

“ У Т В Е Р Ж Д А Ю ”

Проректор по научной работе

Башкирского государственного
университета

профессор В.П.Захаров



Захаров

кабинет

2016 г.

О Т З Ы В

ведущей организации на работу *Арабова Муллошарафа Курбоновича* “Исследование периодических колебаний и анализ устойчивости решений дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-линейными правыми частями”, представленную в качестве диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Многие теоретические и практические задачи приводят к необходимости исследования дифференциальных уравнений с негладкими или разрывными правыми частями. Систематическое построение соответствующей теории восходит к работам Айзермана М.А., Борисовича Ю.Г., Гантмахера Ф.Р., Красносельского М.А., Курцвейля Я., Мышкиса А.Д., Неймарка Ю.И., Филишова А.Ф., Цыпкина Я.З. и др. Разработан ряд эффективных методов исследования таких уравнений, изучены многие присущие им теоретические аспекты, рассмотрены различные приложения. В то же время многие представляющие теоретический и практический интерес задачи остаются малоизученными. Дальнейшее исследование дифференциальных уравнений с негладкими и разрывными правыми частями важно как с теоретической, так и практической точек зрения.

Диссертационная работа *Арабова М.К.* посвящена исследованию периодических задач и анализу устойчивости решений некоторых классов дифференциальных уравнений с кусочно-линейными правыми частями. Основными объектами исследования являются автономные дифференциальные уравнения вида

$$x' = Ax + \varphi(x), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

где A – постоянная матрица, а вектор-функция $\varphi(x)$ содержит кусочно-линейные слагаемые. В большей части работы – это уравнения на плоскости, т.е. $n = 2$, а вектор-функция $\varphi(x)$ содержит нелинейности типа модуля.

Первая глава диссертации носит вспомогательный характер, в ней приводятся необходимые общие сведения из теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории нелинейных колебаний и др.

Основные результаты диссертации приводятся во второй и третьей главах. Во второй главе рассматриваются дифференциальные уравнения второго порядка вида:

$$y'' + ay' + by = c|y - \lambda|, \quad (2)$$

$$y'' + ay' + by = c|y' - \varphi(y, y')|, \quad (3)$$

$$y'' + ay' + by = b_1|y| + b_2|y'| + \varphi(y, y'), \quad (4)$$

а также системы уравнений вида:

$$x' = A(\mu)x + b(x, \mu) + \varphi(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad (5)$$

правая часть которого зависит от скалярного параметра μ , а $b(x, \mu)$ – кусочно-линейная вектор-функция.

Для уравнения (2) дается классификация фазовых портретов, проводится анализ устойчивости точек равновесия. Теорема 2.1 содержит результаты относительно исследования вопросов об особых точках уравнения (2) в зависимости от параметра λ . Теорема 2.2 определяет условия устойчивости в целом этих особых точек. Доказательства этих утверждений потребовало решения ряда нетривиальных задач, сформулированных в виде вспомогательных утверждений.

Важными результатами второй главы является исследование вопросов об условиях, при которых уравнения (3) и (4) имеют нестационарные периодические решения, в частности, имеют предельные циклы. Здесь основные результаты содержатся в теоремах 2.3-2.6. В них приводятся условия ограниченности решений уравнений (3) и (4), проводится анализ устойчивости точек равновесия, указываются условия, при которых эти уравнения имеют единственный предельный цикл.

Третью группу результатов из второй главы составляют результаты исследования некоторых задач о локальных бифуркациях в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (5). В теореме 2.7 приводятся достаточные условия транскритической бифуркации и бифуркации типа вилки. В теореме 2.8 приводятся достаточные условия бифуркации Андронова-Хопфа. Все эти результаты являются новыми. Их получение также потребовало от автора решения ряда нетривиальных задач, в том числе развития известного в нелинейном анализе метода функционализации параметра на решение ряда негладких задач.

Третья глава носит характер приложений. В ней приводятся алгоритмы построения фазовых портретов динамических систем, математические модели которых содержат модульные и кусочно-линейные нелинейности. Эти алгоритмы разработаны на основе теоретическихложе-

ний, полученных во второй главе диссертации. Приведены программные реализации алгоритмов для некоторых моделей, в частности, для уравнений (2) и (3). Алгоритм предусматривает проверку основных условий, численное построение решений и их визуализацию. Приводятся также алгоритм исследования устойчивости и ограниченности решений, а также выявления и построения предельного цикла. Приведен ряд иллюстративных примеров.

