Таджикский национальный университет

На правах рукописи

ЧОРШАНБИЕВА МАЙРАМ ЧОРШАНБИЕВНА

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЧЁТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук,

Научные руководители: доктор физико–математических наук,
академик АН РТ, профессор Илолов Мамадшо
кандидат физико–математических
наук Джангибеков Гулходжа

Душанбе — 2016

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Данная работа посвящена двумерным сингулярным интегральным уравнениям по ограниченной области, которые рассматриваются в лебеговых пространствах функций.

Основным объектом исследования является действующий в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ простейший двумерный интегральный оператор Михлина-Калдерона-Зигмунда [1]-[5]

$$(S_m f)(z) = \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \tag{1}$$

где D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой, $m \neq 0$ - целое число.

Интегральные уравнения, содержащие операторы S_m, S_{-m} и их различные комбинации, при $m=1$, встречаются во многих задачах теории обобщённых аналитических функций (И.Н.Векуа [6],[7]), теории квазиконформных отображений (Л.Альфорс [8], М.Шиффер [9]), теории дифференциальных уравнений с частными производными (Б.Боярский [10], А.Д.Джураев [11]-[15], В.Н.Монахов [16]) и другие. Впервые такие уравнения рассматривал И.Н.Векуа [6] методом сжимающих отображений. А.Д.Джураев [11] исследовал двумерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах $L_p(D), 2 < p < \infty$, при помощи редукции к краевым задачам для обобщёных аналитических функций. И.И.Комяк [17]-[20] применил при изучении двумерных уравнений в пространствах $L^p(D), 1 < p < \infty$ методы теории банаховых алгебр.

Разработанная Р.В.Дудучавой [21],[22] L_p - теория, $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_m, S_{-m} и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее, к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Г.Джангибекова (см. напр.[23]-[27]), К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова [28]. При этом указанные сингулярные интегральные операторы, как правило, имели характеристики одинакового порядка.

Цель работы

1. Получить в лебеговых пространствах с весом эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчёта индекса некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с чётной характеристикой по ограниченной области.

2. Построить нётеровую теорию некоторых классов систем интегральных уравнений, содержащих двумерные сингулярные операторы и операторы Бергмана.

Метод исследования

При обосновании полученных в диссертации результатов используются методы комплексного анализа, методы функционального анализа, включая теорию банаховых алгебр, метод факторизации операторов.

Научная новизна исследований

а) Для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с чётной характеристикой разного порядка по ограниченной области в лебеговом пространстве с весом получены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчёта индекса.

б) Построена нётеровая теория некоторых классов систем интегральных уравнений, содержащих двумерные сингулярные операторы по ограниченной области и операторы Бергмана.

Практическая ценность

Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть применены при исследовании различных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на Международной научной конференции, посвящённой 80-летию академика АН РТ А.Д.Джураева (Душанбе, 07-08 декабря 2012г.), на Международной научной конференции, посвящённой 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июля 2013г.), на Международной научной конференции, посвящённой 20-летию Конституции РТ (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), а также на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [67]-[74]. В совместных работах [67]–[71] научным руководителям Г. Джангибекову и М. Илолову принадлежат постановка задач и выбор метода доказательства.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести разделов, списка литературы из 74 наименований и занимает 94 страницы машинописного текста, набранного на LaTeXe. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером раздела, второй указывает на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Работа состоит из шести разделов. Раздел 1 носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В разделах 2-4 в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

$(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, рассматривается следующее интегральное уравнение:

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(\overline{S}_n f)(z) + d(z)(\overline{S}_m \overline{f})(z) = g(z), \quad (2)$$

где D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой, $m > n \neq 0$ - целые числа, $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z)$- непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции, S_m - двумерный сингулярный интегральный оператор из (1).

Ранее исследованию уравнения (2) был посвящён ряд работ различных авторов. Так, ещё в 1959 г. И.Н.Векуа в известной монографии [6] в связи с применением к теории обобщённых аналитических функций рассмотрел оператор

$$A_1 = a(z)I + d(z)SK \quad , \tag{3}$$

(т.е., когда $b = c \equiv 0, m = -1$) при условии $|a(z)| > |d(z)|, z \in \overline{D}$ и на основе принципа сжатых отображений показал, что оператор A_1 из (3) имеет ограниченный обратный оператор в $L^p(D)$ при значении p, достаточно близкому к двум.

Далее в 1971 г. А.Джураев в работе [30] в предположении $a(z), d(z) \in C^1(D) \cap C_\alpha(\overline{D}), z \in \overline{D}$ показал, что условия $|a(z)| \neq |d(z)|, z \in \overline{D}; a(t) \neq 0, t \in \Gamma$ достаточны для нётеровости оператора A_1 в $L^p(D), 2 < p < \infty$ и что индекс оператора A_1 равен

$$\varkappa = -2ind_\Gamma a(t).$$

В случае, когда D - круговая область, а коэффициенты $a(z), d(z)$ лишь непрерывны, И.И. Комяк в работе [17] показал, что указанные выше условия необходимы и достаточны для нётеровости оператора A_1 в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$.

Случай $n = -m = 1$ изучен в работе К.Х. Бойматова и Г. Джангибекова

[28], где получены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D), 1 < p < \infty$ и найдена формула для вычисления индекса. Результаты для уравнения (2) при $n = -m > 1$ содержатся в работе Г. Джангибекова [31].

В разделе 2 настоящей работы изучается трёхкомпонентное интегральное уравнение (2) в случае, когда $b(z) \equiv 0, n = 1$, то есть, когда оператор A имеет вид

$$(Af)(z) = a(z)f(z) + c(z)(\overline{S}f)(z) + d(z)(\overline{S}_m\overline{f})(z) = g(z). \qquad (4)$$

Доказана следующая

Теорема 2.1. *Для нётеровости оператора A из (4) в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

$$|a(z)| > |c(z)| + |d(z)|, \forall z \in \overline{D}, \qquad (5)$$

$$|c(z)| > |a(z)| + |d(z)|, \forall z \in \overline{D}, \quad a(\tau) \cdot d(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \Gamma, \qquad (6)$$

$$|d(z)| > |a(z)| + |c(z)|, \forall z \in \overline{D}, \quad a(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \Gamma. \qquad (7)$$

При этом, если выполнено условие (5), то оператор A обратим, если выполнено условие (6), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2(mInd_\Gamma a(t) + Ind_\Gamma d(\tau)),$$

а если выполнено условие (7), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2mInd_\Gamma a(\tau).$$

В разделе 3 изучается уравнение (2) в случае $n = 1$, то есть. когда оператор A имеет вид:

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(\overline{S}f)(z) + d(z)(\overline{S}_m\overline{f})(z) = g(z). \quad (8)$$

Введём обозначения:

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \Delta_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2, z \in \overline{D},$$

$$M(z) = \max_{|t|=1} Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m - \overline{a(z)}c(z)t\Big),$$

$$-m(z) = \min_{|t|=1} Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m - \overline{a(z)}c(z)t\Big),$$

$$\chi(z) = \begin{cases} M(z), & \text{если } \triangle_j(z) > 0 \\ m(z), & \text{если } \triangle_j(z) < 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

Теорема 3.2. *Для нётеровости оператора A из (8) в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \ \forall z \in \overline{D}, \quad (9)$$

$$|\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \quad \forall z \in \overline{D},$$

$$b(t)(c(t))^m + (-1)^m d(t)(a(t))^m \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma. \quad (10)$$

При этом, если выполнено условие (9), то индекс оператора A равен нулю, а если выполнено условие (10), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{b(t)(c(t))^m + (-1)^m d(t)(a(t))^m\}. \quad (11)$$

В разделе 4 для сингулярного интегрального уравнения (2) с разными характеристиками в общем случае доказана

Теорема 4.1. *Для нётеровости оператора A из (2) в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)},\ \forall z \in \overline{D}, \tag{12}$$

$$|\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)},\quad \forall z \in \overline{D},$$

$$(b(\tau))^n(c(\tau))^m + (-1)^{nm}(d(\tau))^n(a(\tau))^m \neq 0, \qquad \forall \tau \in \Gamma. \tag{13}$$

При этом, если выполнено условие (12), то индекс оператора A равен нулю, а если выполнено условие (13), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{(b(\tau))^n(c(\tau))^m + (-1)^{nm}(d(\tau))^n(a(\tau))^m\}, \tag{14}$$

где введены обозначения:

$$M(z) = \max_{|t|=1} Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m - \overline{a(z)}c(z)t^n\Big),$$

$$-m(z) = \min_{|t|=1} Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m - \overline{a(z)}c(z)t^n\Big),$$

$$\chi(z) = \begin{cases} M(z), & \text{если } \triangle_j(z) > 0 \\ m(z), & \text{если } \triangle_j(z) < 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

В разделе 5 изучается четырёхкомпонентное сингулярное интегральное уравнение с операторами S_n и $\overline{S}_m K$ вида.

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(S_n f)(z) + d(z)(\overline{S}_m \overline{f})(z) = g(z), \tag{15}$$

где $m > n \geq 1$. При $m = n$, оператор (15) включается в класс операторов, изученных в работе [24], для которых получены необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$ и формулы для вычисления индекса.

Теорема 5.1. *Для нётеровости оператора A из (15) в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)},\ \forall z \in \overline{D}, \tag{16}$$

$$|\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)},\quad \forall z \in \overline{D},$$

$$(\overline{b(\tau)})^n(c(\tau))^m + (-1)^{nm}(\overline{d(\tau)})^n(a(\tau))^m \neq 0, \qquad \forall \tau \in \Gamma. \tag{17}$$

При этом, если выполнено условие (16), то индекс оператора A равен нулю, а, если выполнено условие (17), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = -2Ind_\Gamma(\overline{b(\tau)})^n(c(\tau))^m + (-1)^{nm}(\overline{d(\tau)})^n(a(\tau))^m, \qquad \forall \tau \in \Gamma \tag{18}$$

где введены обозначения:

$$M(z) = \max_{|t|=1} Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m - a(z)\overline{c(z)}t^n\Big),$$

$$-m(z) = \min_{|t|=1} Re\Big(\overline{b(z)}d(z)t^m - a(z)\overline{c(z)}t^n\Big).$$

В разделе 6 изучается некоторый класс систем интегральных уравнений, содержащих сумму двумерных сингулярных операторов S_m и операторы Бергмана по ограниченной односвязной области D с гладкой границей Γ.

Пусть $B(z,\zeta)$ обозначает керн-функцию Бергмана области D (см.[32],[33]), представимую в виде

$$B(z,\zeta) = \frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{\pi(1-\omega(z)\overline{\omega(\zeta)})^2},$$

где $\omega(z)$ - однолистное комформное отображение области D на единичный круг, штрих обозначает производную, а черта над функцией - комплексное сопряжение; B и $\overline{B}$ - интегральные операторы соответственно с ядрами $B(z,\zeta), \overline{B(z,\zeta)}$:

$$(Bf)(z) = \iint\limits_D B(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \qquad (\overline{B}f)(z) = \iint\limits_D \overline{B(z,\zeta)}f(\zeta)ds_\zeta;$$

S_m - двумерный сингулярный интегральный оператор с чётной экспоненциальной характеристикой порядка m.

Рассматривается система уравнений

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + \sum_{m=1}^{N} b_m(z)(S_m f)(z) +$$

$$+c(z)(Bf)(z) + d(z)(\overline{B}f)(z) + \delta(z)(\overline{Bf})(z) = g(z), \ z \in D, \qquad (19)$$

где N - натуральное число, $a(z), b_m(z), c(z), d(z), \delta(z)$ - непрерывные в $\overline{D}$, квадратные матрицы - функции порядка n,$f(z)$ и $g(z)$ - соответственно, искомая и известная вектор-функции размерности n, принадлежащие $L^p(D), 1 < p < \infty$; действие матрицы на вектор понимается в смысле скалярного умножения строк матрицы на этот вектор.

