На правах рукописи

Чоршанбиева Майрам Чоршанбиевна

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЧЁТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 7

Работа выполнена в Таджикском национальном университете

НАУЧНЫЕ РУКОВОДИТЕЛИ: доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор
Илолов Мамадшо

кандидат физико-математических наук
Джангибеков Гулходжа

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Пасенчук Александр Эдуардович**
доктор физико-математических наук, Южный федеральный университет, профессор кафедры алгебры и дискретной математики;

Тухлиев Камаридин
кандидат физико-математических наук, доцент, Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова, заведующий кафедрой алгебры и вычислительной математики

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Таджикский государственный университет коммерции

Защита состоится *17 марта 2017 г.* в *12^{00}* часов на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул.Айни, 299/4. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан "___" ____________ 2017 г.

Учёный секретарь диссертационного совета **Хайруллоев Ш.А.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена двумерным сингулярным интегральным уравнениям по ограниченной области, которые рассматриваются в лебеговых пространствах функций.

Основным объектом исследования является действующий в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ оператор

$$(S_m f)(z) = \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \tag{1}$$

где D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой, $m \neq 0$ - целое число.

Интегральные уравнения, содержащие операторы S_m, S_{-m} и их различные комбинации, при $m = 1$ встречаются во многих задачах теории обобщённых аналитических функций И.Н.Векуа[1], теории квазиконформных отображений Л.Альфорса[2], М.Шиффера[3], теории дифференциальных уравнений с частными производными Б.Боярского[4], А.Д.Джураева[5], В.Н.Монахова[6] и другие. Впервые такие уравнения рассматривал И.Н.Векуа[1] методом сжимающих отображений. А.Д.Джураев[5] исследовал двумерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах $L_p(D), 2 < p < \infty$, при помощи редукции к краевым задачам для обобщёных аналитических функций. И.И.Комяк[7] применил при изучении двумерных уравнений в пространствах $L^p(D), 1 < p < \infty$ методы теории банаховых алгебр.

Разработанная Р.В.Дудучавой[8] L_p - теория, $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих

[1]Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[2]Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир. 1969.

[3]Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении // В кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. 1962, с. 193-218.

[4]Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций // Дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: 1960.

[5]Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1987, 415 с.

[6]Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука. 1977, 424 с.

[7]Комяк И. И Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

[8]Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I, II // J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 41-76, 199- 214.

операторы S_m, S_{-m} и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты.

Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Г.Джангибекова[9] [10] [11], К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова[12]. При этом указанные сингулярные интегральные операторы, как правило, имели характеристики одинакового порядка.

Цель работы

1. Получить в лебеговых пространствах с весом эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчёта индекса некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с чётной характеристикой по ограниченной области.

2. Построить нётерову теорию некоторых классов систем интегральных уравнений, содержащих двумерные сингулярные операторы и операторы Бергмана.

Метод исследования. При обосновании полученных в диссертации результатов используются методы комплексного анализа, методы функционального анализа, включая теорию банаховых алгебр, метод факторизации операторов.

Научная новизна исследований

1. Для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с чётной характеристикой разного порядка по ограниченной области в лебеговом пространстве с весом получены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчёта индекса.

2. Построена нётерова теория некоторых классов систем интегральных уравнений, содержащих двумерные сингулярные операторы по ограниченной области и операторы Бергмана.

---

[9]Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91-93.

[10]Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Изв. ВУЗов. матем. 1992, №9, с. 25-37.

[11]Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // Докл. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.

[12]Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, .т.43, вып.8, с. 171-172.

Практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть применены при исследовании различных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на Международной научной конференции, посвященной 80-летию академика АН РТ А. Д. Джураева (Душанбе, 07-08 декабря 2012г.), на Международной научной конференции, посвященной 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июля 2013г.), на Международной научной конференции, посвященной 20-летию Конституции РТ (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), а также на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-8]. В совместных работах [1-4] научному руководителю Г. Джангибекову и М. Илолову принадлежат постановка задач и выбор метода доказательства.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести разделов, списка литературы из 74 наименования и занимает 94 страниц машинописного текста, набранного на LaTeXe. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером раздела, второй указывает на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

Содержание диссертации

Работа состоит из **шести разделов**. **Раздел 1** носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В **разделах 2-4** в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

$(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ рассматривается следующее интегральное уравнение

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(\overline{S}_n f)(z) + d(z)(\overline{S}_m \overline{f})(z) = g(z), \quad (2)$$

где D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой, $m > n \neq 0$ - целые числа, $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции, S_m - двумерный сингулярный интегральный оператор из (1).

