\alpha T} \sin(\beta_+ T - \theta) + \frac{2\alpha}{\beta_+} \cos\theta + \sin\theta > 0.$$

Отсюда, в силу равенства

$$y'_+(T) + y'_+(0) = \beta_+ \cdot F\left(\beta_+ T, \frac{\alpha}{\beta_+}\right),$$

следует справедливость неравенства (2.23). Лемма доказана.

Теперь рассмотрим решение уравнения (2.14)

$$y_-(t) = e^{\alpha t}(d_1 \cos(\beta_- t) + d_2 \sin(\beta_- t)) + y_-^0, \quad y_-^0 = -\frac{c\lambda}{b-c},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_-(0) = \lambda, \quad y'_-(0) = \xi > 0. \quad (2.31)$$

В силу равенства

$$y'_-(t) = e^{\alpha t}[(\alpha d_1 + \beta_- d_2) \cos(\beta_- t) + (\alpha d_2 - \beta_- d_1) \sin(\beta_- t)]$$

для определения постоянных d_1, d_2 имеем

$$\begin{cases} d_1 + y_-^0 = \lambda, \\ \alpha d_1 + \beta_- d_2 = \xi, \end{cases}$$

то есть

$$d_1 = \lambda - y_-^0, \quad d_2 = \frac{1}{\beta_-}[\xi - \alpha(\lambda - y_-^0)].$$

Пусть $t = T_-$ - наибольший отрицательный корень уравнения $y_-(t) = \lambda$.
Существование такого корня следует из леммы 2.6.

Лемма 2.8. *Для решения $y_-(t)$, удовлетворяющего начальным условиям (2.31), справедливо неравенство*

$$y'_-(T_-) + y'_-(0) < 0$$

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству лемма 2.7.

Теперь переходим к доказательству теоремы 2.2.

Доказательство. В силу леммы 2.2 любое решение уравнения (2.8) является ограниченным. Согласно теореме Пуанкаре-Бендиксона [76] они сходятся к стационарному или к не тривиальному периодическому

решению. С другой стороны из леммы (2.3-2.5) следует, что, уравнение (2.8) не имеет нестационарных периодических решений. Следовательно, стационарное решение уравнение (2.8) является устойчивым.

Теорема доказана.

2.1.2 Пример 1: груз на транспортере

В качестве примера рассмотрим задачу о моделировании движения груза на транспортере. Груз прикреплен пружиной к неподвижной стене. Лента транспортера движется с постоянной линейной скоростью V_t .

Пусть k - жесткость пружины, F_{TP} - величина сухого трения, параметр δ характеризует вязкое трение. В соответствующих координатах движение груза описывается системой:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \frac{1}{2}g(x_1, x_2) + \delta x_2 + \varepsilon(x_2), \end{cases}$$

где

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} -F_{TP} - kx_1, & x_2 > V_T \\ F_{TP} - kx_1 & x < V_T, \end{cases}$$

а $\varepsilon(x_2)$ содержит нелинейные характеристики силы сопротивления, зависящие от квадрата или более высокой степени скорости груза. В этой модели гладкость правой части нарушается на прямой $x_2 = V_T$.

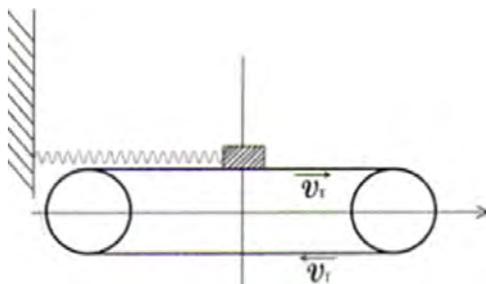


Рис. 2.9. Груз на транспортере

2.2 Признаки существования предельных циклов дифференциальных уравнений второго порядка

Предельные циклы имеют широкое применение во многих областях естествознания: радиофизике, автоматическом регулировании, химии, медицине, математической биологии и экономике и т.д. Поэтому исследование вопросов о существовании предельных циклов является важным разделом теории нелинейных колебаний. Известны различные достаточные условия существования предельных циклов. Классическими примерами уравнений, имеющих предельные циклы, являются уравнения Ван дер Поля и Рэля [8], [15], [32]. Сравнительно недавно было обнаружено, что у кусочно-линейных уравнений вида

$$x'' + ax' + bx + c|x' - \lambda| = 0, \quad (2.32)$$

при определенных значениях коэффициентов a, b, c и параметра λ , возникают предельные циклы. А именно, в работе [87] с помощью компьютерного моделирования было установлено, что уравнение (2.32) при $a = 1, b = 1, c = 3/2$ и $\lambda > 0$ имеет предельный цикл. Более общее условие существования предельного цикла уравнения (2.32) получено в работе [53].

Как отмечают многие авторы, (см., напр., [15]), вопрос об установлении существования предельных циклов является одним из наиболее трудных вопросов, и для его решения отсутствуют общие методы. Поэтому любой метод, который позволяет, хотя бы для частного класса уравнений, устанавливать существования циклов, представляет интерес.

В настоящей параграфе изучается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' + ax' + bx + c|x' - \varphi(x, x')| = 0, \quad (2.33)$$

где a, b, c - вещественные числа, а функция $\varphi(x, y)$ -непрерывна и удовлетворяет некоторому условию роста при $|x| + |y| \rightarrow \infty$.

Найдены условия на коэффициенты a, b, c и функцию $\varphi(x, y)$, которые обеспечивают существование предельного цикла уравнения (2.33).

2.2.1 Анализ фазового портрета однородного уравнения

Сначала приведем анализ фазового портрета траекторий однородного уравнения

$$x'' + ax' + bx + c|x'| = 0, \quad (2.34)$$

в зависимости от расположения коэффициентов (a, b, c) как точки трехмерного пространства R^3 (см. [53]). Если $c = 0$, то (2.34) есть линейное уравнение второго порядка, фазовый портрет которого хорошо известен (см., напр., [8], [72], [79]). Ниже мы будем предполагать, что $c > 0$. Заметим, что если $c < 0$, то заменой x на $-x$ уравнение (2.34) сводится к такому же уравнению с коэффициентами $(a, b, -c)$.

Уравнение (2.34) "склеивается" из линейных уравнений

$$x'' + (a + c)x' + bx = 0, \quad \text{если } x' > 0 \quad (2.35)$$

и

$$x'' + (a - c)x' + bx = 0, \quad \text{если } x' \leq 0. \quad (2.36)$$

Обозначим через μ_1^\pm и μ_2^\pm корни характеристического уравнения

$$\mu^2 + (a \pm c)\mu + b = 0, \quad (2.37)$$

соответствующего уравнениям (2.35) и (2.36):

$$\mu_1^\pm = -\frac{1}{2} \left\{ (a \pm c) - \sqrt{(a \pm c)^2 - 4b} \right\}, \quad \mu_2^\pm = -\frac{1}{2} \left\{ (a \pm c) + \sqrt{(a \pm c)^2 - 4b} \right\}.$$

Из этих формул для корней характеристических уравнений (2.37) следует, что в полупространстве $\{(a, b, c) : c > 0\}$ коэффициентов уравнения (2.34) корни μ_1^\pm обращаются в нуль при $b = 0$ и меняют знак при возрастании b ; корни μ_1^\pm, μ_2^\pm , соответственно, вещественны при $4b < (a \pm c)^2$, становятся кратными при $4b = (a \pm c)^2$ и комплексно сопряженными при $4b > (a \pm c)^2$.

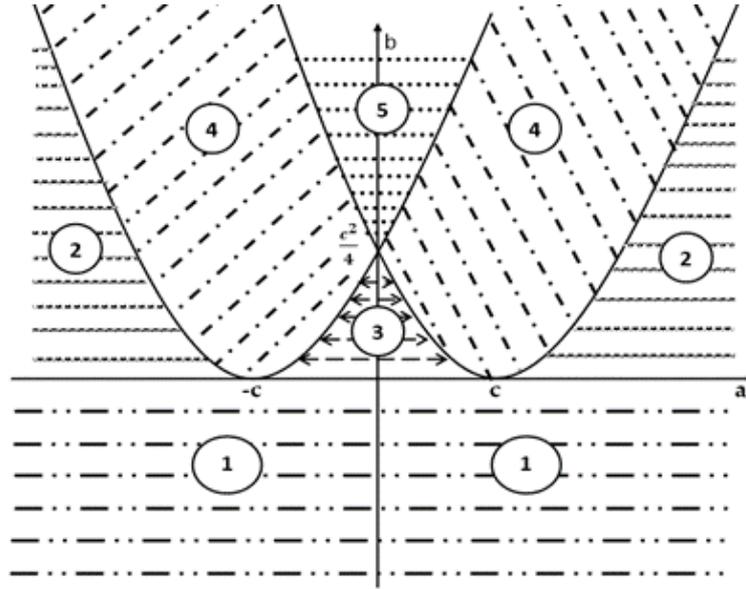


Рис. 2.10. Секторы

Исходя из этих свойств корней характеристических уравнений, полупространство $\{(a, b, c) : c > 0\}$ разложим на следующие подмножества:

1. $\{(a, b, c) : b < 0\}$;
2. $\{(a, b, c) : 0 < 4b \leq (|a| - c)^2, |a| > c\}$;
3. $\{(a, b, c) : 0 < 4b \leq (|a| - c)^2, |a| < c\}$;
4. $\{(a, b, c) : (|a| - c)^2 < 4b \leq (|a| + c)^2\}$;
5. $\{(a, b, c) : (|a| + c)^2 < 4b\}$.

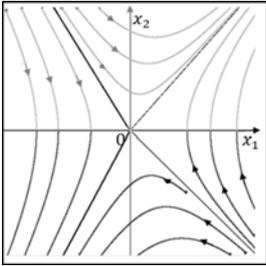
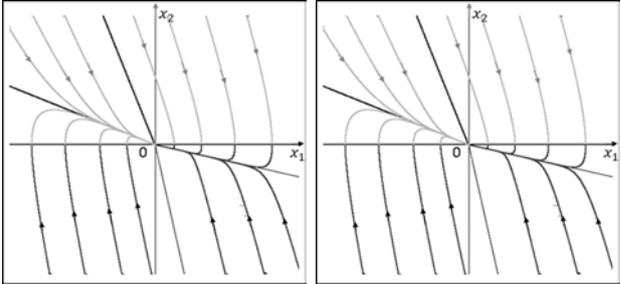
Проекция пересечений этих подмножеств с плоскостью $c = const > 0$ на координатную плоскость (a, b) приведена на рис.2.10.