Отметим, что В.С.Виноградовым в работе [34] рассмотрена частная система (19) при $N = 1, \quad c \equiv d \equiv \delta \equiv 0, \quad a \equiv E$ в связи с исследованием граничной задачи для дифференциальных уравнений и построены регуляризаторы для (19) в $L^p(D)$ при значении p, близкому к двум, и показано, что индекс системы равен нулю.

Система (19) может быть отнесена к общим многомерным сингулярным интегральным уравнениям, для которых в [21] даны необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D), 1 < p < \infty$, содержащие требование равенства нулю частных индексов матрицы - символа в точках Г. В [35] изучен случай, когда $\delta(z) \equiv 0$, где получены необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D), p > 1$ и найдена формула для подсчёта индекса.

Лемма 6.1. *Для оператора A из (19) в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$, справедливо равенство*

$$Af = (aI + cB)\Big(I + a^{-1}\sum_{m=1}^{N} b_m S_m\Big)\Big(I + a^{-1}d\overline{B} + a^{-1}\delta\overline{B}K\Big)f + T_2,$$

где K - оператор перехода к комплексно-сопряжённым значениям, T_2- вполне непрерывный оператор.

Теорема 6.1. *Для нётеровости системы (19) в $L^p(D), 1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$1)\ \det\{a(z) + \sum_{m=1}^{N} \zeta^m b_m(z)\} \neq 0 \quad \textit{при} \quad z \in \overline{D}, \quad |\zeta| \leq 1;$$

$$2)\ \det\{a(t) + c(t)\} \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in \Gamma;$$

$$3)\ \det\{a(t) + d(t)\} \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in \Gamma.$$

При этом индекс системы равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \det\{a(t) + d(t)\} - 2Ind_\Gamma \det\{a(t) + c(t)\}.$$

Замечание 1. В теореме 6.1. вместо непрерывности матриц-функций $c(z), d(z)$ и $\delta(z)$ в $\overline{D}$ достаточно потребовать, чтобы их элементы были измеримыми ограниченными функциями, имеющими на Γ равномерно достижимые предельные значения, которые образуют непрерывные функции.

Замечание 2. Изложенные в теореме 6.1. результаты (по крайней мере, применительно к $L^2(D)$) остаются в силе и в том случае, когда $N = \infty$, если потребовать, например, чтобы сходился ряд из норм матриц $b_m(z)$.

1 Описание пространств функций и некоторые вспомогательные сведения

Определение 1.1. Простую замкнутую гладкую кривую Γ назовём кривой Ляпунова, если она удовлетворяет следующему условию: касательная к кривой образует с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию Гёльдера относительно дуги s кривой Γ.

1.1 Описание используемых пространств функций

Пусть D - конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ, и содержащая внутри точку $z = 0$.

Пространство $L^p_{\beta-2/p}(D)$ - это множество комплекснозначных измеримых в D функций $f(z)$, для которых функция $F(z) = |z|^{\beta-2/p} f(z)$ суммируема с p - ой степенью, где $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$. Норма в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ вводится по формуле

$$||f(z)||_{L^p_{\beta-2/p}} = \left(\iint\limits_D |F(z)|^p ds_z \right)^{1/p} = ||F||_{L^p}.$$

Пространство $L^p_{\beta-2/p}(D)$ является банаховым пространством, ибо оно линейно изометрично полному нормированному пространству $L^p(D)$.

1.2 Нётеровы операторы и основные их свойства

В этом пункте приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах, которыми мы будем пользоваться в работе. Доказательства всех приводимых здесь утверждений можно найти например в монографии [36].

Пусть X - банахово пространство, A - линейный ограниченный оператор, действующий в X, A^* - сопряжённый к нему оператор, действующий в сопряжённом пространстве X^*. Множество $KerA$ всех решений уравнения

$$Ax = 0 \tag{1.1}$$

называется множеством нулей или ядром оператора A. Множество $KerA$ является подпространством пространства X. Размерность подпространства $KerA$, т.е. число линейно независимых решений уравнения (1.1), будем обозначать через $\alpha_A = dimKerA$. Через $KerA^*$ обозначим подпространства нулей оператора A^*, т.е. множество всех решений уравнения

$$A^*x = 0 \tag{1.2}$$

называется ядром оператора A^* и, наконец, $\beta_A = \alpha_{A^*} = KerA^*$. Числа α_A, β_A называются дефектными числами оператора A. Если хотя бы одно из чисел α_A и β_A - конечное, то их разность называется индексом оператора A и обозначается через $IndA$,

$$IndA = \alpha_A - \beta_A.$$

Очевидно, $IndA$ конечен тогда, и только тогда, когда обе размерности α_A и β_A - конечны.

Определение 1.2. Оператор A называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение $Ax = y$ разрешимо тогда, и только тогда, когда её правая часть y ортогональна всем решениям сопряжённого однородного уравнения (1.2).

Известна следующая теорема Хаусдорфа: для того, чтобы оператор был нормально разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы его область значений была замкнутой.

Определение 1.3. Оператор A называется нётеровым в X, если он нормально разрешим и числа α_A, β_A конечны.

Определение 1.4. Индексом $IndA$ нётерова оператора A называется целым число $IndA = \alpha_A - \beta_A$.

Следующее определение из всего множества нётеровых операторов выделяет подмножество фредгольмовых операторов:

Определение 1.5. Нётеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.

Свойство 1.1. (теорема о композиции). Если A и B нётеровы операторы в X, то их композиция AB также нётерова в X, причём $IndAB = IndA+IndB$.

Свойство 1.2. Если A нётеров в X, то и A^* нётеров в X^*, причём $IndA^*=-IndA$.

Свойство 1.3. (возмущение вполне непрерывным оператором). Если A нётеров, а T вполне непрерывен в X, то $A+T$ также нётеров в X, причём $Ind(A+T) = IndA$.

Свойство 1.4. (возмущение малым по норме оператором). Если A нётеров в X, то существует такое $\varepsilon = \varepsilon(A)$, что для всех операторов B таких, что $||B|| < \varepsilon$, оператор $A + B$ нётеров в X и $Ind(A + B) = IndA$.

Говорят, что оператор A допускает левую (правую) регуляризацию, если существует линейный ограниченный оператор R такой, что произведение RA (AR) является оператором Фредгольма. Оператор R в этом случае называется левым (правым) регуляризатором оператора A.

Свойство 1.5. Для того, чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы у него существовали левый и правый регуляризаторы.

Определение 1.6. Нётеровы операторы A и B называются гомотопными, если существует семейство нётеровых операторов $A(t)$, $t \in [0, 1]$, которое равномерно непрерывно по норме на сегменте $[0, 1]$ по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что, если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $||A(t_1) - A(t_2)|| < \varepsilon$, и $A(0) = A,\ A(1) = B$.

Свойство 1.6. Если операторы A и B гомотопны, то

$$IndA = IndB.$$

Пусть Γ - простая замкнутая кривая, разбивающая комплексную плоскость переменной z на две области-внутреннюю $D^+(\ni\ 0)$ и внешнюю (бесконечную) $D^-(\ni\ \infty)$. На Γ задана непрерывная невырожденная матрица-функция $G(t)$ размера $n \times n$.

Определение 1.7. Говорят, что неособенная матрица-функция $G(t)$ размера $n \times n$ допускает левую стандартную факторизацию на Γ, если справедливо следующее представление для $G(t)$:

$$G(t) = G^+(t)B(t)G^-(t), t \in \Gamma,$$

где $G^{\pm}(t)$ - непрерывные на Γ матрицы-функции, аналитически продолжимы в области $D^{\pm}$ и обратимы там, соответственно; $B(t) = \{t^{\varkappa_1}, \cdots, t^{\varkappa_n}\}$ - диагональная матрица-функция порядка $n \times n$, $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \cdots \geq \varkappa_n$ - частные индексы (целые числа),

$\varkappa = Ind_{\Gamma} G(t) = \dfrac{1}{2\pi}[\arg\det G(t)]_{\Gamma} = \sum\limits_{j=1}^{n} \varkappa_j$ − суммарный индекс матрицы G. Аналогичным образом определяется правая стандартная факторизация. Стандартная факторизация называется канонической, если все частные индексы матрицы $G(t)$ равны нулю. Очевидно, что каждая правая (левая) факторизация матрицы $G(t)$ порождает левую (правую) факторизацию обратной матрицы $G^{-1}(t)$.

Факторизация матриц-функций является основным звеном теории векторной краевой задачи Римана для аналитических функций. Основополагающие результаты по этому направлению получены в известных работах Ф.Д.Гахова [37], Н.И.Мусхелишвили [38], Н.П.Векуа [39], Н.Б.Симоненко [40],[41]

1.3 Локальная нётеровость операторов

Определение 1.8. Существенной нормой оператора A называется величина

$$|||A||| = \inf_{K} ||A - K||,$$

где K пробегает множество всех вполне непрерывных операторов. Если $|||A||| = 0$, то оператор является вполне непрерывным, и наоборот.

Операторы A и B называются эквивалентными, если $|||A - B||| = 0$ и коротко это записывается так: $A \sim B$.

Определение 1.9. Если M - измеримое множество, то P_M означает оператор, действующий по правилу:

$$(P_M f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in M, \\ 0, & \text{если } x \notin M. \end{cases}$$

Определение 1.10. Оператор A называется оператором локального типа, если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств F_1 и F_2 оператор $P_{F_1} A P_{F_2}$ вполне непрерывен.

Определение 1.11. Операторы A и B называются эквивалентными в точке x_0, если по любому $\varepsilon > 0$ найдётся такая окрестность u точки x_0, что

$$|||AP_u - BP_u||| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |||P_u A - P_u B||| < \varepsilon.$$

Сокращённо это пишется как $A \sim B$.

Следующие понятия являются локальным аналогом понятий регуляризатора оператора нётера.

Определение 1.12. Говорят, что оператор $R_\Lambda(R_\Pi)$ - является локальным левым (правым) регуляризатором оператора A в точке x_0, если найдётся такая окрестность u точки x_0, что $R_\Lambda A P_u \sim P_u (R_\Pi A P_u \sim P_u)$.

Определение 1.13. Оператор A называется локальным оператором Нётера в точке x_0, если он обладает левым и правым локальными регуляризаторами в точке x_0.

Имеются теоремы, устанавливающие связь между понятиями локальной нётеровости и эквивалентности в точке (см.[42]-[44]).

Теорема 1.1. *Если A, B - операторы действующие из $L_p(D)$ в $L_p(D)$, и $A \sim B$, то операторы A и B одновременно обладают локальным левым* *регуляризатором в точке* x_0 *(локальный правый регуляризатор в точке* x_0*) либо не обладают. В этих условиях операторы* A *и* B *одновременно либо являются локально нётеровыми в точке* x_0*, либо не являются локально нётеровыми в точке* x_0.