Ранее исследованию уравнения (2) был посвящен ряд работ различных авторов. Так, ещё в 1959 г. И.Н.Векуа в известной монографии[1] в связи с применением к теории обобщённых аналитических функций рассмотрел оператор

$$A_1 = a(z)I + d(z)SK, \tag{3}$$

(т.е. когда $b = c \equiv 0, m = -1$) при условии $|a(z)| > |d(z)|, z \in \overline{D}$ и на основе принципа сжатых отображений показал, что оператор A_1 из (3) имеет ограниченный обратный оператор в $L^p(D)$ при p, достаточно близких к двум.

Далее в 1971 г. А.Джураев[13] в предположении $a(z), d(z) \in C^1(D) \cap C_\alpha(\overline{D}), z \in \overline{D}$ показал, что условия $|a(z)| \neq |d(z)|, z \in \overline{D}; a(t) \neq 0, t \in \Gamma$ достаточны для нётеровости оператора A_1 в $L^p(D), 2 < p < \infty$ и что индекс оператора A_1 равен

$$\varkappa = -2ind_\Gamma a(t).$$

В случае, когда D - круговая область, а коэффициенты $a(z), d(z)$ лишь непрерывны, И.И.Комяк[14] показал, что указанные выше условия необходимы и достаточны для нётеровости оператора A_1 в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$.

Случай $n = -m = 1$ изучен в работе К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова[12], где получены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D), 1 < p < \infty$ и найдена формула для вычисления индекса. Результаты для уравнения (2) при $n = -m > 1$ содержатся в работе Г.Джангибекова[15].

В **разделе 2** настоящей работы изучается трёхкомпонентное интегральное уравнение (2) в случае, когда $b(z) \equiv 0, n = 1$, то есть когда оператор A имеет вид

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + c(z)(\overline{S}f)(z) + d(z)(\overline{S}_m\overline{f})(z) = g(z). \tag{4}$$

Доказана следующая

[13] Джураев А. Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[14] Комяк И. И Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

[15] Джангибеков Г. Нётеровость и индекс одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов // ДАН СССР, 1990, т. 313, №3, с. 1055-1059.

Теорема 2.1. *Для нётеровости оператора A из (4) в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|a(z)|>|c(z)|+|d(z)| \quad \forall z\in\overline{D}, \tag{5}$$

$$|c(z)|>|a(z)|+|d(z)| \quad \forall z\in\overline{D} \quad и \quad a(\tau)\cdot d(\tau)\neq 0 \quad \forall\tau\in\Gamma, \tag{6}$$

$$|d(z)|>|a(z)|+|c(z)\ \forall z\in\overline{D} \quad и \quad a(\tau)\neq 0 \quad \forall\tau\in\Gamma. \tag{7}$$

При этом если выполнено условие (5), то оператор A обратим, если выполнено условие (6), то индекс оператора A равен

$$\varkappa=2(mInd_\Gamma a(\tau)+Ind_\Gamma d(\tau)),$$

а если выполнено условие (7), то индекс оператора A равен

$$\varkappa=2mInd_\Gamma a(\tau).$$

В **разделе 3** изучается уравнение (2) в случае $n=1$, то есть когда оператор A имеет вид

$$(Af)(z)\equiv a(z)f(z)+b(z)\overline{f(z)}+c(z)(\overline{S}f)(z)+d(z)(\overline{S}_m\overline{f})(z)=g(z). \tag{8}$$

Введём обозначения:

$$\Delta_1(z)=|a(z)|^2-|b(z)|^2, \Delta_2(z)=|d(z)|^2-|c(z)|^2, z\in\overline{D},$$

$$M(z)=\max_{|t|=1}Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m-\overline{a(z)}c(z)t\Big),$$

$$-m(z)=\min_{|t|=1}Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m-\overline{a(z)}c(z)t\Big),$$

$$\chi(z)=\begin{cases}M(z), & \text{если } \triangle_j(z)>0\\ m(z), & \text{если } \triangle_j(z)<0, \quad j=1,2.\end{cases}$$

Теорема 3.2. *Для нётеровости оператора A из (8) в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\triangle_1(z)|>\chi(z)+\sqrt{\chi^2(z)+\triangle_1(z)\triangle_2(z)}\ \ \forall z\in\overline{D}, \tag{9}$$

$$|\triangle_2(z)|>\chi(z)+\sqrt{\chi^2(z)+\triangle_1(z)\triangle_2(z)} \quad \forall z\in\overline{D},$$

$$b(t)(c(t))^m+(-1)^m d(t)(a(t))^m\neq 0, \quad \forall t\in\Gamma. \tag{10}$$

При этом если выполнено условие (9), то индекс оператора A равен нулю, а если выполнено условие (10), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\{b(t)(c(t))^m + (-1)^m d(t)(a(t))^m\}. \tag{11}$$

В **разделе 4** для сингулярного интегрального уравнения (2) с разными характеристиками в общем случае доказана