Предлагаемые в работе Арабова М.К. качественные и приближенные методы позволяют провести детальное исследование ряда важных с теоретической и практической точек зрения вопросов для дифференциальных уравнений с кусочно-линейными правыми частями. В ней дана полная классификация фазовых портретов таких уравнений, проведено исследование основных свойств точек равновесия, указаны условия существования и единственности предельных циклов, проведен анализ устойчивости решений, исследованы некоторые вопросы о локальных бифуркациях.

Диссертационная работа Арабова М.К. в целом является завершенным научным исследованием, выполненным на актуальную тему. Основной ее научный результат – классификация фазовых портретов некоторых классов дифференциальных уравнений с кусочно-линейными правыми частями, получение достаточных условий существования и единственности предельных циклов, проведение анализа основных сценариев локальных бифуркаций – является новым и будет полезным при изучении многих задач теории дифференциальных уравнений с негладкими нелинейностями, теории динамических систем, теории нелинейных колебаний и их приложений, при исследовании качественных перестроек динамических моделей. Предложенные в работе алгоритмы и программы построения фазовых портретов в окрестностях особых точек динамических систем с нелинейностями типа модуля будут полезными для специалистов в указанных областях математики и приложениях.

Результаты диссертации целесообразно использовать и продолжить в Московском, Башкирском, Воронежском, Вологодском, Нижегородском, Ярославском госуниверситетах, в Таджикском национальном университете, в Институте математики им. А.Д.Джураева АН РТ и других организациях, в которых разрабатываются методы исследования дифференциальных уравнений с негладкими нелинейностями.

Научные положения и выводы диссертации обоснованы, постановки и формулировки задач приведены четко, доказательства отвечают требованиям математической строгости и выполнены на должном математическом уровне. Диссертация Арабова М.К. оформлена и написана достаточно хорошо, к изложению особых замечаний нет. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Работа демонстрирует достаточно высокий уровень математической культуры автора: свободное владение методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений, методами современной теории динамических систем, теории нелинейных колебаний, функционального анализа и др.

Результаты диссертации опубликованы в 14 работах соискателя, из которых 4 работы – в периодических научных журналах из перечня ВАК РФ. Отметим также, что основные результаты диссертации Арабова М.К. были обсуждены во время его выступления в октябре 2015 г. на семинаре кафедр математического анализа и дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета.

Имеются следующие замечания:

1. Первая глава диссертации, имеющая вспомогательный характер, излишне раздута. Материал, приведенный в ней, можно было бы смело сократить в 3-4 раза без ущерба для диссертации. В частности, это касается приведенных сведений из теории динамических систем, из теории устойчивости и, в особенности, о фазовых портретах линейных уравнений второго порядка.

2. Вторая глава диссертации носит не вполне соответствующее содержанию название "Анализ устойчивости решений кусочно-линейных динамических систем". На самом деле, в этой главе рассматривается существенно более широкий круг вопросов: наряду с вопросами устойчивости, это классификация особых точек, признаки существования предельных циклов, исследование бифуркаций и др.

3. В диссертации не в полной мере аргументирован выбор в качестве основных объектов исследования уравнений вида (2), (3) и (4) (см. Введение). Ссылки на то, что уравнения такого типа где-то и кем-то изучались, не достаточны. Желательно было бы объяснить, чем такие уравнения интересны: с теоретической или практической точки зрения.

4. В диссертации и автореферате имеются опечатки и погрешности редакционного характера.

Приведенные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации. Диссертационная работа Арабова М.К. обсуждена на совместном заседании кафедры математического анализа и кафедры дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета (протокол № 5 от 8 ноября 2016 г.). Работа Арабова М.К. удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Автор диссертации – Арабов Муллошараф Курбонович – заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Зав. кафедрой математического анализа
Башкирского государственного университета
д.ф.-м.н., профессор

Ишкин Х.К.

Профессор кафедры дифференциальных уравнений
Башкирского государственного университета
д.ф.-м.н., профессор

Жибер А.В.



на мою подпись
Ишкин Х.К., Жибера А.В.
Заведующий отдела кадров Башкирского государственного университета
И.А. Койга
«11» ноября 2016 г.