Теорема 1.2. *Для того чтобы оператор* A *локального типа, действующий из* $L_p(D)$ *в* $L_p(D)$*, был оператором Нётера, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке* $z \in D$ *оператор* A *был локальным оператором Нётера.*

Теорема 1.3. *Если оператор* A *локального типа, действующий из* $L_p(D)$ *в* $L_p(D)$*, в каждой точке* $z \in D$ *обладает правым (левым) локальным регуляризатором локального типа, то оператор* A *обладает правым (левым) регуляризатором.*

2 Теория нётера некоторых трёхэлементных уравнений с сингулярными интегральными операторами $\overline{S}$ и $\overline{S}_m K$

Пусть D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, I - тождественный оператор, m-целое число, $a(z),\ c(z),\ d(z)$-непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции. В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D),\ 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + c(z)(\overline{S}f)(z) + d(z)(\overline{S}_m\overline{f})(z) = g(z), \qquad (2.1)$$

где

$$(S_m f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi}\iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta,\ \theta = \arg(\zeta - z),$$
$$\overline{S}_m = KS_mK = S_{-m},\ \overline{S} = \overline{S}_1,\ (Kf)(z) = \overline{f(z)}, \qquad (2.2)$$

черта над функцией означает переход к комплексно-сопряжённым значениям, $m > 0$ - целое число, ds_ζ - элемент плоской меры лебега, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, то есть как предел по норме в $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty)$ (см.[2]-[5]):

$$v.p.\frac{(-1)^m m}{\pi}\iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-1)^m m}{\pi}\iint\limits_{D\setminus D_\varepsilon(z)} \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta,$$

$D_\varepsilon(z)$ - круг радиуса ε с центром в точке z : $D_\varepsilon(z) = \{z : |\zeta - z| < \varepsilon\}$, β - вещественное число удовлетворяющее условию $0 < \beta < 2$. Последнее условие появляется как условие ограниченности оператора S_m в весовом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ (см.[45]).

Раннее исследованию уравнения (2.1) был посвящен ряд работ различных авторов. Так, ещё в 1959 г. И.Н.Векуа в известной монографии [6] в связи с применением к теории обобщённых аналитических функций рассмотрел оператор

$$A_1 = a(z)I + d(z)SK \quad , \tag{2.3}$$

(то есть, когда в (2.1) $c(z) \equiv 0,\ m = -1$) при условии $|a(z)| > |d(z)|, z \in \overline{D}$ и на основе принципа сжатых отображений показал, что оператор A_1 из (2.2) имеет ограниченный обратный в $L^p(D)$ при p достаточно близких к двум.

Далее, в 1971 г. А.Джураев в работе [30] в предположении $a(z), d(z) \in C^1(D) \cap C_\alpha(\overline{D}), z \in \overline{D}$ показал, что условия $|a(z)| \neq |d(z)|, z \in \overline{D}; a(t) \neq 0, t \in \Gamma$ достаточны для нётеровости оператора A_1 в $L^p(D), 2 < p < \infty$ и, что индекс оператора A_1 равен

$$\varkappa = -2ind_\Gamma a(t).$$

В случае, когда D - круговая область, а коэффициенты $a(z), d(z)$ лишь непрерывны, И.И.Комяк в работе [17] показал, что указанные выше условия необходимы и достаточны для нётеровости оператора A_1 в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$.

Случай $c(z) \equiv 0, m = 1$ включается в класс операторов для которых в [28] получены необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D), 1 < p < \infty$ и формулы для вычисления индекса. При $c(z) \equiv 0, m > 1$ оператор A изучался в работе [24], где построена алгебра таких операторов.

Прежде всего заметим, что уравнение (2.1) наряду с искомой функции $f(z)$ также содержит комплексно сопряженную функцию $\overline{f(z)}$ и уравнения такого вида можно непосредственно свести к системе двух сингулярных уравнений с двумя неизвестными функциями $f(z)$ и $\overline{f(z)}$, если присоединить к данному уравнению, другое полученное переходом к комплексно сопряженным значениям. Для этого в векторном пространстве

$$L_p^2(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L^p(D)\}, \quad 1 < p < \infty$$

рассмотрим оператор

$$U = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)\overline{S} & d(z)\overline{S}_m \\ \overline{d(z)}S_m & \overline{a(z)}I + \overline{c(z)}S \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.1. Нетеровость оператора $A : L_p(D) \longrightarrow L_p(D)$ эквивалентна нетеровости оператора $U : L_p^2(D) \longrightarrow L_p^2(D)$.

Действительно, если функция $f(z)$ является решением уравнения (2.1) из $L_p(D)$, то вектор $F = (f, \overline{f})$ будет решением системы $UF = Q$ из $L_p^2(D)$, где $Q = (g, \overline{g})$ и обратно, если вектор $F = (f_1, f_2)$ является решением системы $UF = q$ из $L_p^2(D)$, то вектор $(\overline{f}_2, \overline{f}_1)$ также будет решением. Но тогда решением системы $UF = Q$ из $L_p^2(D)$ будет вектор $\left(\frac{f_1+\overline{f}_2}{2}, \frac{f_2+\overline{f}_1}{2}\right)$. Отсюда следует, что функция $\frac{f_1+\overline{f}_2}{2}$ будет решением уравнения (2.1) из $L_p(D)$.

Далее, пусть k–число линейно-независимых решений однородного уравнения (2.1) над полем вещественных чисел, l–число линейно независимых решений однородной системы $UF = 0$ над полем комплексных чисел. Покажем, что $k = l$. Пусть $\{f_j(z)\}, j = 1, 2, \cdots k$,–фундаментальная система решений однородного уравнения (2.1).Тогда векторы $F_j = (f_j, \overline{f}_j)\,(j = 1, 2, \cdots k)$ будут линейно-независимыми решениями уравнения $UF = 0$.

Действительно, если $\sum_{j=1}^{n} c_j F_j = 0$, то $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{f}_j = 0$ или $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j = 0$ и $\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j f_j = 0$. Отсюда $\sum_{j=1}^{n}(c_j+\overline{c}_j) f_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n}(c_j-\overline{c}_j) f_j = 0$. Поэтому $c_j + \overline{c}_j = 0, c_j - \overline{c}_j = 0$, т.е. $c_j = 0$. Таким образом, $k \leq l$.

Совершенно аналогичным образом, как в ([39], стр.276) доказывается, что $k \geq l$.

Далее отметим, что поскольку всякий ограниченный функционал на вещественном пространстве $L_p(D)$ представим единственным образом в виде

$$(f, \psi) = Re \iint\limits_{D} f(z)\psi(z) dS_z,$$

где $\psi(z) \in L_q(D)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то в соответствии с этим сопряженным к оператору A будет оператор

$$A^*\psi = a\psi + \overline{S}c\psi + S_m\overline{d\psi},$$

где $\psi \in L_q(D)$. Совершенно аналогично доказывается,что однородное сопряженное уравнение $A^*\psi = 0$ в пространстве $L_p(D)$ и соответствующая система уравнений $U^*\Psi = 0$ в векторном пространстве $L_p^2(D)$ имеют одинаковое число линейно независимых решений, определенным образом соответствующих друг другу.

Из установленной выше соответствии между решениями неоднородного уравнения $Af = g$ и неоднородной системы $UF = Q$ следует, что уравнение $Af = g$ и соответствующая система $UF = Q$ нормально разрешимы лишь одновременно. Лемма 2.1доказана.

Поскольку символ оператора S_m (см.[1]) равен $(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma})^m$ $(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$, то согласно [21], для нётеровости операторной матрицы U в $L_p^2(D)$ необходимо, чтобы $\det G_A(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, где $G_A(z,t)$– непрерывная при $|t| = 1$ рациональная матрица-символ оператора A (см.[1], гл.VI,4):

$$G_A(z,t) = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)\bar{t} & d(z)\bar{t}^m \\ \overline{d(z)}t^m & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}t \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.2. *Матрица $G_A(z,t)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ тогда, и только тогда, когда для $\forall z \in \overline{D}$ выполнено одно из неравенств:*

$$|a(z)| > |c(z)| + |d(z)|, \tag{2.4}$$

$$|c(z)| > |a(z)| + |d(z)|, \tag{2.5}$$

$$|d(z)| > |a(z)| + |c(z)|. \tag{2.6}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Для нётеровости оператора A в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

$$|a(z)| > |c(z)| + |d(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{2.7}$$

$$|c(z)| > |a(z)| + |d(z)|, \forall z \in \overline{D}, \quad a(\tau) \cdot d(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \Gamma, \tag{2.8}$$

$$|d(z)| > |a(z)| + |c(z)|, \forall z \in \overline{D}, \quad a(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \Gamma. \tag{2.9}$$

При этом, если выполнено условие (2.7), то оператор A обратим, если выполнено условие (2.8), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2(mInd_\Gamma a(t) + Ind_\Gamma d(\tau)),$$

если выполнено условие (2.9), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2mInd_\Gamma a(\tau).$$

Доказательство: **а)** Пусть выполнено условие (2.8). Тогда оператор A запишем в $A = c(z)A_2$, где

$$A_2 = q_1(z)I + \overline{S} + q_2(z)\overline{S}_m K, \tag{2.10}$$

$q_1(z) = a(z)/c(z), q_2(z) = d(z)/c(z)$, причём для всех $z \in \overline{D}$ новые коэффициенты удовлетворяют неравенству $|q_1(z)| + |q_2(z)| < 1$. Символ оператора A_2 имеет вид:

$$G_{A_2}(z, \sigma/\overline{\sigma}) = \begin{pmatrix} q_1(z) + \sigma/\overline{\sigma} & q_2(z)(\sigma/\overline{\sigma})^m \\ \overline{q}_2(z)(\overline{\sigma}/\sigma)^m & \overline{q_1(z)} + \overline{\sigma}/\sigma \end{pmatrix}.$$

По данному символу построим матрицы

$$\Omega_{A_2}(t) = \begin{pmatrix} q_1 + t & q_2 t^m \\ \overline{q}_2/t^m & \overline{q_1} + 1/t \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{A_2}(1/t) = \begin{pmatrix} q_1 + 1/t & q_2/t^m \\ \overline{q}_2 t^m & \overline{q_1} + t \end{pmatrix},$$

где $t = \dfrac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 + i}, \quad -\infty < \sigma_1 < \infty$, а коэффициенты q_1, q_2 зависят от точки τ контура Γ. Если мы теперь покажем, что матрицы $\Omega_{A_2}(t), \Omega_{A_2}(1/t)$ факторизуются с нулевыми частными индексами, то из [21] будет следовать, что оператор A_2 нётеров в $L_p(D), 1 < p < \infty$.

Чтобы найти условие, при котором матрица $\Omega_{A_2}(t)$ допускает каноническое факторизация $\Omega_{A_2}(t) = \Omega^-(t)\Omega^+(t)$, где $\Omega^\pm$ - непрерывные при $|t| = 1$ матрицы-функции, аналитически продолжимы соответственно внутри и вне единичного круга, будем решать следующую краевую задачу Римана для аналитических функции в единичном круга $|t| < 1$:

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = (q_1 + t)\Phi_1^+(t) + q_2 t^m \Phi_2^+(t) \\ \Phi_2^-(t) = (\overline{q}_2/t^m)\Phi_1^+(t) + (\overline{q}_1 + 1/t)\Phi_2^+(t). \end{cases} . \tag{2.11}$$

Здесь $\Phi_{1,2}^+(t), \Phi_{1,2}^-(t)$ неизвестные функции точки окружности $|t| = 1$, аналитически продолжимы по t соответственно внутри и вне единичного круга.