Теорема 4.1. *Для нётеровости оператора A из (2) в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)} \;\; \forall z \in \overline{D}, \tag{12}$$

$$|\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)} \quad \forall z \in \overline{D},$$

$$(b(t))^n(c(t))^m + (-1)^{nm}(d(t))^n(a(t))^m \neq 0 \qquad \forall t \in \Gamma. \tag{13}$$

При этом если выполнено условие (12), то индекс оператора A равен нулю, а если выполнено условие (13), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\{(b(t))^n(c(t))^m + (-1)^{nm}(d(t))^n(a(t))^m\}, \tag{14}$$

где введены обозначения:

$$M(z) = \max_{|t|=1} Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m - \overline{a(z)}c(z)t^n\Big),$$

$$-m(z) = \min_{|t|=1} Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m - \overline{a(z)}c(z)t^n\Big)$$

$$\chi(z) = \begin{cases} M(z), & \text{если } \triangle_j(z) > 0 \\ m(z), & \text{если } \triangle_j(z) < 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

В **разделе 5** изучается четырёхкомпонентное сингулярное интегральное уравнение с операторами S_n и $\overline{S}_m K$ вида:

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(S_n f)(z) + d(z)(\overline{S}_m \overline{f})(z) = g(z), \tag{15}$$

где $m > n \geq 1$. При $m = n$, оператор (15) включается в класс операторов, изученных в работе Г.Джангибекова[10], для которых получены необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$ и формулы для вычисления индекса.

Теорема 5.1. *Для нётеровости оператора A из (15) в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $\quad (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)} \ \ \forall z \in \overline{D}, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} |\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \quad \forall z \in \overline{D}, \\ (\overline{b(t)})^n (c(t))^m + (-1)^{nm} (\overline{d(t)})^n (a(t))^m \neq 0 \qquad \forall t \in \Gamma. \end{gathered} \tag{17}$$

При этом если выполнено условие (16), то индекс оператора A равен нулю, а если выполнено условие (17), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = -2Ind_\Gamma (\overline{b(t)})^n (c(t))^m + (-1)^{nm} (\overline{d(t)})^n (a(t))^m \qquad \forall \tau \in \Gamma, \tag{18}$$

где введены обозначения

$$M(z) = \max_{|t|=1} Re \Big(\overline{b(z)} d(z) t^m - a(z) \overline{c(z)} t^n \Big),$$

$$-m(z) = \min_{|t|=1} Re \Big(\overline{b(z)} d(z) t^m - a(z) \overline{c(z)} t^n \Big).$$

В **разделе 6** изучается некоторый класс систем интегральных уравнений, содержащих сумму двумерных сингулярных операторов S_m и оператора Бергмана по ограниченной односвязной области D с гладкой границей Γ.

Пусть $B(z, \zeta)$ обозначает керн-функцию Бергмана области D, представимую в виде

$$B(z, \zeta) = \frac{\omega'(z) \overline{\omega'(\zeta)}}{\pi (1 - \omega(z) \overline{\omega(\zeta)})^2},$$

где $\omega(z)$ - однолистное конформное отображение области D на единичный круг, штрих обозначает производную, а черта над функцией - комплексное сопряжение; B и $\overline{B}$ - интегральные операторы соответственно с ядрами $B(z, \zeta), \overline{B(z, \zeta)}$:

$$(Bf)(z) = \iint\limits_D B(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \qquad (\overline{B} f)(z) = \iint\limits_D \overline{B(z, \zeta)} f(\zeta) ds_\zeta;$$

S_m - двумерный сингулярный интегральный оператор с чётной экспоненциальной характеристикой порядка m.

Рассматривается система уравнений:

$$\begin{gathered} (Af)(z) \equiv a(z) f(z) + \sum_{m=1}^{N} b_m(z) (S_m f)(z) + c(z) (Bf)(z) + \\ + d(z) (\overline{B} f)(z) + \delta(z) (\overline{B f})(z) = g(z), \ z \in D, \end{gathered} \tag{19}$$

где N - натуральное число, $a(z), b_m(z), c(z), d(z), \delta(z)$ - непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы - функции порядка n,$f(z)$ и $g(z)$ - соответственно искомая и известная вектор-функции размерности n, принадлежащие $L^p(D), 1 < p < \infty$; действие матрицы на вектор понимается в смысле скалярного умножения строк матрицы на этот вектор.

Отметим, что В.С.Виноградовым[16] в работе рассмотрена частная система (19) при $N = 1, c \equiv d \equiv \delta \equiv 0, a \equiv E$ в связи с исследованием граничной задачи для дифференциальных уравнений и построены регуляризаторы для (19) в $L^p(D)$ при p, близких к двум, и показано, что индекс системы равен нулю.