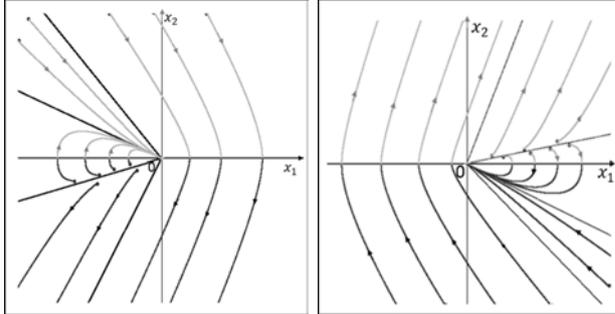
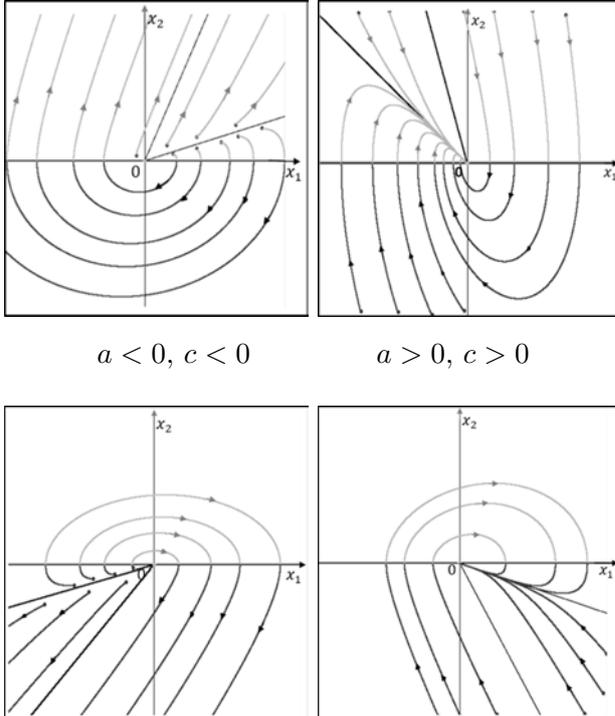
Отметим, что для коэффициентов (a, b, c) , принадлежащих множествам 1-4, ненулевое решение $x(t)$ уравнения (2.34) с начальным значением $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = 0$ является решением линейного уравнения (2.35) при $(t - t_0)x_0 < 0$ и уравнения (2.36) при $(t - t_0)x_0 > 0$.

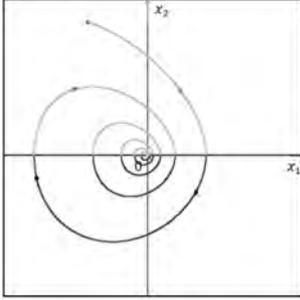
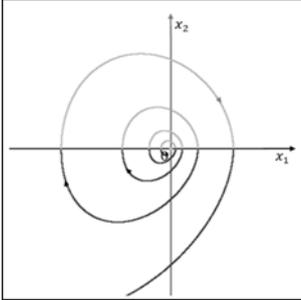
Уравнение (2.34) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -ay - bx - c|y|. \end{cases} \quad (2.38)$$

Если $b \neq 0$, то система (2.38) имеет единственную особую точку $(0, 0)$. Как и в случае линейного уравнения, расположение корней характеристических уравнений (2.37) на комплексной плоскости однозначно определяет поведение траектории кусочно-линейной системы (2.38) в фазовой плоскости (x, y) . Как видно из нижеприводимой таблицы, у кусочно-линейных систем возникают изолированные сложные особые точки, где появляется эллиптический сектор, состоящий из траекторий, которые приближаются к особой точке как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$.

№	Область в пространстве параметров	Корни характеристического уравнения	Качественная картина фазовых траекторий
1	$b < 0$	Числа $\mu_{1,2}^{\pm}$ — вещественны и разного знака	 <p style="text-align: center;">Седло</p>
2	$0 < 4b \leq \{ a - c \}^2$, $ a > c$.	Числа μ_1^{\pm}, μ_2^{\pm} — вещественны и одного знака	 <p style="text-align: center;">$a > 0$ $a < 0$</p> <p style="text-align: center;">Узел</p>

3	$0 < 4b \leq \{ a - c \}^2$ $ a < c.$	<p>Если $\mu_1^+ > 0$, то $\mu_2^+ > 0$, $\mu_1^- < 0$ и $\mu_2^- < 0$, (что соответствует условию $c < 0$). Если $\mu_1^+ < 0$, то $\mu_2^+ < 0$, $\mu_1^- > 0$ и $\mu_2^- > 0$, (что соответствует условию $c > 0$)</p>	 <p style="text-align: center;">$c > 0$ $c < 0$</p> <p style="text-align: center;">Узловой сектор и эллиптический сектор</p>
4	$\{ a - c \}^2 < 4b$ $\leq \{ a + c \}^2$	<p>Либо $\mu_{1,2}^-$ вещественны и одного знака, и $\mu_{1,2}^+ = \alpha \pm i\beta$ — комплексно сопряженные, либо $\mu_{1,2}^+$ — вещественны и одного знака, и $\mu_{1,2}^- = \alpha \pm i\beta$ — комплексно сопряженные</p>	 <p style="text-align: center;">$a < 0, c < 0$ $a > 0, c > 0$</p> <p style="text-align: center;">$a < 0, c > 0$ $a > 0, c < 0$</p> <p style="text-align: center;">Узел-фокус</p>

5	$4b > \{ a +c\}^2$	Числа $\mu_{1,2}^+, \mu_{1,2}^-$ -комплексные сопряженные	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>$a > 0$</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>$a < 0$</p> </div> </div> <p>Фокус (неустойчивый фокус, если $a < 0$, устойчивый фокус, если $a > 0$, центр, если $a = 0$)</p>
---	--------------------	---	---

В дальнейшем будем предполагать, что $b \neq 0$. В таблице приведена классификация основных случаев поведения траекторий системы (2.38) на фазовой плоскости.

2.2.2 Условия ограниченности решений на полуоси

Теперь перейдём к изучению уравнения (2.33). Уравнение (2.33) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -ay - bx_1 - c|y - \varphi(x, y)|. \end{cases} \quad (2.39)$$

Ниже будем предполагать, что функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(x, y)|}{|x| + |y|} = 0. \quad (2.40)$$

Условие (2.40) обеспечивает продолжимость решения системы (2.39) на всю числовую ось $(-\infty, \infty)$.

Теорема 2.3. Пусть имеет место (2.40), и коэффициенты системы (2.39) удовлетворяют условиям: $b > 0, c > 0, a \notin [\min\{0, 2\sqrt{b} - c\}, \max\{0, c - 2\sqrt{b}\}]$. Тогда все решения системы (2.39) ограничены при

$t > 0$, если $a > 0$ и при $t < 0$, если $a < 0$, т.е. $a \neq 0$, и для любого решения $(x(t), y(t))$ справедливо неравенство

$$\sup\{|x(t)| + |y(t)| : a \cdot t > 0\} < \infty.$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Если некоторое решение $(x(t), y(t))$ системы (2.39) неограниченно при $t > 0$, то существует последовательность t_k , $0 < t_k < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ такая, что $t_k \rightarrow \infty$ и $|x(t_k)| + |y(t_k)| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Выберем числа $\tau_k \in [0, t_k]$ такие, что

$$|x(\tau_k)| + |y(\tau_k)| = \max_{0 \leq t \leq t_k} (|x(t)| + |y(t)|).$$

Из неравенства $|x(\tau_k)| + |y(\tau_k)| \geq |x(t_k)| + |y(t_k)|$ следует $d_k \equiv |x(\tau_k)| + |y(\tau_k)| \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\tau_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Вектор-функции

$$(u_k(t), v_k(t)) = (x(\tau_k + t)/d_k, y(\tau_k + t)/d_k) \quad -\tau_k \leq t \leq 0$$

удовлетворяют условиям

$$|u_k(t)| + |v_k(t)| \leq |u_k(0)| + |v_k(0)| = 1, \quad -\tau_k \leq t \leq 0$$

и являются решением системы

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -av - bu - c|v - h_k(t)|. \end{cases} \quad (2.41)$$

Здесь функции $h_k(t)$ определяются равенством $h_k(t) = \varphi(u_k(t), v_k(t))/d_k$ и, в силу выбора чисел d_k и условия (2.40), равномерно по t стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Пусть (u^*, v^*) - предельная точка последовательности $(u_k(0), v_k(0))$. Тогда решение системы (2.41), удовлетворяющее начальному условию $(x(0), y(0)) = (u^*, v^*)$, является ненулевым и ограниченным при $t \leq 0$. С другой стороны, согласно п. 2. и 4. в вышеприведенной таблице, все решения системы (2.38) не ограничены при $t \leq 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы для случая $a > 0$.

Аналогично рассматривается случай $a < 0$. Теорема доказана.

2.2.3 Устойчивость изолированной особой точки

Рассмотрим общее уравнение второго порядка

$$x'' = f(x, x'), \quad (2.42)$$

где $f(x, y)$ -определенная на всей плоскости (x, y) непрерывная функция. Уравнение (2.42) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = f(x, y). \end{cases} \quad (2.43)$$

Ниже мы будем предполагать, что любое решение системы (2.43) продолжимо на всю числовую ось. Как отметили выше, это предположение выполнено в частном случае, когда рассматривается уравнение (2.39), где функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию (2.40).

Особые точки системы (2.43) лежат на оси абсцисс, т.е. имеют вид $(x_0, 0)$, где x_0 является решением скалярного уравнения

$$f(x, 0) = 0. \quad (2.44)$$

Пусть x_0 — решение скалярного уравнения (2.44). Следует отметить, что исследование поведения траекторий системы (2.43) в окрестности точек равновесия является одной из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства, связанные с качественным поведением траектории системы (2.43) в окрестности особой точки $(x_0, 0)$. Для описания этих свойств используем методы функции Ляпунова [15], [72].