Займемся решением задачи Римана (2.11). В первом равенстве системы (2.11) слева стоит аналитически продолжимая вне единичного круга функция, а справа - аналитически продолжимая внутри единичного круга. По теореме Лиувилля эта функция равна постоянной, т.е. $\Phi_1^-(\zeta) = c_1$. Тогда

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{c_1}{q_1 + \zeta} - \frac{q_2 \zeta^m}{q_1 + \zeta}\Phi_2^+(\zeta). \tag{2.12}$$

Подставив значение $\Phi_1^+(t)$ во второе равенство системы (2.11), получим

$$\Phi_2^-(t) = \frac{c_1 \overline{q}_2}{t^m(q_1 + t)} + \frac{|q_1 + t|^2 - |q_2|^2}{q_1 + t}\Phi_2^+(t). \tag{2.13}$$

Здесь $|q_1 + t|^2 - |q_2|^2 = \det \Omega_{A_2}(t)$. Положим $\det \Omega_{A_2}(t) = \dfrac{F^+(t)}{F^-(t)}$, где $F^+(t) \neq 0,\ F^-(t) \neq 0$ - аналитически продолжимые соответственно внутри и вне единичного круга $|t| = 1$ функции. Используя эту факторизацию $\det \Omega_{A_2}(t)$, функцию $\Phi_2^-(t)$ можно представить в виде

$$\Phi_2^-(t) = \frac{c_1 \overline{q}_2}{t^m(q_1 + t)} + \frac{F^+(t)}{F^-(t)(q_1 + t)}\Phi_2^+(t).$$

Отсюда

$$F^-(t)\Big(\Phi_2^-(t) - \frac{c_1 \overline{q}_2}{t^m(q_1 + t)}\Big) = \frac{F^+(t)}{q_1 + t}\Phi_2^+(t).$$

Левая часть последнего равенства аналитически продолжима вне единичного круга, а правая - аналитически продолжимая внутри единичного круга функция, за исключением точки $\zeta = -q_1$, где она имеет простой полюс, поэтому из теоремы Лиувилля будет следовать:

$$F^-(\zeta)\Big(\Phi_2^-(\zeta) - \frac{c_1\overline{q}_2}{\zeta^m(q_1+\zeta)}\Big) = \frac{F^+(\zeta)}{q_1+\zeta}\Phi_2^+(\zeta) \equiv c_2 + \frac{c_3}{q_1+\zeta},$$

т.е.

$$\Phi_2^-(\zeta) = \frac{c_1\overline{q}_2}{\zeta^m(q_1+\zeta)} + \frac{1}{F^-(\zeta)}\Big(c_2 + \frac{c_3}{q_1+\zeta}\Big), \tag{2.14}$$

$$\Phi_2^+(\zeta) = \frac{c_3 + c_2(q_1+\zeta)}{F^+(\zeta)}. \tag{2.15}$$

Подставив выражение для $\Phi_2^+(t)$ в (2.12), получим

$$\Phi_1^+(\zeta) = -\frac{c_2q_2\zeta^m}{F^+(\zeta)} + \frac{1}{q_1+\zeta}\Big(c_1 - \frac{c_3q_2\zeta^m}{F^+(\zeta)}\Big).$$

Второе слагаемое последнего равенства в точке $\zeta = -q_1$ имеет простой полюс и его необходимо устранить, для чего выражение в скобках приравниваем к нулю при $\zeta = -q_1$. Тогда получим $c_1 = \dfrac{c_3q_2(-q_1)^m}{F^+(-q_1)}$. Подставив это значение c_1 в выражение для $\Phi_1^-(\zeta)$ и в выражение (2.14) для $\Phi_2^-(\zeta)$, получим

$$\Phi_1^-(\zeta) = c_1 = \frac{c_3q_2(-q_1)^m}{F^+(-q_1)},$$

$$\Phi_2^-(\zeta) = \frac{c_3|q_2|^2(-q_1)^m}{F^+(-q_1)\zeta^m(q_1+\zeta)} + \frac{1}{F^-(\zeta)}\Big(c_2 + \frac{c_3}{q_1+\zeta}\Big).$$

Положив сначала $c_2 = 1, c_3 = 0$, а затем, наоборот $c_2 = 0, c_3 = 1$, найдем элементы матрицы $\Phi^-(\zeta)$. Будем иметь

$$\Phi^-(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{q_2(-q_1)^m}{F^+(-q_1)} \\ \dfrac{1}{F^-(\zeta)} & \Big(\dfrac{|q_2|^2(-q_1)^m}{F^+(-q_1)\zeta^m} + \dfrac{1}{F^-(\zeta)}\Big)\dfrac{1}{q_1+\zeta} \end{pmatrix}.$$

В силу того, что $q_1(\tau) \neq 0, q_2(\tau) \neq 0$ при всех $\tau \in \Gamma$, то $\det \Phi^-(\zeta) \neq 0$.

Аналогично находятся элементы матрицы $\Phi^+(\zeta)$:

$$\Phi^+(\zeta) = \begin{pmatrix} -\dfrac{q_2\zeta^m}{F^+(\zeta)} & \dfrac{q_2}{q_1+\zeta}\Big(\dfrac{(-q_1)^m}{F^+(-q_1)} - \dfrac{\zeta^m}{F^+(\zeta)}\Big) \\ \dfrac{q_1+\zeta}{F^+(\zeta)} & \dfrac{1}{F^+(\zeta)} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $\det \Phi^+(\zeta) = \dfrac{q_2(-q_1)^m}{F^+(\zeta)F^+(-q_1)}$ также отличен от нуля.

Итак, мы имеем

$$\Phi^-(t) = \Omega_{A_2}(t)\Phi^+(t),$$

или

$$\Omega_{A_2}(t) = \Phi^-(t)[\Phi^+(t)]^{-1} \tag{2.16}$$

где

$$[\Phi^+(t)]^{-1} = \frac{F^+(t)F^+(-q_1)}{q_2(-q_1)^m} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{F^+(t)} & \dfrac{q_2}{q_1+t}\Big(\dfrac{(-q_1)^m}{F^+(-q_1)} - \dfrac{t^m}{F^+(t)}\Big) \\ \dfrac{q_1+t}{F^+(t)} & \dfrac{q_2t^m}{F^+(t)} \end{pmatrix}.$$

Рассуждая так же, как и выше, можно показать, что для матрицы $\Omega_{A_2}(1/t)$ справедливо представление

$$\Omega_{A_2}(1/t) = \Phi_1^-(t)[\Phi_1^+(t)]^{-1} \tag{2.17}$$

где

$$\Phi_1^-(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{F^-(t)} & \Big(\dfrac{|q_2|^2(-\overline{q_1})^m}{F^+(-\overline{q_1})t^m} + \dfrac{1}{F^-(t)}\Big)\dfrac{1}{\overline{q_1}+t} \\ 0 & \dfrac{\overline{q_2}(-\overline{q_1})^m}{F^+(-\overline{q_1})} \end{pmatrix},$$

$$[\Phi^+(t)]^{-1} = \frac{F^+(t)F^+(-\overline{q_1})}{\overline{q_2}(-\overline{q_1})^m}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{F^+(t)} & \dfrac{\overline{q_2}}{\overline{q_1}+t}\Big(\dfrac{(-\overline{q_1})^m}{F^+(-\overline{q_1})} - \dfrac{t^m}{F^+(t)}\Big) \\ \dfrac{\overline{q_1}+t}{F^+(t)} & \dfrac{\overline{q_2}t^m}{F^+(t)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в полученных для матриц $\Omega_{A_2}(t)$ и $\Omega_{A_2}(1/t)$ представлениях соответственно (2.15) и (2.16) первые множители аналитически продолжимы вне единичного круга, а вторые внутри, причём их определители нигде в нуль не обращаются, т.е. матрицы $\Omega_{A_2}(t)$ и $\Omega_{A_2}(1/t)$ имеют нулевые частные индексы. Следовательно оператор A_2 нётеров, т.е. достаточность граничного условия (2.8): $a(t)c(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma$ доказана.

Необходимость условия $a(t)c(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma$ доказывается от противного с помощью локального метода (см.[42]).

Пусть A_2 - оператор нётера в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, и в то же время существует точка $\tau_0 \in \Gamma$ такая, что имеет место одно из равенств $a(\tau_0) = 0$ или $c(\tau_0) = 0$.

Случай 1^0. Пусть $a(\tau_0) = 0$ и A_2 нётеров. Очевидно, оператор A_2 локального типа. Поскольку A_2 нётеров, то он локально нётеров в каждой точке $z \in \overline{D}$. В точке $\tau_0 \in \Gamma$ оператор A_2 локально эквивалентен оператору

$$A_{\tau_0} = \overline{S} + q_2(\tau_0)\overline{S}_m K,$$

Представим этот оператор в виде

$$A_{z_0} = \overline{S}(I + q_2(\tau_0)\overline{S}_{m-1}K),$$

где второй сомножитель локально обратимый оператор (см.[24]), а первый сомножитель локально не нётеров, поэтому оператор A_{z_0} не является локально нётеровым оператором. Полученное противоречие показывает, что если $a(\tau_0) = 0$, то оператор A_2 не может быть нётеровым оператором в $L^p(D)$.

Случай 2^0. Пусть $c(\tau_0) = 0$, $\tau_0 \in \Gamma$. Тогда оператор A_2 локально эквивалентен локально ненётеровому оператору (см.[28])

$$A_{z_0} = q_1(\tau_0)I + \overline{S},$$

т.е. необходимость $c(\tau) \neq 0$, $\tau \in \Gamma$ для нётеровости A_2 доказан.

Теперь осталось доказать формулу для подсчёта индекса оператора A_2. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что оператор A_2 с точностью до вполне непрерывного оператора можно представить в виде

$$A_2 = \frac{1}{1-|q_2|^2}(I - |q_2|^2\overline{B}_{m-1})[q_1 I + (1-|q_2|^2)\overline{S} - q_1 q_2 \overline{S}_{m-1}K](1 + q_2\overline{S}_{m-1}K). \tag{2.18}$$

Поскольку для всех $z \in \overline{D}, |q_1(z)| + |q_2(z)| < 1$, то из результатов работ [25],[46] следует, что операторы $I - |q_2|^2\overline{B}_{m-1}$, $I + q_2\overline{S}_{m-1}K$ обратимы в $L^p(D)$, а средний оператор $q_1 I + (1-|q_2|^2)\overline{S} - q_1 q_2\overline{S}_{m-1}K$ имеет вид исходного оператора A_2 с пониженной на единицу характеристикой $m-1$. Продолжая указанный процесс факторизации оператора, по индукции получим то, что индекс среднего оператора из (2.17) равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma q_1^m q_2 = 2mInd_\Gamma a(t) + 2Ind_\Gamma c(t).$$

b) Пусть теперь выполнено условие (2.9) теоремы 2.1. Тогда представим оператор A в виде $A = c(z)A_3$, где

$$A_3 = q_1(z)I + q_2\overline{S} + \overline{S}_m K, \tag{2.19}$$

$q_1(z) = a(z)/c(z), q_2(z) = b(z)/c(z)$, причём для всех $z \in \overline{D}$ новые коэффициенты удовлетворяют неравенству $|q_1(z)| + |q_2(z)| < 1$. Символ оператора

A_3 имеет вид

$$G_{A_3}(z,\sigma/\overline{\sigma}) = \begin{pmatrix} q_1(z)+q_2(z)\sigma/\overline{\sigma} & (\sigma/\overline{\sigma})^m \\ (\overline{\sigma}/\sigma)^m & \overline{q_1(z)}+\overline{q}_2(z)\overline{\sigma}/\sigma \end{pmatrix}.$$

По данному символу построим матрицы

$$\Omega_{A_3}(t) = \begin{pmatrix} q_1+q_2t & t^m \\ 1/t^m & \overline{q_1}+\overline{q_2}/t \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{A_2}(1/t) = \begin{pmatrix} q_1+q_2 1/t & 1/t^m \\ t^m & \overline{q_1}+\overline{q_2}t \end{pmatrix}.$$

Аналогично пункту **а)** показывается, что матрицы $\Omega_{A_3}(t), \Omega_{A_3}(t)$ имеют нулевые частные индексы. Например, для матрицы $\Omega_{A_3}(t)$ в случае $|q_1(t)| > |q_2(t)|, t\in\Gamma$ имеет место следующее представление:

$$\Omega_{A_2}(t) = \Phi^-(t)[\Phi^+(t)]^{-1}, \tag{2.20}$$

где

$$[\Phi^+(t)]^{-1} = \begin{pmatrix} q_1+q_2t & t^m \\ \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^m F^-(-q_1/q_2) & \frac{F^+(t)}{q_1+q_2t} + \left(\frac{t^m}{q_1+q_2}\right)^m \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^m F^-(-q_1/q_2) \end{pmatrix},$$

$$\Phi^-(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{q_1+q_2t}\left(\frac{1}{t^m} - \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^m \frac{F^-(-q_1/q_2)}{F^-(t)}\right) & \frac{1}{F^-(t)} \end{pmatrix},$$

причём в представлении (2.20) для матриц $\Omega_{A_2}(t)$ функция $[\Phi^+(t)]^{-1}$ аналитически продолжима внутри единичного круга, а функция $\Phi^-(t)$ вне единичного круга и их определители нигде в нуль не обращаются. Следовательно, оператор A_3 нётеров.