Система (19) может быть отнесена к общим многомерным сингулярным интегральным уравнениям, для которых в работе Р.В.Дудучаыв[8] даны необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D), 1 < p < \infty$, содержащие требование равенства нулю частных индексов матрицы - символа в точках Г. Ранее система (19) при $\delta(z) \equiv 0$ была изучена Б.М.Бильманом и Г.Джангибековым[17], где получены необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D), p > 1$ и найдена формула для подсчёта индекса.

Лемма 6.1. *Для оператора A из (19) в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$, справедливо равенство:*

$$Af = (aI + cB)\Big(I + a^{-1}\sum_{m=1}^{N} b_m S_m\Big)\Big(I + a^{-1}d\overline{B} + a^{-1}\delta\overline{B}K\Big)f + T_2,$$

где K - оператор перехода к комплексно-сопряжённым значениям, T_2- вполне непрерывный оператор.

Теорема 6.1. *Для нётеровости системы (19) в $L^p(D), 1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$1)\ \det\{a(z) + \sum_{m=1}^{N}\zeta^m b_m(z)\} \neq 0 \quad \textit{при} \quad z \in \overline{D}, \quad |\zeta| \leq 1;$$

$$2)\ \det\{a(t) + c(t)\} \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in \Gamma;$$

$$3)\ \det\{a(t) + d(t)\} \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in \Gamma.$$

[16]Виноградов В.С. Об одной граничной задаче для эллиптической системы специального вида // Дифференц. уравнения. 1971.т. 7, №7, с.1226-1234.

[8]Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I, II // J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 41-76, 199- 214.

[17]Бильман Б.М., Джангибеков Г. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области // ДАН СССР, 1986, т. 288, №4, с. 792-797.

При этом индекс системы равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \det\{a(t)+d(t)\} - 2Ind_\Gamma \det\{a(t)+c(t)\}.$$

Замечание 1. *В теореме 6.1 вместо непрерывности матриц-функций* $c(z), d(z)$ *и* $\delta(z)$ *в* $\overline{D}$ *достаточно потребовать, чтобы их элементы были измеримыми ограниченными функциями, имеющими на* Γ *равномерно достижимые предельные значения, которые образуют непрерывные функции.*

Замечание 2. *Изложенные в теореме 6.1 результаты (по крайней мере, применительно к* $L^2(D)$ *) остаются в силе и в том случае, когда* $N = \infty$, *если потребовать, например, чтобы сходился ряд из норм матриц* $b_m(z)$.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

1. Чоршанбиева, М.Ч. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов [Текст]/ Г. Джангибеков, М.Ч. Чоршанбиева// Доклады Академии наук РТ. — 2011. — Т. 54. —№7. — С. 526-535.
2. Чоршанбиева, М.Ч. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с разными четными характеристиками [Текст]/ Г. Джангибеков, М.Ч. Чоршанбиева// Известия Академии наук РТ. — 2012. — Т. 148. —№3. — С. 29-41.
3. Чоршанбиева, М.Ч. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов [Текст]/ Г. Джангибеков, М.Ч. Чоршанбиева// Доклады Академии наук РТ. — 2014. — Т. 57. —№1. — С. 15-25.
4. Чоршанбиева, М.Ч. Исследование одного класса систем интегральных уравнений, содержащих двумерные сингулярные операторы и операторы Бергмана [Текст]/ М. Илолов, Г. Джангибеков, М.Ч.Чоршанбиева// Доклады Академии наук РТ. —2015. —Т. 58. №9. —С.761-768.

В других изданиях:

5. Чоршанбиева, М.Ч. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с разными четными характеристиками - [Текст]/М.Ч.Чоршанбиева// В сб. Современные проблемы дифференциальных уравнений и математикеского анализа. Материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию академика А. Джураева. —Душанбе, 2012. —С. 32-34.
6. Чоршанбиева, М.Ч. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с разными характеристиками -[Текст] /М.Ч. Чоршанбиева // В сб. Современные проблемы математического анализа и теории функций. Материалы международной научной конференции, посвящённой 60-летию академика АН РТ М.Ш. Шабозова. —Душанбе, 2012.—С. 46-48.
7. Чоршанбиева, М.Ч. - О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов -[Текст]/ Г. Джангибеков, М.Ч. Чоршанбиева //Современные проблемы теории

функции и дифференциальных уравнений. Материалы межд.научной конф.посвящённой 85-летию академика АН РТ Л.Г. Михайлова. Душанбе, 2013. . —С. 54-55.

8. Чоршанбиева, М.Ч. Нётеровость и индекс одного класса двумернерных сингулярных интегральных операторов -[Текст]/ М.Ч.Чоршанбиева// В сб. Современные проблемы математики и её преподавание. Материалы международной научной конференции, посвящённой 20-летию Конституции РТ. Худжанд 2 (29) 2014. —С. 156-157.