Лемма 2.9. *Предположим, что функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ особой точки $(x_0, 0)$ удовлетворяет условиям:*

а) $f(x, 0)(x - x_0) \leq 0$ и $f(x, 0)$ тождественно не равна нулю в любом интервале $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$, $\delta > 0$;

$$б) \quad (f(x, y) - f(x, 0))y \geq 0.$$

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (2.43), отличного от стационарного решения $(x_0, 0)$, имеет место

$$\inf_{t \geq 0} [|x(t) - x_0| + |y(t)|] > 0. \quad (2.45)$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не имеет места. Тогда существует решение $(x(t), y(t))$ системы (2.43), отличное от особой точки $(x_0, 0)$, и последовательность $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(t_k) - x_0| + |y(t_k)| = 0. \quad (2.46)$$

Рассмотрим множество $E = \{t : t \geq 0, |x(t) - x_0| + |y(t)| < \sigma_1\}$, где $0 < \sigma_1 < \min[\sigma, |x(0) - x_0| + |y(0)|]$. Отметим, что E -открытое множество, и в силу (2.46), $t_k \in E$, начиная с некоторого номера k_0 . Обозначим через (α_k, β_k) составляющие интервалы множества E , содержащие числа t_k . Не исключено, что интервалы (α_k, β_k) , соответствующие различным номерам k , совпадают, и $\beta_k = \infty$, начиная с некоторого номера k . По определению составляющего интервала имеем

$$|x(t) - x_0| + |y(t)| < |x(\alpha_k) - x_0| + |y(\alpha_k)| = \sigma_1, \quad \alpha_k < t \leq t_k. \quad (2.47)$$

Для решения $(x(t), y(t))$ справедливо тождество

$$\frac{d}{dt} \{y^2/2 + G(x)\} = h(x, y), \quad (2.48)$$

где

$$G(x) = - \int_{x_0}^x f(s, 0) ds, \quad h(x, y) = (f(x, y) - f(x, 0))y.$$

Интегрируя тождество (2.48) на отрезке $[\alpha_k, t_k]$, имеем

$$y(t_k)^2/2 + G[x(t_k)] - y(\alpha_k)^2/2 - G[\alpha_k] = \int_{\alpha_k}^{t_k} h(x(s), y(s)) ds. \quad (2.49)$$

В силу условия б) $h(x, y) \geq 0$ при $|x - x_0| + |y| < \sigma$, поэтому подинтегральная функция в правой части (2.49) неотрицательна. Следовательно имеет место неравенство

$$y(t_k)^2/2 + G[x(t_k)] - y(\alpha_k)^2/2 - G[\alpha_k] \geq 0, k \geq k_0. \quad (2.50)$$

Так как в силу условия а) непрерывная функция $G(x)$ положительна при $0 < |x - x_0| < \sigma$, то $y^2/2 + G[x] \geq m > 0$ при $|x - x_0| + |y| = \sigma_1$. Поэтому неравенства (2.50) противоречит равенству (2.46). Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. Лемма доказана.

Отметим, что в случае, когда функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ в некоторой окрестности особой точки $(x_0, 0)$, для выполнения условий а) и б) леммы 2.9 достаточно выполнения неравенства $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) < 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) > 0$.

Следующая лемма является обобщением леммы 2.9.

Лемма 2.10. *Предположим, что функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, ($\sigma > 0$) особой точки $(x_0, 0)$ и при заданном $\kappa \leq 0$ удовлетворяет условиям*

- а) *функция $f(x, \kappa(x - x_0))(x - x_0) - \kappa^2(x - x_0)^2 \geq 0$, причем тождественно не равна нулю в любом интервале $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$, $\delta > 0$;*
- б) *$(f(x, \kappa(x - x_0) + y) - \kappa y - f(x, \kappa(x - x_0)))y \geq 0$.*

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (2.43), отличного от стационарного решения $(x_0, 0)$, имеет место

$$\inf_{t \geq 0} [|x(t) - x_0| + |y(t)|] > 0. \quad (2.51)$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы (2.9).

Аналогично лемме (2.9) доказывается следующая:

Лемма 2.11. *Предположим, что функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ особой точки $(x_0, 0)$ удовлетворяет условию а) леммы 2.9 и условию $(f(x, y) - f(x, 0))y \leq 0$.*

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (2.43), отличного от стационарного решения $(x_0, 0)$, имеет место

$$\inf_{t \leq 0} [|x(t) - x_0| + |y(t)|] > 0. \quad (2.52)$$

Свойство (2.52) решений системы (2.43) тесно связано со свойством устойчивости по Ляпунову стационарного решения $(x_0, 0)$. А именно, имеет место

Теорема 2.4. *Стационарное решение $(x_0, 0)$ системы (2.43) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда для любого решения, отличного от него, имеет место неравенство (2.52).*

Доказательство этой теоремы следует из лемм (2.9)-(2.11).

2.2.4 Признаки существования предельных циклов

Продолжим изучение системы (2.39), предполагая, что $b > 0, c > 0$, функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию (2.40), $\varphi(0, 0) > 0$ и система (2.39) имеет единственную особую точку, т.е. скалярное уравнение

$$bx + c|\varphi(x, 0)| = 0 \quad (2.53)$$

имеет единственное решение x_0 , причем $x_0 \neq 0$.

Теорема 2.5. *Предположим, что*

а) коэффициенты уравнения (2.33) удовлетворяют условиям $a > \max\{0, c - 2\sqrt{b}\}$; б) функция $\varphi(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ особой точки $(x_0, 0)$ удовлетворяет условиям: $((c - a)y + c\varphi(x, y) - c\varphi(x, 0))y \geq 0$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (2.39), отличного от стационарного, и любой последовательности $h_k \rightarrow +\infty$ существует подпоследовательность h_{k_j} такая, что решения $(x(t + h_{k_j}), y(t + h_{k_j}))$ равномерно на каждом отрезке приближаются к некоторому периодическому решению системы (2.39) при $j \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть $(x(t), y(t))$ - произвольное решение системы (2.39), отличное от периодического и стационарного. В силу теоремы 2.3 это решение ограничено при $t > 0$. Следовательно, для любой последовательности $h_k \rightarrow +\infty$ последовательность решений $(x(t + h_k), y(t + h_k))$ определена, ограничена и равномерно непрерывна на каждом отрезке. В силу теоремы Арцела существует подпоследовательность h_{k_j} такая, что решения $(x(t + h_{k_j}), y(t + h_{k_j}))$ приближаются к некоторому решению $(x^*(t), y^*(t))$ системы (2.39) равномерно на каждом отрезке при $j \rightarrow +\infty$.

В силу леммы 2.9, множество ω - предельных точек решения $(x(t), y(t))$ не содержит единственную особую точку системы (2.39). Поэтому в силу теоремы Пуанкаре -Бендиксона [76] решение $(x^*(t), y^*(t))$ - периодическое. Теорема доказана.

Рисунок 2.11, который получен при помощи построенного пакета программ, иллюстрирует утверждение теоремы.

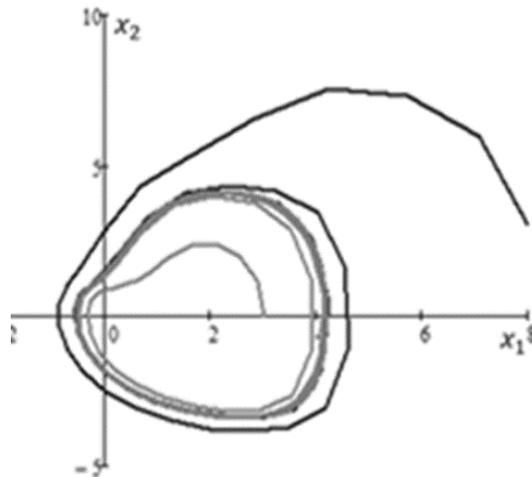


Рис. 2.11. Предельный цикл

Теорема 2.6. *Предположим, что: а) коэффициенты уравнения (2.33) удовлетворяют условиям $a < \min\{0, 2\sqrt{b} - c\}$;*

б) функция $\varphi(x, y)$ в некоторой окрестности $|x - x_0| + |y| < \sigma$, $\sigma > 0$ особой точки $(x_0, 0)$ удовлетворяет условиям: $((c - a)y + c\varphi(x, y) - c\varphi(x, 0))y \leq 0$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (2.39), отличного от стационарного, и любой последовательности $h_k \rightarrow +\infty$ существует подпоследовательность h_{k_j} такая, что решения $(x(t - h_{k_j}), y(t - h_{k_j}))$ равномерно на каждом отрезке приближаются к некоторому периодическому решению системы (2.39) при $j \rightarrow +\infty$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы (2.5).

В качестве примера рассмотрим функцию $\varphi(x, y) = \cos(x + y)$. Она удовлетворяет условию (2.40) и $\varphi(0, 0) = 1 > 0$. Следующее утверждение определяет условие единственности решения уравнения (2.53).

Лемма 2.12. Уравнение $dx + |\cos(x)| = 0$, где d -заданное число, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $|d|\sqrt{1 + x_1^2} > 1$, где $x_1 \in (\pi/2, \pi)$ и является решением уравнения $\cos(x) + x \sin(x) = 0$ ($x_1 \approx 2,798386, 1/\sqrt{1 + x_1^2} \approx 0,336508$).

Доказательство. Утверждение леммы, в случае $|d| > 1$, является следствием принципа сжатых отображений, а в случае, когда $1 < |d|\sqrt{1 + x_1^2} \leq \sqrt{1 + x_1^2}$ следует из анализа графиков функции $z = -|\cos(x)|$ и прямой $z = dx$. Лемма доказана.

Пусть коэффициенты b, c такие, что $0 < c < b\sqrt{1 + x_1^2}$. Тогда уравнение $bx + c|\cos(x)| = 0$, согласно лемме (2.12), имеет единственное решение $x_0 = x_0(b/c) < 0$, зависящее от дроби b/c . Поэтому, если коэффициенты a, b, c системы (2.39) удовлетворяют неравенствам $\max\{0, c - 2\sqrt{b}\} < a < c(1 - \sin(x_0))$, то выполнены все условия теоремы 2.5 при $\varphi(x, y) = \cos(x + y)$. Следовательно система уравнений (2.39) имеет предельный цикл.

2.3 Исследование локальных бифуркаций динамических систем, содержащих негладкие нелинейности

В этом параграфе рассматривается дифференциальное уравнение

$$x' = A(\mu)x + \varphi(x, \mu) + b(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad (2.54)$$

правая часть которого зависит от скалярного параметра μ . Здесь:

- $A(\mu)$ – квадратная матрица порядка N с непрерывно дифференцируемыми элементами;
- $b(x, \mu)$ – кусочно-линейная вектор-функция, определяемая равенством

$$b(x, \mu) = \begin{bmatrix} b_{11}(\mu)|x_1| + \dots + b_{1N}(\mu)|x_N| \\ \dots \\ b_{N1}(\mu)|x_1| + \dots + b_{NN}(\mu)|x_N| \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

в котором $b_{ij}(\mu)$ – непрерывно дифференцируемые функции;

- $\varphi(x, \mu)$ – непрерывная по совокупности переменных вектор-функция, удовлетворяющая по x условию Липшица и соотношению:

$$\varphi(x, \mu) = O(\|x\|^2) \text{ при } \|x\| \rightarrow 0 \quad (2.56)$$

равномерно по μ . В частности, $\varphi(x, \mu)$ также может содержать функции типа модуля. Уравнение (2.54) при всех значениях параметра μ имеет нулевое решение $x = 0$.