Необходимость условия $a(\tau_0) \neq 0, \tau_0 \in \Gamma$ следует из представления локально эквивалентного в точке τ_0 оператора A_{τ_0} :

$$A_{\tau_0} = \overline{S}(q_2(\tau_0)I + \overline{S}K).$$

Вычислим теперь индекс оператора A_3. Рассмотрим семейство нётеровых операторов

$$M_\tau = q_1(z)I + \tau q_2(z)\overline{S} + \overline{S}_m K,$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\tau \in [0,1]$. Поскольку $M_0 = q_1(z)I + \overline{S}_m K$, $M_1 = A_3$, то в силу результатов работы [46] индекс оператора A_3 равен

$$\varkappa = 2mInd_\Gamma a(\tau).$$

c) Пусть наконец выполнено условие (2.9) теоремы 2.1.. Тогда оператор A представим в виде

$$A_1 = I + q_1(z)\overline{S} + q_2(z)\overline{S}_m,$$

где $q_1(z) = b(z)/a(z), q_2(z) = c(z)/a(z)$, причём коэффициенты оператора A_1 для всех $z \in D$ удовлетворяют условию $|q_1(z)| + |q_2(z)| < 1$. В силу этого, поскольку $||S_m||_{L_2(D)} = 1$, то норма оператора $q_1(z)\overline{S} + q_2(z)\overline{S}_m$ в пространстве $L_2(D)$ будет меньше единицы, поэтому оператор A_1 обратим в $L_2(D)$. Если выполнено условие нётеровости в $L_p(D)$ при $p > 2$, то обратимость оператора A_1 вытекает из того, что $L_p(D) \subset L_2(D)$ и индекс оператора A_1 равен нулю. Если же $1 < p < 2$, то аналогичные рассуждения применимы к сопряжённому оператору, которое следует рассматривать в $L_q(D), 2 < q < \infty$. Утверждение относительно весового пространства $L^p_{\beta-2/p}(D) 1 < p < \infty$ следует из вложения пространства $L^p_{\beta-2/p}$ в L^{q_1}, где $q_1 > 1$ и из того, что условия нётеровости и индекс оператора от p не зависят.

3 Теория нётера некоторых четырёхэлементных уравнений с сингулярными интегральными операторами $\overline{S}$ и $\overline{S}_m K$

Пусть D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, I - тождественный оператор, m-целое число, $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z)$-непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции. В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D),\ 1<p<\infty, 0<\beta<\infty$ рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(\overline{S}f)(z) + d(z)(\overline{S}_m\overline{f})(z) = g(z), \quad (3.1)$$

где S_m - двумерный сингулярный интегральный оператор из 2.2.

В работе [28], оператор A изучен в случае $m=-1$ и доказана

Теорема 3.1. *Для нётеровости оператора A в пространстве $L^p(D)$ $1<p<\infty$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\triangle_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \forall z\in\overline{D}, \quad (3.2)$$

$$|\triangle_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \forall z\in\overline{D} \quad \text{и} \quad \mu(t)\neq 0 \quad \forall t\in\Gamma. \quad (3.3)$$

При этом, если выполнено условие 3.2, то оператор A имеет ограниченный обратный, а при выполнении условия 3.3 его индекс $\varkappa$ равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \mu(t),$$

где

$$\triangle_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \quad \triangle_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)}, \quad \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z).$$

3.1 Построение матрицы - символа оператора A

Прежде всего, аналогично разделу 2, устанавливаем, что оператор A из (3.1) будет нётеровым в пространстве $L_p(D)$ тогда и только тогда, когда нётеровым является операторная матрица

$$U = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)\overline{S} & b(z)I + d(z)\overline{S_m} \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m & \overline{a(z)}I + \overline{c(z)}S \end{pmatrix}$$

в векторном пространстве

$$L^{p,2}_{\beta-2/p}(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L^p_{\beta-2/p}(D)\}, \quad 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2.$$

Поскольку символ оператора S_m (см. [1]) равен $(\overline{\sigma}/\sigma)^m$ $(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$, то, согласно [21], для нётеровости операторной матрицы U в векторном пространстве $L^2_p(D)$ необходимо, чтобы $\det G_A(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, где $G_A(z,t)$ - матрица символ оператора A (см.[47], гл. VI.4):

$$G_A(z;t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)t & b(z) + d(z)t^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t}^m & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}\overline{t} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Непосредственным вычислением получим

$$detG_A(z,t) = |a(z) + c(z)t|^2 - |b(z) + d(z)t^m|^2 \neq 0 \tag{3.5}$$

для $\forall z \in \overline{D}, \ |t| = 1, $ где $t = e^{-2i\varphi} = \dfrac{\overline{\sigma}}{\sigma}$. Вводя обозначения:

$$\triangle_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \quad \triangle_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

перепишем неравенство (3.5) в виде

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) - 2Re(\overline{b}d\overline{t}^m - \overline{a}ct) \neq 0. \tag{3.6}$$

Заметим, что если неравенство (3.6) выполнено для всех $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$, то тогда $\triangle_1(z) - \triangle_2(z) \neq 0$ для $\forall z \in \overline{D}$, ибо тригонометрический полином

$$P_{2m}(\varphi) = 2Re\Big(\overline{b(z)}d(z)e^{2mi\varphi} - \overline{a(z)}c(z)e^{2i\varphi}\Big)$$

свободного члена не имеет и поэтому обязательно обращается в нуль при некотором φ: $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Введём обозначения:

$$M = \max_{|t|=1} Re(\bar{b}dt^m - \bar{a}ct),$$

$$-m = \min_{|t|=1} Re(\bar{b}dt^m - \bar{a}ct).$$

Очевидно, что неравенство (3.6) равносильно двум условиям:

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) > 2M(z), \quad \forall z \in \overline{D},$$

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) < -2m(z), \quad \forall z \in \overline{D},$$

где $M(z) > 0$, $m(z) > 0$.

Лемма 3.1. *Матрица $G_A(z,t)$ - невырожденная для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ тогда, и только тогда, когда выполнено одно из двух неравенств:*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \tag{3.7}$$

$$|\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)} \tag{3.8}$$

для всех $z \in \overline{D}$, где

$$\chi(z) = \begin{cases} M(z), & \text{если } \triangle_j(z) > 0 \\ m(z), & \text{если } \triangle_j(z) < 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

В соответствии с результатами леммы 3.1, можно доказать, что для оператора A имеются два гомотопических класса, которые можно описать в зависимости индекса двучлена $a + ct$ из (3.6), а именно:

$$\tau = \underset{|t|=1}{ind}(a(z) + c(z)t) = 0, \quad \text{либо} \quad \tau = \underset{|t|=1}{ind}(a(z) + c(z)t) = 1,$$

при этом, если коэффициенты оператора A удовлетворяют условие (3.7), то $\tau = 0$, а если выполнено условию (3.8), то $\tau = 1$.

Теорема 3.2. *Для нётеровости оператора A в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \ \forall z \in \overline{D}, \tag{3.9}$$

$$|\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \quad \forall z \in \overline{D},$$

$$b(t)(c(t))^m + (-1)^m d(t)(a(t))^m \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma. \tag{3.10}$$

При этом, если выполнено условие (3.10), то индекс оператора A равен нулю, а если выполнено условие (3.11), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{b(t)(c(t))^m + (-1)^m d(t)(a(t))^m\}. \tag{3.11}$$

3.2 Случай, когда детерминант матрицы - символа оператора A положительный

а) Пусть выполнено условие (3.10). Тогда, как отмечено выше, $\underset{|t|=1}{ind}(a+ct) = 1$ и выполнено условие (3.6). Здесь будем считать, что $\det G_A(z,t) > 0$, т.е. имеет место

$$|a(z) + c(z)t| > |b(z) + d(z)t^m|, \quad \forall z \in \overline{D}, \quad t \in \Gamma.$$

Тогда двучлен $a + ct$ внутри единичного круга $|t| = 1$ имеет один нуль $t = -\dfrac{a}{c}$ $(|c| > |a|)$. Перепишем оператор A в виде

$$A = q_1 I + b_1 K + \overline{S} + d_1 \overline{S_m} K, \tag{3.12}$$

где $q_1 = \dfrac{a}{c}$, $b_1 = \dfrac{b}{c}$, $d_1 = \dfrac{d}{c}$.

По символу данного оператора построим матрицы

$$\Omega_A^+(t) = \begin{pmatrix} q_1 + t & b_1 + d_1 t^m \\ \overline{b_1} + \overline{d_1}\bar{t}^m & \overline{q_1} + \bar{t} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_A^-(t) = \begin{pmatrix} q_1 + \bar{t} & b_1 + d_1 \overline{t^m} \\ \overline{b_1} + \overline{d_1} t^m & \overline{q_1} + t \end{pmatrix},$$

где $t = \dfrac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 + i}$, $-\infty < \sigma_1 < \infty$, а коэффициенты q_1, b_1, d_1 зависят от точки z контура Γ. Если теперь мы покажем, что матрицы $\Omega_A^{\pm}(t)$ факторизуются с нулевыми частными индексами, то из [21] будет следовать, что оператор нётеров в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$. С этой целью для матрицы $\Omega_A^{\pm}(t)$ построим задачу Римана для аналитических в единичном круге $|t| < 1$ функций $(\Phi_1(\xi), \Phi_2(\xi))$:

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = (q_1 + t)\Phi_1^+(t) + (b_1 + d_1 t^m)\Phi_2^+(t), \\ \Phi_2^-(t) = (\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})\Phi_1^+(t) + (q_1 + \frac{1}{t^m})\Phi_2^+(t), \end{cases}, \tag{3.13}$$

где $\Phi_{1,2}^+(t)$, $\Phi_{1,2}^-(t)$ - неизвестные функции точки окружности $|t| = 1$, аналитически продолжимые по t соответственно внутри и вне единичного круга.