Наряду с (2.54) будем также рассматривать уравнение

$$x' = A(\mu)x + \varphi(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad (2.57)$$

с гладкой правой частью. Пусть при некотором $\mu = \mu_0$ матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет нулевое или чисто мнимое собственное значение. Тогда решение $x = 0$ является негиперболической точкой равновесия уравнения (2.57) при

$\mu = \mu_0$, а значение μ_0 – точкой бифуркации этого уравнения. При переходе параметра μ через значение μ_0 возможны различные сценарии локальных бифуркаций в окрестности точки $x = 0$. Наиболее типичными сценариями являются транскритическая бифуркация, бифуркация типа вилки и бифуркация Андронова-Хопфа. Первые два сценария связаны с ситуацией, когда матрица A_0 имеет нулевое собственное значение, а сценарий бифуркации Андронова-Хопфа – с ситуацией, когда A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i, \omega_0 > 0$. Исследованию указанных сценариев бифуркаций для гладких систем вида (2.57) посвящено огромное число работ (см. например [10], [22], [25], [40]-[43], [64]), в которых предложен ряд эффективных методов таких как метод нормальных форм, методы, основанные на теории центральных многообразий, и др.

Рассмотрим теперь задачу о локальных бифуркациях в окрестности точки равновесия $x = 0$ негладкого уравнения (2.54) в предположении, что матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет нулевое или чисто мнимое собственное значение. Рассмотрим эти случаи отдельно.

2.3.1 Случай нулевого собственного значения.

Пусть матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение 0. Для простоты ограничимся рассмотрением уравнения (2.54), в котором $N = 1$. В этом случае уравнение (2.54) является одномерным и имеет вид

$$x' = a(\mu)x + b(\mu)|x| + \varphi(x, \mu), \quad x \in R^1, \quad (2.58)$$

Предполагается, что при некотором $\mu = \mu_0$ выполнены равенства:

- 1) $a(\mu_0) = b(\mu_0) = 0$.

Тогда решение $x = 0$ является негиперболической точкой равновесия уравнения (2.58) при $\mu = \mu_0$, а значение μ_0 – точкой бифуркации этого уравнения.

Говорят, что в уравнении (2.58) имеет место транскритическая бифуркация, если это уравнение как при $\mu < \mu_0$, так и при $\mu > \mu_0$

имеет в точности одну непрерывную ветвь ненулевых решений $x = x^*(\mu)$ такую, что $x^*(\mu_0) = 0$. Говорят также, что в уравнении (2.58) имеет место бифуркация типа вилки, если это уравнение при $\mu < \mu_0$ (или при $\mu > \mu_0$) имеет в точности две непрерывные ветви ненулевых решений $x = x_1^*(\mu)$ и $x = x_2^*(\mu)$ такие, что $x_1^*(\mu_0) = x_2^*(\mu_0) = 0$, а при $\mu > \mu_0$ (или при $\mu < \mu_0$) не имеет непрерывных ветвей ненулевых решений $x = x^*(\mu)$ таких, что $x^*(\mu_0) = 0$.

Так как нелинейность $\varphi(x, \mu)$ начинается с квадратичных (по x) слагаемых, то для описания основных сценариев бифуркации в уравнении (2.58) можно ограничиться рассмотрением уравнений:

$$x' = a(\mu)x + b(\mu)|x| + x^2, \quad x \in R^N, \quad (2.59)$$

$$x' = a(\mu)x + b(\mu)|x| + x^3, \quad x \in R^N. \quad (2.60)$$

Теорема 2.7. Пусть $a'(\mu_0) \pm b'(\mu_0) \neq 0$ и $b'(\mu_0) \neq 0$. Тогда значение μ_0 параметра μ является точкой бифуркации типа вилки уравнения (2.59) и точкой транскритической бифуркации уравнения (2.60).

Доказательство этой теоремы проводится простым подсчетом.

Отметим, что для уравнений вида (2.59) и (2.60), не содержащих нелинейность типа модуля (т.е. слагаемое $b(\mu)|x|$) и в предположении, что $a'(\mu_0) \neq 0$, сценарии бифуркации в естественном смысле противоположны: для (2.59) имеет место транскритическая бифуркация, а для (2.60) – бифуркация типа вилки.

2.3.2 Бифуркация Андронова-Хопфа.

В теории нелинейных колебаний одной из наиболее интересных является задача о бифуркации Андронова-Хопфа – задача о возникновении нестационарных периодических колебаний малой амплитуды из сложного фокуса динамической системы [50]. Эта задача детально изучена для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с гладкой

(непрерывно дифференцируемой) правой частью. Существенно меньше известно результатов относительно ситуаций, когда правые части уравнений содержат негладкие слагаемые, например, типа модуля, хотя к таким уравнениям приводит большое число теоретических и практических задач (см., например, [53], [73]). Большинство известных методов существенно использует свойство гладкости и поэтому не могут непосредственно перенестись на уравнения с негладкими функциями.

В конце прошлого столетия в [86] М.А.Красносельский и В.С.Козьякин разработали топологический подход к исследованию задачи о бифуркации Андронова-Хопфа, основанный на методе функционализации параметра. Этот подход позволил получить наиболее общие достаточные признаки бифуркации, его развитие привело к появлению новых результатов в задаче о приближенном построении решений, в исследовании устойчивости и др. (см., например, [25], [40]-[43]). Однако, и эти результаты, были получены, как правило, в предположении гладкости дифференциальных уравнений. Вместе с тем, предложенный в [86] подход позволяет исследовать и задачи с негладкими нелинейностями.

Предположим, что матрица $A(\mu_0)$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$. Положим $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Пару (μ_0, T_0) называют (см., например, [50], [86]) точкой бифуркации Андронова-Хопфа для системы (2.54), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\mu = \mu_\varepsilon \in (\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon)$, при котором система (2.54) имеет ненулевое T_ε -периодическое решение $x_\varepsilon(t)$, где $T_\varepsilon \in (T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon)$ и $|x_\varepsilon(t)| < \varepsilon$, $-\infty < t < \infty$. Числа μ_ε и T_ε не определяются однозначно по ε , а решению $x_\varepsilon(t)$ отвечает некоторый цикл.

Из теории возмущений линейных операторов [35] следует, что матрица $A(\mu)$ имеет непрерывную ветвь собственных значений $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ такую, что $\alpha(\mu_0) = 0$ и $\omega(\mu_0) = \omega_0$.

Теорема 2.8. Пусть матрица $A(\mu_0)$ имеет простые собственные

значения $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых собственных значений. Пусть

$$\alpha'(\mu_0) \neq 0. \quad (2.61)$$

Пусть, наконец, при некоторых положительных числах b_0 и δ_0 выполнено соотношение:

$$\max_{i,j} |b_{ij}(\mu)| \leq b_0 |\mu - \mu_0|^2 \text{ при } |\mu - \mu_0| \leq \delta_0. \quad (2.62)$$

Тогда пара (μ_0, T_0) является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (2.54).

Отметим, что условие (2.62) означает, в частности, выполнение равенств $b_{ij}(\mu_0) = 0$.

Замечание 2.1. Условие (2.61) этой теоремы совпадает с классическим достаточным признаком бифуркации Андронова-Хопфа для уравнений с гладкой правой частью (см., например, [50]), т.е. для уравнения (2.54), в котором $b(x, \mu) \equiv 0$, а функция $\varphi(x, \mu)$ является гладкой.

Замечание 2.2. Утверждение теоремы 2.8 останется верным и в том случае, когда условие (2.62) заменить более слабым, например, требованием выполнения равенств $b_{ij}(\mu_0) = 0$ и неравенств вида: $|b'_{ij}(\mu_0)| < \gamma_0 |\alpha'(\mu_0)|$ при некотором $\gamma_0 > 0$.

Замечание 2.3. Предлагаемая в настоящем параграфе реализация топологического подхода из [86] фактически требует подчиненность (в естественном смысле) кусочно-линейного слагаемого $b(x, \mu)$ линейному слагаемому $A(\mu)x$ в правой части системы (2.54). Возможна реализация указанного подхода и для случая, когда эти слагаемые будут “равноправны”, однако соответствующий признак бифуркации и его доказательство будут существенно сложнее.

Доказательство теоремы 2.8.

Для простоты ограничимся приведением доказательства теоремы 2.8 для случая, когда $N = 2$. Общий случай может быть рассмотрен по той же схеме, однако требует более громоздких построений. Таким образом, вместо (2.54) будем рассматривать уравнение

$$x' = A(\mu)x + \varphi(x, \mu) + b(x, \mu), \quad x \in R^2, \quad (2.63)$$

в котором нелинейность (2.55) примет вид:

$$b(x, \mu) = \begin{bmatrix} b_{11}(\mu)|x_1| + b_{12}(\mu)|x_2| \\ b_{21}(\mu)|x_1| + b_{22}(\mu)|x_2| \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

2.3.3 Вспомогательное утверждение

Доказательство теоремы будет основано на развитии вышеупомянутого топологического подхода [86]. Нам понадобится вспомогательное утверждение, являющееся в определенном смысле обобщением основной леммы из указанной работы.

Пусть E – вещественное нормированное линейное пространство, $\dim E = 2$. Пусть $V(\nu) : E \rightarrow E$ – линейный оператор, гладко (непрерывно дифференцируемо) зависящий от двумерного параметра $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in R^2$. Предположим, что при некотором $\nu = \nu_0$ оператор $V(\nu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Пусть при этом собственное значение 1 имеет простую структуру в следующем смысле (см. [86]):

- при ν близких к ν_0 существуют две непрерывные ветви полупростых собственных значений $\mu_{\pm}(\nu) = \alpha(\nu) \pm i\beta(\nu)$ оператора $V(\nu)$ такие, что $\alpha(\nu_0) = 1$ и $\beta(\nu_0) = 0$;

- собственным значениям $\mu_{\pm}(\nu)$ отвечают непрерывные ветви собственных векторов $e(\nu) \pm ig(\nu)$ так, что $V(\nu)(e(\nu) \pm ig(\nu)) = \mu_{\pm}(\nu)(e(\nu) \pm ig(\nu))$.

Векторы $e = e(\nu_0)$ и $g = g(\nu_0)$ будут линейно независимыми собственными векторами оператора $V(\nu_0)$, отвечающими собственному значению 1.

Положим

$$\mu(\nu) = \alpha(\nu) + i\beta(\nu). \quad (2.65)$$

В [86] показано, что без ограничения общности можно считать, что векторы $e(\nu)$ и $g(\nu)$ не зависят от ν , т.е. $e(\nu) \equiv e, g(\nu) \equiv g$. Следовательно, выполнено равенство $V(\nu)(e + ig) = \mu(\nu)(e + ig)$. При этом можно считать, что $\|e\| = 1$.

Обозначим через

$$D(\rho) = \{\nu : \|\nu - \nu_0\| \leq \rho\}, \quad L(\rho) = \{\nu : \|\nu - \nu_0\| = \rho\}, \quad (2.66)$$

круг и окружность (в плоскости двумерного параметра ν) радиуса $\rho > 0$ с центром в точке ν_0 ; $L(\rho)$ является границей множества $D(\rho)$.

Положим

$$F(\nu) = 1 - \mu(\nu), \quad (2.67)$$

где $\mu(\nu)$ – функция (2.65). Учитывая, что ν является двумерным параметром $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in R^2$, то комплекснозначную функцию (2.67) можно рассматривать как двумерное векторное поле, заданное в окрестности точки $\nu_0 = (\nu_1^0, \nu_2^0)$ по формуле:

$$F \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha(\nu_1, \nu_2) \\ -\beta(\nu_1, \nu_2) \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Точка ν_0 является особой для этого поля: $F(\nu_0) = 0$. Так как оператор $V(\nu)$ гладко зависит от ν , то векторное поле (2.68) является непрерывно дифференцируемым, т.е. существует непрерывная производная (матрица Якоби) $F'(\nu)$.

Наряду с линейным оператором $V(\nu)$ будем рассматривать нелинейные операторы $v(\nu, x)$ и $w(\nu, x)$, определенные и непрерывные при $\|x\| \leq \rho_0$

и $\|\nu - \nu_0\| \leq \delta_0$, где ρ_0 и δ_0 – некоторые положительные числа. Пусть выполняются соотношения:

$$\max_{\nu} \|v(\nu, x)\| \leq c(\|x\|)\|x\|, \quad \|w(\nu, x)\| \leq c_1(\|\nu - \nu_0\|)\|x\|; \quad (2.69)$$

здесь $c(t)$ и $c_1(t)$ – невозрастающие непрерывные функций, определенные в промежутках $[0, \rho_0]$ и $[0, \delta_0]$ соответственно, при этом выполнены соотношения: $c(0) = c_1(0) = 0$ и $c_1(t) = O(t^2)$ при $t \rightarrow 0$.

Рассмотрим уравнение

$$x = V(\nu)x + v(\nu, x) + w(\nu, x). \quad (2.70)$$

Это уравнение имеет решение $x = 0$.

Лемма 2.13. Пусть

$$\det F'(\nu_0) \neq 0. \quad (2.71)$$

Тогда существуют последовательности $\nu_n \rightarrow \nu_0$ и $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$, такие что уравнение (2.70) при $\nu = \nu_n$ имеет решение $x = x_n$.

Аналогичное утверждение было доказано в [86] в предположении, что $w(\nu, x) \equiv 0$.

Доказательство леммы 2.13

Ниже без специальных ссылок будут использоваться некоторые понятия и факты из теории вращения векторных полей [38].

Отметим сначала, что в силу условия (2.71) вращение векторного поля (2.68) или, что то же самое, вращение векторного поля (2.67) не равно нулю на всех окружностях $L(\rho)$ малого радиуса $\rho > 0$:

$$\gamma(1 - \mu(\nu), L_\rho) = (-1)^\kappa, \quad (2.72)$$

где κ – сумма кратностей вещественных отрицательных собственных значений матрицы $F'(\nu_0)$, а $L(\rho)$ – окружность (2.66).

Для положительного числа q обозначим через

$$B(q) = \{x : \|x - qe\| \leq \frac{1}{4}q\}$$

круг (в двумерном пространстве E) радиуса $\frac{1}{4}q$ с центром в точке qe ; здесь e – собственный вектор оператора $V(\nu_0)$, отвечающий собственному значению 1.

Пусть даны некоторые числовые последовательности $r_n \rightarrow 0$ ($0 < r_n < \rho_0$) и $q_n \rightarrow 0$ ($q_n > 0$); дополнительные условия на эти последовательности будут указаны ниже. Положим $B_n = B(q_n)$ и $D_n = D(r_n)$. Так как B_n и D_n являются кругами (в соответствующих пространствах), то существует гомеоморфизм $\nu_n : B_n \rightarrow D_n$; в частности, этот гомеоморфизм отображает границу ∂B_n множества B_n на границу L_n множества D_n . Можно считать, что $\nu_n(q_n e) = \nu_0$.

Подставляя функцию $\nu_n = \nu_n(x)$ в уравнение (2.70) получим функционализированное уравнение

$$x = V(\nu_n(x))x + v(\nu_n(x), x) + w(\nu_n(x), x). \quad (2.73)$$

Определим для $t \in [0, 1]$ семейство вектор-функций

$$\Psi_n(t, x) = R_n(t, x) + T_n(t, x) + W_n(t, x), \quad (2.74)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_n(t, x) &= \{I - V(\nu_n(x))\}\{tq_n e + (1 - t)x\}, \\ T_n(t, x) &= -(1 - t)v(\nu_n(x), x), \\ W_n(t, x) &= -(1 - t)w(\nu_n(x), x). \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

Отметим, что уравнение $\Psi_n(0, x) = 0$ совпадает с уравнением (2.73), а уравнение $\Psi_n(1, x) = 0$ – с уравнением

$$x = V(\nu_n(x))q_n e,$$

одним из решений которого является вектор $x = q_n e$.

Оценим вектор-функции (2.75). Сначала заметим, что в силу условия (2.71) существует число $a_1 > 0$ такое, что при всех малых r_n выполняется неравенство:

$$\|R_n(t, x)\| \geq a_1 r_n q_n, \quad x \in \partial B_n, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.76)$$

В силу первого из условий (2.69) существует число $a_2 > 0$ такое, что оператор $T_n(t, x)$ удовлетворяет неравенству:

$$\|T_n(t, x)\| \leq a_2 q_n c\left(\frac{5}{4}q_n\right), \quad x \in \partial B_n, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.77)$$

Наконец, в силу второго из условий (2.69) существует число $a_3 > 0$ такое, что оператор $W_n(t, x)$ удовлетворяет неравенству:

$$\|W_n(t, x)\| \leq a_3 c_1(r_n) q_n, \quad x \in \partial B_n, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.78)$$

Теперь укажем дополнительные условия на числовые последовательности r_n и q_n . Сначала отметим, что так как функция $c_1(t)$ удовлетворяет соотношениям $c_1(0) = 0$ и $c_1(t) = O(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, то стремящаяся к нулю последовательность r_n , начиная с некоторого номера, удовлетворяет неравенству:

$$a_3 c_1(r_n) < \frac{1}{2} a_1 r_n. \quad (2.79)$$

Будем считать, что это неравенство выполнено для всех $n = 1, 2, \dots$

Последовательность q_n выберем теперь в соответствии с неравенствами:

$$a_2 c\left(\frac{5}{4}q_n\right) < \frac{1}{2} a_1 r_n; \quad (2.80)$$

это возможно, так как функция $c(t)$ является невозрастающей непрерывной функцией такой, что $c(0) = 0$.

Из (2.74)-(2.80) получим

$$\|\Psi_n(t, x)\| \geq \|R_n(t, x)\| - \|T_n(t, x)\| - \|W_n(t, x)\| > 0. \quad (2.81)$$

для $x \in \partial B_n$ и $t \in [0, 1]$. При выполнении соотношения (2.72) вращение векторного поля $R_n(t, x)$ на круге B_n при любом $t \in [0, 1]$ одинаково и равно (2.72). Тогда в силу теоремы Руше и из неравенства (2.81) следует, что вращение векторного поля (2.74) на B_n при любом $t \in [0, 1]$ также одинаково и равно числу (2.72) и, следовательно, является ненулевым. Отсюда и из теории вращения векторных полей следует, что поле (2.74) на B_n имеет особую точку x_n (очевидно, ненулевую).

Следовательно, у уравнения (2.73) имеется решение $x = x_n$. Полагая $\nu_n = \nu(x_n)$, получим, что уравнение (2.70) при $\nu = \nu_n$ имеет решение $x = x_n$.

Лемма 2.13 доказана.

Завершение доказательства теоремы 2.8

Воспользуемся тем фактом, что функция $x(t)$ тогда и только тогда будет T -периодическим решением системы (2.63), когда вектор $y = x(0) \in R^2$ будет решением операторного уравнения

$$y = V(T, \mu)y + v(y, T, \mu) + w(y, T, \mu), \quad x \in R^2; \quad (2.82)$$

здесь

$$V(T, \mu) = e^{TA(\mu)}, \quad (2.83)$$

$$v(y, T, \mu) = T \int_0^1 e^{(T-s)A(\mu)} \varphi(y(s), \mu) ds \quad (2.84)$$

$$w(y, T, \mu) = T \int_0^1 e^{(T-s)A(\mu)} b(y(s), \mu) ds \quad (2.85)$$

и $y(t)$ – удовлетворяющее условию $y(0) = y$ решение системы

$$y' = TA(\mu)y + T\varphi(y, \mu) + Tb(y, \mu), \quad y \in R^2.$$

Для доказательства теоремы 2.8 достаточно установить, что для уравнение (2.82) выполняются все условия леммы 2.13.

Положим $\nu = (T, \mu)$, $\nu_0 = (T_0, \mu_0)$, где $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Так как матрица матрица $A(\mu_0)$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, то оператор $V(T_0, \mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Выше было отмечено, что матрица $A(\mu)$ имеет непрерывную ветвь собственных значений $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ такую, что $\alpha(\mu_0) = 0$ и $\omega(\mu_0) = \omega_0$. Этой непрерывной ветви собственных значений соответствуют непрерывная ветвь собственных векторов $e(\mu) + ig(\mu)$. Тогда оператор

$V(T, \mu)$ при близких к (T_0, μ_0) значениях (T, μ) имеет непрерывные ветви простых собственных значений $\lambda_{\pm}(T, \mu) = e^{T\alpha(\mu)}[\cos(T\omega(\mu)) \pm i \sin(T\omega(\mu))]$, которым отвечают непрерывные ветви собственных векторов $e(\mu) \pm ig(\mu)$. Таким образом, оператор $V(T_0, \mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2 простой структуры.

Векторное поле (2.68) в данном случае имеет вид

$$F \begin{bmatrix} T \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{T\alpha(\mu)} \cos(T\omega(\mu)) \\ -e^{T\alpha(\mu)} \sin(T\omega(\mu)) \end{bmatrix}.$$

Условие (2.71) проверяется прямым подсчетом производной вектор-функции F ; невырожденность производной F' в точке $\nu_0 = (T_0, \mu_0)$ следует из условия (2.61). Таким образом, все условия леммы 2.13 для оператора (2.83) выполнены.