Займёмся решением задачи Римана (3.13). В первом равенстве системы (3.13) слева стоит аналитически продолжимая вне единичного круга функция, а справа аналитически продолжимая внутри единичного круга функция. По теореме Лиувилля эта функция равна постоянной, то есть $\Phi_1^-(\zeta) = c_1$. Тогда

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{c_1}{q_1 + \zeta} - \frac{b_1 + d_1\zeta^m}{q_1 + \zeta}\Phi_2^+(\zeta).$$

Поставив значение $\Phi_1^+(t)$ во второе равенство системы (3.13) и учитывая, что $detG_A^+(t) = |q_1 + t|^2 - |b_1 + d_1 t|^2$, можно факторизовать в виде $\dfrac{F^+(t)}{F^-(t)}$, где $F^+(t) \neq 0$, $F^-(t) \neq 0$ - аналитически продолжимые соответственно внутри и вне единичного круга функции, получим

$$\Phi_2^-(t) = \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})c_1}{q_1 + t} + \frac{F^+(t)}{F^-(t)(q_1 + t)}\Phi_2^+(t). \tag{3.14}$$

Отсюда

$$F^-(t)\Big(\Phi_2^-(t) - \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})c_1}{q_1 + t}\Big) = \frac{F^+(t)}{q_1 + t}\Phi_2^+(t).$$

Левая часть последнего равенства аналитически продолжима вне единичного круга функций, за исключением точки $\zeta = -q_1$, где она имеет простой полюс, поэтому из теоремы Лиувилля будет следовать:

$$F^-(t)\Big(\Phi_2^-(t) - \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})c_1}{q_1 + t}\Big) = \frac{F^+(t)}{q_1 + t}\Phi_2^+ \equiv c_2 + \frac{c_3}{q_1 + t},$$

то есть

$$\Phi_2^-(\zeta) = \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{\zeta^m})c_1}{q_1 + \zeta} + \frac{1}{F^-(\zeta)}(c_2 + \frac{c_3}{q_1 + \zeta}), \tag{3.15}$$

$$\Phi_2^+(\zeta) = \frac{c_3 + c_2(q_1+\zeta)}{F^+(\zeta)}.$$

Поставив выражения для $\Phi_2^+(\zeta)$ в (3.11), получим

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{c_1}{q_1+\zeta} - \frac{b_1 + d_1\zeta^m}{F^+(\zeta)(q_1+\zeta)}(c_3 + c_2(q_1+\zeta)) = -\frac{c_2}{F^+(\zeta)}(b_1 + d_1\zeta^m) +$$

$$+\frac{1}{q_1+\zeta}\Big[c_1 - \frac{b_1 + d_1\zeta^m}{F^+(\zeta)}c_3\Big].$$

Функция $\Phi_1^+(\zeta)$ в точке $\zeta = -q_1$ имеет простой полюс и его необходимо устранить, для чего потребуем, чтобы выражение в квадратной скобке справа в точке $\zeta = -q_1$ обращалось в ноль. Тогда получим $c_1 = \dfrac{b_1 + d_1(-q_1)^m}{F^+(-q_1)}c_3$. Поставив это значение c_1 в выражение для $\Phi_1^-(\zeta)$ и в выражение $\Phi_2^-(\zeta)$ из (3.15), получим

$$\Phi_1^-(\zeta) = \frac{b_1 + (-1)^m d_1 q_1^m}{F^+(-q_1)}c_3,$$

$$\Phi_2^-(\zeta) = \frac{(b_1 + (-1)^m d_1 q_1^m)(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{\zeta^m})c_3}{q_1+\zeta} + \frac{1}{F^-(\zeta)}(c_2 + \frac{c_3}{q_1+\zeta}).$$

Выбрав сначала $c_2 = 1,\ c_3 = 0,$ а затем $c_2 = 0,\ c_3 = 1$, найдём элементы матрицы $\Phi^-(\zeta)$ и $\Phi^+(\zeta)$

$$\Phi^-(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_1+(-1)^m d_1 q_1^m}{F^+(-q_1)} \\ \frac{1}{F^-(\zeta)} & \frac{(b_1+(-1)^m d_1 q_1^m)(\overline{b_1}+\frac{\overline{d_1}}{\zeta^m})}{q_1+\zeta} + \frac{1}{F^-(\zeta)(q_1+\zeta)} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^+(\zeta) = \begin{pmatrix} -\frac{b_1+d_1\zeta^m}{F^+(\zeta)} & \frac{1}{q_1+\zeta}\Big[\frac{b_1+(-1)^m d_1 q_1^m}{F^+(-q_1)} - \frac{b_1+d_1\zeta^m}{F^+(\zeta)}\Big] \\ \frac{q_1+\zeta^m}{F^+(\zeta)} & \frac{1}{F^+(\zeta)} \end{pmatrix}.$$

При этом поскольку

$$\det \Phi^{-}(\zeta) = \frac{b_1 + (-1)^m d_1 q_1^m}{F^{-}(\zeta)F^{+}(-Q_1)},$$

то необходимо требовать, чтобы для всех $t \in \Gamma$ выполнялось условие

$$b_1(\zeta) + (-1)^m d_1(\zeta) q_1^m(\zeta) \neq 0, \quad \text{где} \quad \zeta \in \Gamma.$$

В силу сказанного,

$$\det \Phi^{+}(\zeta) = -\frac{b_1(\zeta) + (-1)^m d_1(\zeta) q_1^m(\zeta)}{F^{+}(\zeta)F^{+}(-q_1)} \neq 0 \ \text{ для } \ \forall \zeta \in \Gamma.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$b(\zeta)\Big(c(\zeta)\Big)^m + (-1)^m d(\zeta)\Big(a(\zeta)\Big)^m \neq 0 \ \text{ для } \ \forall \zeta \in \Gamma \tag{3.16}$$

мы имеем

$$\Phi^{-}(\zeta) = \Omega_A^{+}(\zeta)\Phi^{+}(\zeta)$$

или

$$\Omega_A^{+}(\zeta) = \Phi^{-}(\zeta)\Big(\Phi^{+}(\zeta)\Big)^{-1}. \tag{3.17}$$

Аналогично доказывается, что при условии (3.16) имеет место представление

$$\Omega_A^{-}(\zeta) = \Phi_*^{-}(\zeta)\Big(\Phi_*^{+}(\zeta)\Big)^{-1}. \tag{3.18}$$

В полученных для матрицы $\Omega_A^{\pm}(\zeta)$ представлениях (3.17), (3.18) первые множители аналитически продолжимы вне единичного круга, а вторые внутри, причём их определители нигде в нуль не обращаются, то есть матрицы $\Omega_A^{\pm}(\zeta)$ имеют нулевые частные индексы. Следовательно оператор A нётеров, то есть достаточность граничного условия (3.11) доказана. Необходимость условия (3.11) доказывается от противного с помощью локального метода (см. [42]).

3.3 Случай, когда детерминант матрицы-символа оператора A отрицательный

Здесь будем считать, что $\det G_A(z,t) < 0$, т.е. выполнено неравенство:

$$|a(z) + c(z)t| < |b(z) + d(z)t^m|, \quad \underset{|t|=1}{Ind}(b + dt^m) = m,$$

то есть $|b| < |d|$, и двучлен $b + dt^m$ внутри единичного круга имеет m нулей $t^m = -\dfrac{b}{d}$. В этом случае оператор A перепишем в виде:

$$A = a_2 I + q_2 K + c_2 \overline{S} + \overline{S_m} K,$$

где $a_2 = \dfrac{a}{d}$, $q_2 = \dfrac{b}{d}$, $c_2 = \dfrac{c}{d}$.

По символу данного оператора построим матрицу $\Omega_A^+(t)$. Для матрицы $\Omega_A^+(t)$ построим задачу Римана для аналитических в единичном круге $|t| = 1$ функций $(\Phi_1(\zeta), \Phi_2(\zeta))$:

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = (a_2 + c_2 t)\Phi_1^+ + (q_2 + t^m)\Phi_2^+ \\ \Phi_2^-(t) = (\overline{q_2} + \overline{t^m})\Phi_1^+ + (\overline{a_2} + \overline{c_2}\overline{t})\Phi_2^+ \end{cases}, \tag{3.19}$$

В первом равенстве системы (3.19) слева стоит аналитически продолжимая вне единичного круга функция, а справа аналитически продолжимая внутри единичного круга функция. По теореме Лиувилля, эта функция равна постоянной, то есть $\Phi_1^-(\zeta) = c_1$. Тогда

$$\Phi_2^+(\zeta) = \frac{c_1}{q_2 + t^m} - \frac{a_2 + c_2 t}{q_2 + t^m}\Phi_1^+(\zeta).$$

Далее имеем

$$F^-(t)\left[\Phi_2^-(t) - \frac{c_1(\overline{a_2} + \frac{\overline{c_2}}{t})}{q_2 + t^m}\right] = \frac{F^+}{q_2 + t^m}\Phi_1^+,$$

где левая часть аналитически продолжимая вне единичного круга, а правая часть внутри единичного круга с m-полюсами в точках q_{jm}:

$$q_{jm} = \sqrt[m]{|q_2|}e^{\frac{i(\varphi+2j\pi)}{m}}, \quad j = 1, 2, ..., m., \quad \varphi = arg(-q_2).$$

Поэтому эта функция по теореме Лиувилля является аналитической на всей плоскости с m-полюсами в точках q_{jm} $(j = 1, 2, ...m)$. Тогда

$$\Phi_2^-(\zeta) = \frac{c_1(\overline{a_2} + \frac{\overline{c_2}}{\zeta})}{q_2 + \zeta^m} + \frac{1}{F^-(\zeta)}\Big[c_2 + \sum_{j=1}^{m} \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{2j}}\Big],$$

$$\Phi_1^+ = -\frac{q_2 + \zeta^m}{F^+(\zeta)}\Big[c_2 + \sum_{j=1}^{m} \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{2j}}\Big]$$

и далее

$$\Phi_2^+(\zeta) = \frac{(a_2 + c_2\zeta)}{F^+(\zeta)}c_2 + \frac{c_1}{q_2 + \zeta^m} + \frac{a_2 + c_2\zeta}{F^+(\zeta)}\sum_{j=1}^{m} \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jm}}.$$

Функция $\Phi_2^+(\zeta)$ имеет в точках q_{jm} $(j = 1, 2, ..., m)$ полюса. Чтобы устранить их, представим

$$q_2 + \zeta^m = \prod_{j=1}^{m}(\zeta - q_{jm})$$

и потребуем от свободных констант c_1, c_{2+j} $(j = 1, 2, ..., m)$, чтобы они удовлетворяли m требованиям:

$$\frac{c_1}{\prod\limits_{k\neq j}(q_{jm} - q_{km})} = -\frac{a_2 + c_2 q_{jm}}{F^+(q_{jm})}c_{2+j}, \; j = 1, 2, 3, \cdots, m.$$

Теперь, предположив, что выполнены неравенства

$$a_2 + c_2 q_{jm} \neq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \quad (j = 1, 2, ..., m) \tag{3.20}$$

найдём константы c_{2+j} через c_1

$$c_{2+j} = -\frac{F^+(q_{jm})c_1}{(a_2 + c_2 q_{jm})\prod\limits_{k\neq j}(q_{jm} - q_{km})}, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Заметим, что условия (3.20) можно записать в виде

$$\prod_{j=1}^{m}(a_2 + c_2 \sqrt[m]{|q_2|}e^{i\frac{\varphi+2j\pi}{m}}) \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma,$$

или же

$$(a_2(t))^m d(t) + (-1)^m (c_2(t))^m b(t) \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma. \tag{3.21}$$

Таким образом, имеем

$$\Phi^-(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{F-(\zeta)} & \dfrac{\overline{a_2}}{q_2+\zeta} - \dfrac{1}{F-(\zeta)} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \dfrac{F^+(q_{jm})}{(a_2+c_2q_{jm})\prod\limits_{k\neq j}\left(q_{jm} - \dfrac{a_2+c_2\zeta}{Ft(\zeta)}\right)} \end{pmatrix}$$

$$\Phi^+(\zeta) = \begin{pmatrix} -\dfrac{q_2+\zeta^m}{F^+(\zeta)} & \dfrac{a_2+c_2}{F^+(\zeta)} \\ \dfrac{q_2+\zeta^m}{F^+(\zeta)} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\dfrac{c_{2+j}}{\zeta-q_{1m}} \quad \dfrac{1}{q_2+\zeta^m} + \dfrac{a_2+c_2\zeta}{F^+(\zeta)}\sum_{j=1}^{m}\dfrac{c_{2+j}}{\zeta-q_j} \end{pmatrix}$$

и в этом случае, также при выполнении граничного условия (3.10) матрицы $\Omega_A^{+-}(t)$ факторизуются с нулевыми частными индексами, то есть оператор A нётеров $L^p(D), \quad 1 < p < \infty$.