Остается убедиться в том, что для операторов (2.84) и (2.85) выполнены условия (2.69). В справедливости этого можно убедиться несложной проверкой, используя соотношения (2.56) и (2.62).

Теорема 2.8 доказана.

2.3.4 Пример: уравнение второго порядка.

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнения второго порядка

$$y'' + a(\mu)y' + b(\mu)|y'| + y + c(\mu)|y| + g(y, y', \mu) = 0, \quad (2.86)$$

где $a(\mu), b(\mu), c(\mu)$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям: $a(\mu_0) = b(\mu_0) = c(\mu_0) = 0$, а нелинейность $g(y_1, y_2, \mu)$ удовлетворяет соотношению: $g(y_1, y_2, \mu) = o(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})$ при $y_1^2 + y_2^2 \rightarrow 0$ равномерно по μ . Уравнение (2.86) стандартным способом сводится к системе вида (2.63).

Теорема 2.9. Пусть $a'(\mu_0) \neq 0$ и $b'(\mu_0) = 0$. Тогда значение μ_0 параметра μ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (2.86).

Аналогичные результаты могут быть получены при изучении задачи о бифуркации Андронова-Хопфа в системах автоматического управления, описываемых уравнением

$$L\left(\frac{d}{dt}, \mu\right)x = M\left(\frac{d}{dt}, \mu\right)f(x, \mu),$$

где $L(p, \mu)$ и $M(p, \mu)$ – операторные многочлены ($\deg M < \deg L$), а $f(x, \mu)$ – характеристика нелинейного звена, определяемая равенством $f(x, \mu) = c(\mu)|x| + o(x)$.

Глава 3

Приложения

3.1 Алгоритм и пакет программ

В нижеприведенном приложении даётся описание основных алгоритмов аналитического исследования рассматриваемых в диссертации фазовых портретов для динамических систем, математические модели которых содержат модульные и кусочно-линейные нелинейности. Эти алгоритмы разработаны на основе теоретических положений, полученных во второй главе диссертации. В частности, разработаны:

- алгоритм построения фазовых портретов в окрестностях состояний равновесия динамических систем, математические модели которых содержат модульные нелинейности. Приведена программная реализация этого алгоритма для некоторых моделей, в частности, для уравнений (2) и (3). Алгоритм предусматривает проверку выполнения основных требований, (например, условий, приведенных, в случае 1-6), аналитическое построение решений и их визуализацию.

- алгоритм исследования устойчивости решений динамических систем, математические модели которых содержат модульные нелинейности. Приведена программная реализация этого алгоритма для некоторых моделей, в частности, для уравнений (2) и (3). Алгоритм предусматривает проверку выполнения основных требований, (например, условий,

приведенных в случае 1-6), он реализован для различных классов нелинейностей.

Предложенные алгоритмы программно реализованы в среде MathCad. Разработан соответствующий пакет программ на Visual Basic, основные положения которого приводятся ниже.

Следующий этап: приведем алгоритм и соответствующий текст программы описание решения уравнений (2) и (3) с помощью численных [13] и аналитических решений.

3.1.1 Операторное описание алгоритма

a,b,c – коэффициенты уравнения.

l – основной параметр λ .

pi – число π .

N – число разбиений сетки.

t – время.

al – значение $\alpha = -\frac{a}{2}$.

Be – значение $\beta = \frac{\sqrt{a^2-4(b\pm c)}}{2}$.

C1 – значение C_1 , неизвестное в решении.

C2 – значение C_2 , неизвестное в решении.

Y0 – решения уравнения.

Y1 – производная от решения.

Mu1 – корни характеристическом уравнения $\mu_1 = -\frac{a-\sqrt{a^2-4(b\pm c)}}{2}$.

Mu2 – Корни характеристическом уравнения $\mu_1 = -\frac{a+\sqrt{a^2-4(b\pm c)}}{2}$.

Блок (подпрограммы – функции) описания входных функций

Sub Proc() – ФУНКЦИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМОЙ КООРДИНАТ

Private Sub Command1_Click() – СОБЫТИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СОБСТВЕННОЙ ПОЛУОСИ.

Private Sub Form_Activate() – СОБЫТИЯ (ФУНКЦИЯ) ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРВОНАЧАЛЬНОГО СЕКТОРНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ.

Private Sub HScroll1_Change() – СОБЫТИЯ (ФУНКЦИЯ) ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ И ЛИНИИ λ .

Private Sub HScroll1_Scroll() – СОБЫТИЯ (ФУНКЦИЯ) ДЛЯ СДВИГА ЗНАЧЕНИЙ И ЛИНИИ λ .

Private Sub HScroll2_Change() – СОБЫТИЯ (ФУНКЦИЯ) ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СЕКТОРНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ.

Private Sub Picture1_MouseDown(Button As Integer, Shift As Integer, X As Single, Y As Single) – СОБЫТИЯ (ФУНКЦИЯ) ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВ.

Private Sub Picture2_MouseDown(Button As Integer, Shift As Integer, X As Single, Y As Single) – СОБЫТИЯ ДЛЯ ВЫБОРА ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ.

Соответственно Блок-схема примет вид:



Рис. 3.1. Блок-Схема

Текст программы

```
Sub Proc()
Picture1.Cls
Picture1.Scale (-10, 10)-(10, -10)
Picture1.Line (-10, 0)-(10, 0)
Picture1.Line (0, -10)-(0, 10)
Picture1.PSet (9, 0)
Picture1.Print "y"
Picture1.PSet (0, 10)
Picture1.Print "y'"
End Sub

Private Sub Command1_Click()
Picture1.DrawWidth = 2
Picture1.Scale(-10, 10)-(10, -10)
Picture1.Line (-100, 0)-(100, 0)
Picture1.Line(0, -100)-(0, 100) x0 = 0.01 y0 = 0.01
a = Text3.Text
b =Text4.Text
mu1 = -0.5 * (a - Sqr(a ^ 2 - 4 * b)) mu2 = -0.5 *
(a + Sqr(a ^ 2 - 4 * b)) c1 = x0 c2 = y0 / mu1
For t = -10 To 10 Step 0.001
Picture1.PSet (t, mu1 * t)
Picture1.PSet (t, mu2 * t)
Next
End Sub

Private Sub Command2_Click()
End Sub

Private Sub Form_Activate()
Picture1.DrawWidth = 2
Picture2.DrawWidth = 2
a = 3
b = 3
c = 4
For i = 10 To -10 Step -1
Form1.PSet (0, (i + 10) * 350)
Print i
Next
```

```

Picture1.Scale (-10,
10)-(-10, -10)
Picture1.Line (-10, 0)-(-10, 0)
Picture1.Line (0,
-10)-(0, 10)
Picture2.Scale (-5, 5)-(-5, -5)
Picture2.Line (-10,0)-(-10, 0), vbWhite
Picture2.Line (0, -10)-(0, 10), vbWhite
Picture2.PSet (4.5, 0),vbWhite
Picture2.Print "a"
Picture2.PSet (-0.3, 5), vbWhite
Picture2.Print "b"
Picture1.PSet (9, 0)
Picture1.Print "y"
Picture1.PSet (0, 10)
Picture1.Print "y'"
Picture2.PSet (-0.3, c / 2), vbWhite
Picture2.Print "c"
Picture2.PSet (-0.4, -c / 2), vbWhite
Picture2.Print "-c"
Picture2.PSet (-0.4, -c / 2), vbWhite
Picture2.Print "-c"
Picture2.Line (-10, c / 2)-(-10, c / 2)
Picture2.Line (-10, -c / 2)-(-10, -c / 2)
Picture2.DrawWidth = 1
For i = 0.1 To 5 Step 0.1
Picture2.Line (-10, i + c / 2)-(-10, i + c / 2), vbMagenta
Next
Picture2.DrawWidth = 1
For i = -c / 2 To c / 2 Step 0.25
Picture2.Line (-10, -i)-(-10, -i), vbGreen
Next
For i = -10 To 0 Step 0.01
Picture2.Line (i, (i
* i) / 3 - c / 2)-(i, 11), RGB(0, 300, 0)
Next
For i = 0 To 5 Step 0.01
Picture2.Line (i, (i * i) / 3 - c / 2)-(i, 11), vbWhite

```

```

Next
For i = -10 To 0 Step 0.01
Picture2.Line (i, (i * i) / 3 + c / 2)-(i, 11), RGB(0, 200, 80)
Next
For i = 0 To 10 Step 0.01
Picture2.Line (i, (i * i) / 3 + c / 2)-(i, 11), RGB(255, 50, 50)
Next
End Sub
Private Sub HScroll11_Change()
Proc
Picture1.Line (HScroll11.Value / 10, -10)-(HScroll11.Value /
10, 10), RGB(123, 3, 123)
Picture1.PSet (HScroll11.Value / 10, 0)
Picture1.Print "l=";
HScroll11.Value / 10
Text5.Text = HScroll11.Value / 10
End Sub
Private Sub
HScroll11_Scroll()
Proc
Picture1.Line (HScroll11.Value / 10, -10)-(HScroll11.Value / 10,
10), RGB(123, 3, 123)
Picture1.PSet (HScroll11.Value / 10, 0)
Picture1.Print "l=";
HScroll11.Value / 10
Text5.Text = HScroll11.Value / 10
End Sub

Private Sub HScroll12_Change()
Picture2.Cls
Picture1.DrawWidth = 2
Picture2.DrawWidth = 2
a = HScroll12.Value / 10
Text6.Text = a
For i = 10 To -10 Step -1
Form1.PSet (0, (i + 10) * 350)
Print i
Next Picture1.Scale (-10, 10)-(10, -10)

```

```

Picture1.Line (-10, 0)-(10, 0)
Picture1.Line (0, -10)-(0, 10)
Picture2.Scale (-5, 5)-(5, -5)
Picture2.DrawWidth = 2
For i = -5 To 0 Step 0.01
Picture2.Line (i, i)-(-10, i), vbYellow
Picture2.Line (i, -i)-(-10, -i), vbYellow
Next i
For i = -5 To -0.03 Step 0.01
Picture2.Line (i, -i)-(i + a ^ 2 / 8, -(i + a ^ 2 / 8) + a ^ 2 / 4), vbGreen
Picture2.Line (i, i)-(i + a ^ 2 / 8, (i + a ^ 2 / 8) - a ^ 2 / 4), vbGreen
Next i
For i = -5 To a ^ 2 / 8 Step 0.01
Picture2.Line (i, -i + a ^ 2 / 4)-(a ^ 2 / 8 + 5, a ^ 2 / 8 + 5),
vbMagenta
Picture2.Line (i, i - a ^ 2 / 4)-(a ^ 2 / 8 + 5, -a ^ 2 / 8 - 5),
vbMagenta
Next i
For i = a ^ 2 / 8 To 10 Step 0.01
Picture2.Line (i, i)-(i + a ^ 2 / 8, (i + a ^ 2 / 8) - a ^ 2 / 4),
vbRed
Picture2.Line (i, -i)-(i + a ^ 2 / 8, -(i + a ^ 2 / 8) + a ^ 2 / 4), vbRed
Next i
For i = a ^ 2 / 4 To 6 Step 0.01
Picture2.Line (i, i - a ^ 2 / 4)-(10, i - a ^ 2 / 4), vbCyan
Picture2.Line (i, -i + a ^ 2 / 4)-(10, -i + a ^ 2 / 4), vbCyan
Next i
For i = -5 To 5 Step 0.008
Picture2.PSet (i, -i + a ^ 2 / 4)
Picture2.PSet (i, i - a ^ 2 / 4)
Next For i = -5 To 5 Step 0.008
Picture2.PSet (i, i)
Picture2.PSet (i, -i)
Next
Picture2.PSet (a ^ 2 / 4, 0), vbWhite
Picture2.Print a ^ 2 / 4
Picture2.Line (-10, 0)-(10, 0), vbWhite
Picture2.Line (0, -10)-(0, 10), vbWhite
Picture2.PSet (4.5, 0), vbWhite

```

```

Picture2.Print "b"
Picture2.PSet (0, 5), vbWhite
Picture2.Print
"c" Picture1.PSet (9, 0)
Picture1.Print "y"
Picture1.PSet (0, 10)
Picture1.Print "y'"
End Sub

Private Sub Picture1_MouseDown(Button As Integer, Shift As
Integer, X As Single, Y As Single)
Dim a, b As Double
Picture1.DrawWidth = 5
Text1.Text = X
Text2.Text = Y
Picture1.PSet (X, Y), vbRed
Picture1.DrawWidth = 2
a = HScroll2.Value / 10
b = Text3.Text
c = Text4.Text
l = HScroll1.Value / 10
x0 = X
y0 = Y
If x0 > l Then
2:
    If  $a^2 - 4 * (b + c) < 0$  Then
        a1 = -0.5 * a
        be =  $\text{Sqr}(4 * (b + c) - a * a) / 2$ 
        c1 =  $x0 - (c * l) / (b + c)$ 
        c2 =  $(y0 - a1 * c1) / be$ 
        t = 0
        Do While (Abs(Y1) < 15) And (t < 60)
            t = t + 0.001
            y0 =  $\text{Exp}(a1 * t) * (c1 * \text{Cos}(be * t) + c2 * \text{Sin}(be * t)) + (c * l) / (b + c)$ 
            If y0 < l Then
                x0 = l: y0 = Y1
            GoTo 1:
        End If
        Y1 =  $\text{Exp}(a1 * t) * (\text{Sin}(be * t) * (a1 * c2 - c1 * be) + \text{Cos}(be * t) *$ 

```

```

        (a1 * c1 + c2 * be))
    Picture1.PSet (y0, Y1), vbBlue
    Loop
Else
mu1 = (-a - Sqr(a * a - 4 * (b + c))) / 2
mu2 = (-a + Sqr(a * a - 4 * (b + c))) / 2
c1 = (mu2 * x0 - y0 - (mu2 * c * 1) / (b + c)) / (mu2 - mu1)
c2 = (mu1 * x0 - y0 - (mu1 * c * 1) / (b + c)) / (mu1 - mu2)
t = 0
    Do While (Abs(Y1) < 15) And (t < 20)
        t = t + 0.001
        y0 = c1 * Exp(mu1 * t) + c2 * Exp(mu2 * t) + (c * 1) / (b + c)
        If y0 < 1 Then
            x0 = 1: y0 = Y1
            GoTo 1:
        End If
        Y1 = mu1 * c1 * Exp(mu1 * t) + mu2 * c2 * Exp(mu2 * t)
        Picture1.PSet (y0, Y1), vbBlue
    Loop
End If
Else 1:
    If a ^ 2 - 4 * (b - c) < 0 Then
        a1 = -0.5 * a
        be = Sqr(4 * (b - c) - a * a) / 2
        c1 = x0 + (c * 1) / (b - c)
        c2 = (y0 - a1 * c1) / be
        t = 0
        Do While (Abs(Y1) < 15) And (t < 60)
            t = t + 0.001
            y0 = Exp(a1 * t) * (c1 * Cos(be * t) + c2 * Sin(be * t)) - (c * 1) / (b - c)
            If y0 > 1 Then
                x0 = 1: y0 = Y1
                GoTo 2:
            End If
            Y1 = Exp(a1 * t) * (Sin(be * t) * (a1 * c2 - c1 * be) + Cos(be * t) *
                (a1 * c1 + c2 * be))
            Picture1.PSet (y0, Y1), vbRed
        Loop

```

```

Else
mu1 = (-a - Sqr(a * a - 4 * (b - c))) / 2
mu2 = (-a + Sqr(a * a - 4 * (b - c))) / 2
c1 = (mu2 * x0 - y0 + (mu2 * c * l) / (b - c)) / (mu2 - mu1)
c2 = (mu1 * x0 - y0 + (mu1 * c * l) / (b - c)) / (mu1 - mu2)
t = 0
  Do While (Abs(Y1) < 15) And (t < 20)
    t = t + 0.001
    y0 = c1 * Exp(mu1 * t) + c2 * Exp(mu2 * t) - (c * l) / (b - c)
    If y0 > 1 Then
      x0 = 1: y0 = Y1
      GoTo 2:
    End If
    Y1 = mu1 * c1 * Exp(mu1 * t) + mu2 * c2 * Exp(mu2 * t)
    Picture1.PSet (y0, Y1), vbRed
  Loop
End If
End If
End Sub

Private Sub Picture2_MouseDown(Button As Integer, Shift As
Integer, X As Single, Y As Single)
Picture1.Cls
Picture1.DrawWidth = 2
Picture1.Scale (-10, 10)-(-10, -10)
Picture1.Line (-10, 0)-(-10, 0)
Picture1.Line (0, -10)-(0, 10)
Picture1.PSet (9, 0)
Picture1.Print "y"
Picture1.PSet (0, 10)
Picture1.Print "y'"
Picture1.Line (Text5.Text, -10)-(Text5.Text,10), vbBlue
Picture1.PSet (HScroll1.Value / 10, 0)
Picture1.Print "l=";
HScroll1.Value / 10 Text3.Text = Round(X, 2)
Text4.Text = Round(Y, 2)
Picture2.DrawWidth = 4
Picture2.PSet (X, Y), vbWhite
End Sub

```

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

- Для дифференциального уравнения (2) дана классификация и анализ фазовых портретов и проведен анализ устойчивости состояний равновесия.
- Получены признаки существования предельного цикла для уравнения вида (3).
- Исследованы основные сценарии бифуркаций, в том числе, получен новый признак бифуркации Андронова - Хопфа для дифференциальных уравнений, содержащих негладкие нелинейности.
- Разработаны алгоритмы и пакеты программ построения фазовых портретов квазилинейных уравнений.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с исследованием дифференциального уравнения с кусочно-линейными правыми частями более высокого порядка и получением условий существования периодических, почти-периодических и ограниченных решений и их устойчивости.

Литература

- [1] *Айзерман М.А.* Лекции по теории автоматического регулирования. – М.: Физматгиз, 1958. – 520 с.
- [2] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Прикладная математика и механика. – 1957. – Т. 21. – Вып. 5. – С. 658-669.
- [3] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* // Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.
- [4] *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* // Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
- [5] *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука. 1966, – 568 с.
- [6] *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Доклады АН СССР, 1937, т. 14, № 15. С. 247-250.
- [7] *Аносов Д. В.* Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем – М.: МЦНМО. 2008, – 200 с.

- [8] *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва-Ижевск: Редакция журнала “Регулярная и хаотическая динамика”. 2000. – 400 с.
- [9] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука. 1990, – 312 с.
- [10] *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений. – М.: Наука. 1978, – 304 с.
- [11] *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Ижевск: Редакция журнала “Регулярная и хаотическая динамика 2000. – 368 с.
- [12] *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т.5. Динамические системы V. – М.: ВИНТИ, 1986.– С. 5-218.
- [13] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 632 с.
- [14] *Байзаев С., Воситова Д.А.* О решениях одной системы уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными // Уфимский математический журнал. – 2013. Т. 5. – № 2. – С. 12-17
- [15] *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976. – 490 с.
- [16] *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1954. – 216 с.
- [17] *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Успехи математических наук. – 1941. – №9. – С. 191 - 211.

- [18] *Бобровски Д.* Введения в теорию динамических систем с дискретным временем. – Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований. – 2006. – 360 с.
- [19] *Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.* Геометрические методы в вариационных задачах. – М.: Магистр, 1998. – 660 с.
- [20] *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика . – М.: Дрофа, 2004. – 513 с.
- [21] *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фурфеев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний.– М.: Наука. 1987, – 382 с.
- [22] *Ван Д., Ли Ш., Чоу Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. – М.: МЦНМО, 2005. – 416 с.
- [23] *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М: Наука, 1969. – 527 с.
- [24] *Вул Е.Б., Синай Я. Г., Ханнин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм //УМН. – 1984. – №39. – С. 3-37.
- [25] *Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г.* Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах // Уфимский математический журнал. – 2010. – №4. – С. 3-26.
- [26] *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск:Институт компьютерных исследований. 2002. - 560 с.
- [27] *Гулд Х., Тобочник Я.* Компьютерное моделирование в физике. - –М.: Мир, 1990. – 350 с.
- [28] *Дайсон Ф.,Монтролл Э., Кац М., Фишер М.* Устойчивость и фазовые переходы. – М.: Мир, 1973. – 189 с.

- [29] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
- [30] *Егоров К.В.* Основы теории автоматического регулирования. – М.: Энергия, 1967. – 648 с.
- [31] *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Институт компьютерных исследований. 2011. - 304 с.
- [32] *Иванов А.П.* Исследование разрывных бифуркаций в негладких динамических системах. Нелинейная динам., 2012, Т8, №2, с. 231–247.
- [33] *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 304 с.
- [34] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1975. – 740 с.
- [35] *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем. – М.: МЦНМО, 2005. – 454 с.
- [36] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Иностранной литературы, 1958. – 475 с.
- [37] *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траектории дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
- [38] *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
- [39] *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
- [40] *Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г., Шарафутдинов И.В.* Алгоритм исследования устойчивости периодических колебаний в задаче о

- бифуркации Андронова-Хопфа. // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №12. – С. 47-52.
- [41] Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г. Функционализация параметра и асимптотика циклов в бифуркации Хопфа. // Автоматика и телемеханика. –1996. – №11. – С. 22-28.
- [42] Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г. Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа. // Автоматика и телемеханика. – 1996. – №12. – С. 24-30.
- [43] Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г. Условия устойчивости циклов при бифуркации Хопфа в бесконечности. // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №1. – С. 56-62.
- [44] *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
- [45] *Локшин А.А., Лопатников С.А., Саакин А.С.* Метод сжатых отображений в симметричной проблеме собственных значений. – М.: МГУ, 1995. - 143 с.
- [46] *Ляпунов А.М.* Общие задача об устойчивости движения. – М.– Л.: ГИТТЛ, 1950. – 472 с.
- [47] *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 336 с.
- [48] *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Едиториад, УРСС, 2004. – 432 с.
- [49] *Марри Д.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. - - М.: Мир, 1983. – 397 с.
- [50] *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 362 с.