Теперь остаётся доказать формулу для вычисления индекса (3.11).

Доказательство проведем по методу математической индукции по параметру m.

Пусть в (1) $m = 1$, то есть оператор A из (3.12) имеет вид

$$A = q_1(z)I + b_1(z)K + \bar{S} + d_1(z)\bar{S}K,$$

тогда, как показано в работе [28], индекс оператора A равен

$$\kappa = 2Ind_\Gamma(b_1(t) - d_1(t)q_1(t)) = 2Ind_\Gamma(b(t)c(t) - a(t)d(t)).$$

Пусть теперь при $m = n-1$ указанная формула для индекса оператора A справедлива, то есть имеет место

$$\kappa = 2Ind_\Gamma(b_1(t)+(-1)^{n-1}d_1(t)q_1^{n-1}(t)) = 2Ind_\Gamma(b(t)c^{n-1}(t)+(-1)^{n-1}d(t)a^{n-1}(t)).$$

Покажем, что тогда для оператора A справедлива формула (3.12). Представим оператор A в виде

$$\begin{aligned} A \equiv q_1(z)I + b_1(z)K + \bar{S} + d_1(z)\bar{S}_{n-1} = \\ = q_1(z)I + b_1(z)K + \bar{S}(I + d_1(z)\bar{S}_{n-1}K). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Поскольку $|d_1(z)| \neq 1$, то, как известно [28], оператор

$$T_1 = I - d_1\bar{S}_{n-1}K$$

в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ обратим.

Умножив обе части (3.22) справа на обратный оператор T_1 с точностью до вполне непрерывного оператора, получим:

$$AT_1 = (q_1I + b_1K)(I - d_1\bar{S}_{n-1}K) + \bar{S}(I + d_1\bar{S}_{n-1}K)(I - d_1\bar{S}_{n-1}K).$$

Воспользовавшись формулой композиций операторов

$$(S_{n-1}\overline{S}_{n-1}f)(z) = f(z) - \iint\limits_{|\zeta|<1} B_{n-1}(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta + T,$$

где $B_{n-1}(z,\overline{\zeta})$ - керн-функция Бергмана порядка $n-1$ (см.[24]), а T - вполне непрерывный оператор, получим

$$AT_1 = (q_1I + b_1K)(I - d_1\bar{S}_{n-1}K) + \bar{S}[(I - |d_1|^2) + |d_1|^2\bar{B}_{n-1}] =$$

$$= (q_1I + b_1K + \bar{S} - q_1d_1\bar{S}_{n-1}K) - b_1d_1S_{n-1}K - |d_1|^2\bar{S}(I - \bar{B}_{n-1}).$$

Оператор в первой скобке справа имеет вид оператора А с параметром $n-1$ и, следовательно, по предположению индукции его индекс равен:

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}(b_1 + (-1)^{n-1} q_1 q_1^{n-1} d_1) = 2Ind_{\Gamma}(b_1 + (-1)^{n-1} q_1^n d_1).$$

Построив теперь семейство нётеровых операторов

$$T_\lambda = (q_1 I + b_1 K + \bar{S} - q_1 d_1 \bar{S}_{n-1} K) - \lambda d_1 (b_1 S_{n-1} K) - \bar{d}_1 \bar{S}(I - D_{n-1}),$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$, мы сопоставим оператор AT_1 нётревому оператору

$$A_0 = q_1 I + b_1 K + \bar{S} - q_1 d_1 \bar{S}_{n-1} K$$

с индексом $\varkappa$ из (2.12). Формула для индекса доказана.

б) Пусть теперь выполнено условие (3.11) теоремы 3.1. Тогда по схеме пункта $a)$ доказывается, что матрицы-символы $\Omega_A^{\pm}(t)$ безусловно факторизуются с нулевыми частными индексами. В этом случае индекс оператора равен нулю, что доказывается с помощью гомотопии оператора.

4 Теория нётера некоторых сингулярных интегральных уравнений с разными чётными характеристеками

Пусть D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, I - тождественный оператор, m - целое число, $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции. В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D),\quad 1<p<\infty, 0<\beta<2$ будем рассматривать уравнение

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(\overline{S_n}f)(z) + d(z)(\overline{S}_m\overline{f})(z) = g(z), \quad (4.1)$$

где S_m - двумерный сингулярный интегральный оператор из 2.2.

Отметим, что результаты для оператора A из (4.1) в случае, когда $n = -m$ следуют из работы [31].

4.1 Построение матрицы - символа оператора A

Прежде всего устанавливаем, что оператор A будет нётеровым в пространстве $L_p(D), 1<p<\infty$ тогда, и только тогда, когда нётеровым является

$$U = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)\overline{S}_n & b(z)I + d(z)\overline{S_m} \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m & \overline{a(z)}I + \overline{c(z)}S_n \end{pmatrix}$$

в векторном пространстве

$$L^{p,2}_{\beta-2/p}(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L^p_{\beta-2/p}(D)\}, \quad 1<p<\infty, 0<\beta<2.$$

Поскольку символ оператора S_m равен $\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m$ ($\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$), то, согласно [21], для нётеровости операторной матрицы U необходимо, чтобы $\det G_A(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, где $G_A(z,t)$ - матрица - символ оператора A

$$G_A(z;t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)t^n & b(z) + d(z)t^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t}^m & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}\overline{t}^n \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением получим

$$detG_A(z,t) = |a(z) + c(z)t^n|^2 - |b(z) + d(z)t^m|^2 \neq 0 \qquad (4.2)$$

для $\forall z \in \overline{D},\ |t| = 1,$ где $t = e^{2i\varphi} = \frac{\sigma}{\overline{\sigma}}$. Вводя обозначения

$$\triangle_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \quad \triangle_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

перепишем неравенство (4.2) в виде

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) - 2Re(\overline{b(z)}d(z)t^m - \overline{a(z)}c(z)t^n) \neq 0. \qquad (4.3)$$

Заметим, что если неравенство (4.3) выполнено для всех $z \in \overline{D},\ |t| = 1,$ то тогда $\triangle_1(z) - \triangle_2(z) \neq 0$ для $\forall z \in \overline{D}$, ибо тригонометрический полином

$$P_{2m}(\varphi) = 2Re\left(\overline{b(z)}d(z)e^{2mi\varphi} - \overline{a(z)}c(z)e^{2ni\varphi}\right)$$

свободного члена не имеет и поэтому обязательно обращается в ноль при некотором φ: $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Введём обозначения

$$M = \max_{|t|=1} Re(\overline{b}dt^m - \overline{a}ct^n),$$

$$-m=\min_{|t|=1} Re(\overline{b}dt^m-\overline{a}ct^n).$$

Очевидно, что неравенство (6) равносильно двум условиям

$$\triangle_1(z)-\triangle_2(z)>2M(z),\quad \forall z\in\overline{D},$$

$$\triangle_1(z)-\triangle_2(z)<-2m(z),\quad \forall z\in\overline{D},$$

где здесь $M(z)>0,\ \ -m(z)<0$.

Лемма 4.1. *Матрица* $G_A(z,t)$ *- невырождена для всех* $z\in\overline{D}$ *и* $|t|=1$ *тогда, и только тогда, когда выполнено одно из двух неравенств*

$$|\triangle_1(z)|>\chi(z)+\sqrt{\chi^2(z)+\triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \tag{4.4}$$

$$|\triangle_2(z)|>\chi(z)+\sqrt{\chi^2(z)+\triangle_1(z)\triangle_2(z)} \tag{4.5}$$

для всех $z\in\overline{D}$, *где*

$$\chi(z)=\begin{cases} M(z), & \text{если } \triangle_j(z)>0\\ m(z), & \text{если } \triangle_j<0,\quad j=1,2.\end{cases}$$

В соответствии с результатами леммы (4.1), легко устанавливается, что для оператора A имеется два гомотопических класса, которые можно описать в зависимости индекса двучлена $a+ct^n$, а именно

$$\tau=\underset{|t|=1}{ind}(a(z)+c(z)t^n)=0,\qquad \text{либо}\quad \tau=\underset{|t|=1}{ind}(a(z)+c(z)t^n)=n,$$

при этом, если коэффициенты оператора A удовлетворяют условию (4.4), то $\tau=0$, а если выполнено условие (4.5), то $\tau=n$.

Теорема 4.1. *Для нётеровости оператора* A *в пространстве* $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $\ 1<p<\infty, 0<\beta<2$ *необходимо и достаточно, чтобы* *выполнялось одно из условий*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \ \forall z \in \overline{D}, \tag{4.6}$$

$$|\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \ \ \forall z \in \overline{D},$$

$$(b(\tau))^n(c(\tau))^m + (-1)^{nm}(d(\tau))^n(a(\tau))^m \neq 0, \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{4.7}$$

При этом если выполнено условие (4.6), то индекс оператора A равен нулю, а если выполнено условие (4.7, то индекс оператора A равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{(b(\tau))^n(c(\tau))^m + (-1)^{nm}(d(\tau))^n(a(\tau))^m\}. \tag{4.8}$$

4.2 Случай, когда детерминант матрицы-символа оператора A положительный

а) Пусть выполнено условие (4.7). Тогда, как отмечено выше, $\underset{|t|=1}{ind}(a+ct^n) = n$ и выполнено условие (4.2). Здесь будем считать, что

$$|a(z) + c(z)t^n| > |b(z) + d(z)t^m|, \ \ \forall z \in \overline{D}, \ \ t \in \Gamma.$$

Тогда двучлен $a + ct^n$ внутри единичного круга $|t| = 1$ имеет n - кратный нуль $t^n = -\dfrac{a}{c}$ ($|c| > |a|$). Перепишем оператор A в виде

$$A = q_1I + b_1K + \overline{S_n} + d_1\overline{S}_mK, \tag{4.9}$$

где $q_1 = \frac{a}{c}$, $b_1 = \frac{b}{c}$, $d_1 = \frac{d}{c}$. По символу данного оператора построим матрицы

$$\Omega_A^+(t) = \begin{pmatrix} q_1 + t^n & b_1 + d_1 t^m \\ \overline{b_1} + \overline{d_1}\overline{t}^m & \overline{q_1} + \overline{t}^n \end{pmatrix},$$

$$\Omega_A^-(t) = \begin{pmatrix} q_1 + \overline{t}^n & b_1 + d_1 \overline{t^m} \\ \overline{b_1} + \overline{d_1} t^m & \overline{q_1} + t^n \end{pmatrix},$$

где $t = \dfrac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 + i}$, $-\infty < \sigma_1 < \infty$, а коэффициенты $q_1,\ b_1,\ d_1$ зависят от точки z контура Γ. Если теперь мы покажем, что матрицы $\Omega_A^{\pm}(t)$ факторизуются с нулевыми частными индексами, то из [21] будет следовать, что оператор нётеров в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$. С этой целью для матрицы $\Omega_A^{\pm}(t)$ построим задачу Римана для аналитических в единичном круге $|t| < 1$ функций $(\Phi_1(\xi), \Phi_2(\xi))$:

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = (q_1 + t^n)\Phi_1^+(t) + (b_1 + d_1 t^m)\Phi_2^+(t), \\ \Phi_2^-(t) = (\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})\Phi_1^+(t) + (q_1 + \frac{1}{t^n})\Phi_2^+(t), \end{cases} \tag{4.10}$$

где $\Phi^+_{1,2}(t)$, $\Phi^-_{1,2}(t)$ - неизвестные функции точки окружности $|t| = 1$, аналитически продолжимые по t соответственно внутри и вне единичного круга.