- [51] *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. – СПб.: Питер, 2005. – 336 с.
- [52] *Мухамадиев Э.М.* О вычислении индекса особой точки конечномерного вектора поля. Доклады АН Тадж. ССр. –1967. – №10. – С. 6-9.
- [53] *Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш.* Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка.- Уфимский математический журнал. – 2013. – №4. – С. 74-84.
- [54] *Мухамадиев Э.М., Гришанина Г.Э.* Об устойчивости в целом квазилинейных систем // Доклады Академии наук Республики Таджикистан.– 2013. – Т. 56. –№6. – С. 430-436.
- [55] *Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н.* Об ограниченных решениях одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. – 2011. – №9. – С. 121–134.
- [56] *Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н.* Об ограниченных решениях нелинейного уравнения шрёдингера на полуоси // Дифференциальные уравнения. – 2011. –Т. 47. –№1. – С. 38-49.
- [57] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
- [58] *Нуров И.Д., Юмагулов М.Г.* Приближенное исследование малых периодических колебаний систем автоматического регулирования.// Автоматика и телемеханика. –1993. –№3. – С. 101-108.
- [59] *Нуров И.Д., Юмагулов М.Г.* Импульсно-частотные характеристики в бифуркационных задачах. // Автоматика и телемеханика. –2002. –№5. – С. 34-40.

- [60] *Нуров И.Д., Халилова М.Ш.* Исследования устойчивости состояния равновесия негладких динамических систем // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2011/ –Т. 54. – №10. – С. 815-820.
- [61] *Обуховский В.В., Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. – М.: КомКнига, 2005. – 265 с.
- [62] *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник. – М.: МГУ, 1984. – 296 с.
- [63] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 334 с.
- [64] *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.– Л.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.
- [65] *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
- [66] *Сабиров Т.С.* К вопросу об устойчивости малых периодических решений // Доклады Академии наук СССР. – 1966. –Т. 167. – С. 755 - 757.
- [67] *Синай Я.Г.* Теория фазовых переходов. – М.:Наука, 1980. – 207 с.
- [68] *Тарасевич Ю.Ю.* Математическое и компьютерное моделирование. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.
- [69] *Томпсон Дж.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
- [70] *Трубников Ю.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 150 с.

- [71] *Филипов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: ЛКИ, 2008. – 240 с.
- [72] *Филипов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 240 с.
- [73] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной частью. – М-Наука, 1985. – 255 с.
- [74] *Фоменко И.В., Юмагулов М.Г.* Бифуркационные значения параметров в задаче о периодических решениях дифференциальных уравнений без единственности. // ДАН Тадж. ССР. – 1988. – №10. – С. 637-640.
- [75] *Финогенко И.А.* О непрерывных аппроксимациях и правосторонних решениях дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. – 41. – №5. – С. 647-655.
- [76] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
- [77] *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. – М.: Наука, 1965. – 176 с.
- [78] *Юдович В.И.* Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. // ДАН СССР. – 1970. – Т 195. – №2. – С. 292-295.
- [79] *Юмагулов М.Г.* Введение в теории динамических систем. – СПб.: Лань, 2014. – 272 с.
- [80] *Юмагулов М.Г.* Траектории автономных систем в окрестности бесконечно удаленной точки. // Доклады АН Таджикской ССР. – 1982. – Т. 24. – №11. – С. 648-651.
- [81] *Цыткин Я.З.* Релейные автоматические системы. – М.: Наука, 1974. – 576 с.

- [82] Юмагулов М.Г., Нуров И.Д., Шарафуддинов И.В. Алгоритмы исследования периодических решений в задаче о бифуркации Андронова - Хопфа. Труды Второй Всероссийской научной конференции "Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB". Москва: Институт проблем управления РАН.– 2004. – С. 578 - 583.
- [83] Davydov A.A. Qualitative Theory of Control Systems // Transl. Math. Monogr. – Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1994.
- [84] di Bernardo M., Budd C., Champneys A.R., Kowalezyk P. Piece – wise smooth dynamical system // Appl. Math. Sci.. – Vol. 103. –London:.. Springer. – 2008. – Pp. 183.
- [85] di Bernardo M., Budd C., Champneys A.R., Kowalezyk P., Nordmark A.B., Olivar Tost G., Piirionen P.T. Bifurcations in nonsmooth dynamical system // SIAM Rev. – 2008. – Vol. 50. – Pp. 629 – 671.
- [86] Kozjakin V. S., Krasnosel'skii M. A. The method of parameter functionalization in the Hopf bifurcation problem // Nonlinear Analysis, Theory. Methods and Application. – 1987. – Vol. 11. –№ 2. – Pp. 149-161.
- [87] Leine R.I., Van Campen D.H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems// European Journal of Mechanigs A/Solids. – 5(2006). – Pp. 595-616.
- [88] Plyashenko Yu. S. , Yakovenko S. Lectures on Analytic Differential Equations // Graduate Studies in Mathematics. Amer. Math. Soc., Providence, RI. – Vol. 86. – 2007.
- [89] Maezava S. Superharmonic resonance in piecewise linear system with unsymmetrical characteristics // Труды V международной конференции по нелинейным колебаниям. – Киев 25 августа - 4 сентября 1969 г. – Т. 1. – С. 401-422.

- [90] *Nurov I., Yumagulov M.* - Italian Journal of Pure and Applied Mathematics. –2003. –№13. – Pp.71-81 (in Italian).
- [91] *Fisher M.E. Phase. Transitions and critical phenemena* //Contemporary Physics Triesbe Symposiym. – 1969. – Vol. 1. – P. 19.
- [92] *Yu Shu- Xiang* Bifurcation of bounded solutions of ordinary differential equations depending on a parameter// Rocky Mount. Y. math. – 2004. – Pp. 1191-1196.

Публикации автора в изданиях, рекомендованных ВАК

- [93] Нуров И.Д., Халилова М.Ш., Арабов М.К. Метод Рунге - Кутта в задаче исследования бифуркации негладких динамических систем //Доклады АН РТ. – 2012. – Т. 55. – №12. – С. 960-964.
- [94] Арабов М.К., Гулов А.М., Нуров И.Д. Компьютерная визуализация поведения решений негладкой динамической системы //Доклады АН РТ. – 2014. – Т. 57. – №9-10. – С. 739-745.
- [95] Арабов М.К. Анализ устойчивости особой точки квазилинейного уравнения второго порядка // Известия Академии наук РТ, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2015. – №1 (158). – С. 42-49.
- [96] Арабов М.К. Анализ локальных бифуркаций динамических систем, содержащих негладкие нелинейности //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2015. – №1-4 (168). – С. 45-48.

Публикации автора в других изданиях

- [97] Арабов М.К., Нуров И.Д., Каримова М.Х. Компьютерный метод нахождения предельного цикла и его единственность

- в динамической системе второго порядка // Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел: материалы Международной научной конференции посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Сабирова Темура Сафаровича (Душанбе, 29 - 30 октября 2015 г.). – Душанбе – 2015. – С. 79-80.
- [98] Арабов М.К., Нурув И.Д., Собиров Х.И. Секторное разделение и классификации особых точек квазилинейного уравнения второго порядка // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сборник тезисов международной научной конференции (Уфа, 1-3 октября 2015). – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2015 г. – С. 10-13.
- [99] Нурув И.Д., Арабов М.К. Исследования локальных бифуркаций динамических систем, с негладкими нелинейностями // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений: материалы Международной научной конференции посвященной 80-летию члена-корреспондента АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.). – Душанбе – 2015. – С. 79-80.
- [100] Мухамадиев Э.М., Нурув И.Д., Арабов М.К., Гулов А.М. Компьютерная визуализация и секторный анализ фазовых портретов негладких динамических систем // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сборник тезисов международной научной конференции (Уфа, 24 - 26 сентября 2014). – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2014. – С. 61-63.
- [101] Мухамадиев Э.М., Нурув И.Д., Арабов М.К., Гулов А.М. О существовании предельных циклов нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сборник тезисов международной научной

конференции (Уфа, 24 - 26 сентября 2014). – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2014. – С. 59-60.

- [102] Гулов А.М., Арабов М.К., Давлатов И. Анализ устойчивости фазовых портретов негладкой двумерной системы //Материалы Республиканской научно-теоретической конференции "Актуальные проблемы современной математики и её преподавания": посвящается памяти профессора Муртазоева Д.М. (Душанбе, 20 декабря 2014 г.). – Душанбе – 2014. – С. 22-23.
- [103] Гулов А.М., Арабов М.К., Кобилзода М. Об одном алгоритме секторного анализа негладких двумерных систем //Современные проблемы прикладной математики и информатики: материалы Республиканской конференции посвящённой 70-летию профессора Боймурод Алиев. –Душанбе – 2014. – С. 36-38.
- [104] Арабов М.К., Нуров И.Д., Ахмедова З.М. Фазовые переходы бифуркационных явлений в негладких динамических системах //Проблемы гидромеханики и развитие гидроэнергетики, мелиорации и экологии в Центральной Азии: материалы Международного научно-практического семинара, посвящённого 75-летию Заслуженного деятеля наук и техники Таджикистана, доктора технических наук, профессора Саттарова Малика Абдусатторовича (Душанбе, 15-16 марта 2013 г.). –Душанбе – 2013. – С. 108-111.
- [105] Арабов М.К., Нуров И.Д. Моделирование особых точек трёхмерной динамической системы //Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел: материалы Международной научной конференции посвящённой 85-летию со дня рождения профессора Гафура Бабаевича Бабаева (Душанбе, 25-26 октября 2013 г.). –Душанбе – 2013. – С. 9-10.

- [106] Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш., Арабов М.К. Фазовые портреты бифуркационных явлений в негладких динамических системах //Современные проблемы теории дифференциальных уравнений и математического анализа: материалы Международной научной конференции посвящённой 80-летию академика АН Республики Таджикистан Джураева Абдухамида Джураевича (Душанбе, 07-08 декабря 2012 г.). – Душанбе – 2012. – С. 58-60.