Займёмся решением задачи Римана (4.10). В первом равенстве системы (4.10) слева стоят аналитически продолжимая вне единичного круга функция, а справа аналитически продолжимая внутри единичного круга функция. По теореме Лиувилля эта функция равна постоянной, то есть $\Phi_1^-(\zeta) = c_1$. Тогда

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{c_1}{q_1 + \zeta^n} - \frac{b_1 + d_1\zeta^m}{q_1 + \zeta^n}\Phi_2^+(\zeta). \tag{4.11}$$

Поставив значение $\Phi_1^+(t)$ во второе равенство системы (4.10), и учитывая, что $\det G_A^+(t) = |q_1+t^n|^2 - |b_1+d_1t^m|^2$, можно факторизовать в виде $\dfrac{F^+(t)}{F^-(t)}$, где $F^+(t) \neq 0$, $F^-(t) \neq 0$ - аналитически продолжимые соответственно внутри и вне единичного круга функции, получим

$$\Phi_2^-(t) = \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})c_1}{q_1 + t^n} + \frac{F^+(t)}{F^-(t)(q_1 + t^n)}\Phi_2^+(t). \qquad (4.12)$$

Отсюда

$$F^-(t)\Big(\Phi_2^-(t) - \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})c_1}{q_1 + t^n}\Big) = \frac{F^+(t)}{q_1 + t^n}\Phi_2^+(t).$$

Левая часть последнего равенства аналитически продолжима вне единичного круга функций, а правая часть внутри единичного круга, за исключением точек q_{jn}:

$$q_{jn} = \sqrt[n]{|q_1|}e^{\frac{i(\varphi+2j\pi)}{n}}, \quad j = 1, 2, ..., n., \quad \varphi = arg(-q_1),$$

где она имеет n - кратный полюс $\zeta^n = -q_1$, поэтому из теоремы Лиувилля будет следовать

$$F^-(t)\Big(\Phi_2^-(t) - \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})c_1}{q_1 + t^n}\Big) = \frac{F^+(t)}{q_1 + t^n}\Phi_2^+(t) \equiv \Big[c_2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}}\Big],$$

то есть

$$\Phi_2^-(\zeta) = \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{\zeta^m})c_1}{q_1 + \zeta^n} + \frac{1}{F^-(\zeta)}\Big[c_2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}}\Big], \qquad (4.13)$$

$$\Phi_2^+(\zeta) = \frac{(q_1 + \zeta^n)\Big[c_2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}}\Big]}{F^+(\zeta)}.$$

Поставив выражения для $\Phi_2^+(\zeta)$ в (4.11), получим

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{c_1}{q_1 + \zeta^n} - \frac{(b_1 + d_1\zeta^m)\Big[c_2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}}\Big]}{F^+(\zeta)}.$$

Функция $\Phi_1^+(\zeta)$ в точке $\zeta^n = -q_1$ имеет полюс, который необходимо устранить, для чего, представив

$$\zeta^n + q_1 = \prod_{j=1}^{n}(\zeta - q_{jn}),$$

где

$$q_{jn} = \sqrt[n]{|q_1|}e^{i\frac{(\varphi+2j\pi)}{n}}), j = 1, 2, \ldots, n, \quad \varphi = \arg(-q_1),$$

потребуем, чтобы выражения при полюсах $\zeta = q_{jn}$ обращались в ноль, т.е. чтобы свободные константы $c_1, c_{2+j}\,(j = 1, 2, ..., n)$ удовлетворяли n требованиям:

$$\frac{c_1}{\prod\limits_{k\neq j}(q_{jn} - q_{kn})} = -\frac{b_1 + d_1 q_{jn}^m}{F^+(q_{jn})}c_{2+j},\; j = 1, 2, 3, \cdots, n.$$

Теперь, предположив, что $b_1 + d_1 q_{jn}^m \neq 0$ на границе Γ области D, имеем

$$c_{2+j} = -\frac{c_1 F^+(q_{jn})}{(b_1 + d_1 q_{jn}^m)\prod\limits_{k\neq j}(q_{jn} - q_{kn})}, j = 1, 2, ..., n.$$

Заметим, что условия на границе Γ можно записать в виде

$$\prod_{j=1}^{n}(b_1(\tau) + d_1(\tau)\sqrt[n]{|q_1(\tau)|^m}e^{i\frac{m(\varphi+2j\pi)}{n}}) \neq 0, \quad \varphi = \arg(-q_1(\tau)), \quad \forall\tau \in \Gamma,$$

или же

$$(b(\tau))^n(c(\tau))^m + (-1)^{nm}(d(\tau))^n(a(\tau))^m \neq 0, \quad \forall\tau \in \Gamma.$$

Итак, для функции $\Phi_{12}^{\pm}(\zeta)$ получили следующие выражения:

$$\Phi_1^-(\zeta) = c_1, \quad \Phi_2^-(\zeta) = \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{\zeta^m})c_1}{q_1 + \zeta^n} + \frac{1}{F^-(\zeta)}(c_2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}}),$$

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{c_1}{q_1+\zeta^n} - \frac{(b_1+d_1\zeta^m)\Big[c_2 + \sum_{j=1}^n \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}}\Big]}{F^+(\zeta)},$$

$$\Phi_2^+(\zeta) = \frac{(q_1+\zeta^n)\Big[c_2 + \sum_{j=1}^n \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}}\Big]}{F^+(\zeta)}.$$

Теперь, выбрав сначала $c_1 = 0,\ c_2 = 1,$ а затем $c_1 = 1,\ c_2 = 0$, найдем элементы матрицы $\Phi^-(\zeta)$ и $\Phi^+(\zeta)$:

$$\Phi^-(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{F^-(\zeta)} & \frac{\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{\zeta^m}}{q_1+\zeta^n} + \frac{\sum_{j=1}^n \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}}}{F^-(\zeta)} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^+(\zeta) = \begin{pmatrix} -\frac{b_1+d_1\zeta^m}{F^+(\zeta)} & \frac{1}{q_1+\zeta^n} - \frac{b_1+d_1\zeta^m}{F^+(\zeta)}\sum_{j=1}^n \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}} \\ \frac{q_1+\zeta^n}{F^+(\zeta)} & \frac{(q_1+\zeta^n)\sum_{j=1}^n \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}}}{F^+(\zeta)} \end{pmatrix},$$

$$(\Phi^+(\zeta))^{-1} = \begin{pmatrix} -(q_1+\zeta^n)\sum_{j=1}^n \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}} & \frac{F^+(z)}{q_1+\zeta^n} - (b_1+d_1\zeta^m)\sum_{j=1}^n \frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jn}} \\ q_1+\zeta^n & b_1+d_1\zeta^m \end{pmatrix}.$$

При этом

$$det\Phi^-(\zeta) = \frac{1}{F^-(\zeta)} \neq 0, \quad det\Phi^+(\zeta) = -\frac{1}{F^+(\zeta)} \neq 0, \text{для } \forall\zeta \in D.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$(b(\tau))^n(c(\tau))^m + (-1)^{nm}(d(\tau))^n(a(\tau))^m \neq 0, \quad \forall\tau \in \Gamma \tag{4.14}$$

мы имеем

$$\Phi^-(\zeta) = \Omega_A^+(\zeta)\Phi^+(\zeta),$$

или

$$\Omega_A^+(\zeta) = \Phi^-(\zeta)\Big(\Phi^+(\zeta)\Big)^{-1}. \tag{4.15}$$

Аналогично доказывается, что при условии (4.14) имеет место представление

$$\Omega_A^-(\zeta) = \Phi_*^-(\zeta)\Big(\Phi_*^+(\zeta)\Big)^{-1}. \tag{4.16}$$

В полученных для матрицы $\Omega_A^\pm(\zeta)$ представлениях (4.15), (4.16) первые множители аналитически продолжимы вне единичного круга, а вторые-внутри, причём их определители нигде в ноль не обращаются, то есть матрицы $\Omega_A^\pm(\zeta)$ имеют нулевые частные индексы. Следовательно, оператор A нётеров, то есть достаточность граничного условия (10) доказана. Необходимость условия (4.6) доказывается от противного с помощью локального метода (см. [42]).

4.3 Случай, когда детерминант матрицы-символа оператора A отрицательный

Здесь будем считать, что выполнено неравенство

$$|a(z) + c(z)t^n| < |b(z) + d(z)t^m|, \quad \underset{|t|=1}{Ind}(b + dt^m) = m,$$

то есть $|b| < |d|$, и двучлен $b + dt^m$ внутри единичного круга имеет m нулей $t^m = -\dfrac{b}{d}$. В этом случае оператор A перепишем в виде

$$A = a_2 I + q_2 K + c_2\overline{S_n} + \overline{S_m}K,$$

где $a_2 = \dfrac{a}{d}$, $q_2 = \dfrac{b}{d}$, $c_2 = \dfrac{c}{d}$.

По символу данного оператора построим матрицы $\Omega_A^\pm(t)$. Для матрицы $\Omega_A^+(t)$ построим задачу Римана для аналитических в единичном круге $|t| = 1$ функций $(\Phi_1(\zeta), \Phi_2(\zeta))$:

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = (a_2 + c_2 t^n)\Phi_1^+ + (q_2 + t^m)\Phi_2^+ \\ \Phi_2^-(t) = (\overline{q_2} + \overline{t^m})\Phi_1^+ + (\overline{a_2} + \overline{c_2}\overline{t^n})\Phi_2^+ \end{cases}, \tag{4.17}$$

В первом равенстве системы (4.17) слева стоит аналитически продолжимая вне единичного круга функция, а справа аналитически продолжимая внутри единичного круга функция. По теореме Лиувилля, эта функция равна постоянной, то есть $\Phi_1^-(\zeta) = c_1$. Тогда

$$\Phi_2^+(t) = \frac{c_1}{q_2 + t^m} - \frac{a_2 + c_2 t^n}{q_2 + t^m}\Phi_1^+(t).$$

Далее имеем

$$F^-(t)\Big[\Phi_2^-(t) - \frac{c_1(\overline{a_2} + \frac{\overline{c_2}}{t^n})}{q_2 + t^m}\Big] = \frac{F^+}{q_2 + t^m}\Phi_1^+,$$

где левая часть аналитически продолжимая вне единичного круга, а правая часть-внутри единичного круга с m-полюсами в точках q_{jm}:

$$q_{jm} = \sqrt[m]{|q_2|}e^{\frac{i(\varphi + 2j\pi)}{m}}, \quad j = 1, 2, ..., m., \quad \varphi = arg(-q_2).$$

Поэтому эта функция по теореме Лиувилля является аналитической на всей плоскости с m-полюсами в точках q_{jm} $(j = 1, 2, ...m)$. Тогда

$$\Phi_2^-(\zeta) = \frac{c_1(\overline{a_2} + \frac{\overline{c_2}}{\zeta^n})}{q_2 + \zeta^m} + \frac{1}{F^-(\zeta)}\Big[c_2 + \sum_{j=1}^{m}\frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{2j}}\Big],$$

$$\Phi_1^+(\zeta) = -\frac{q_2 + \zeta^m}{F^+(\zeta)}\Big[c_2 + \sum_{j=1}^{m}\frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{2j}}\Big]$$

и далее

$$\Phi_2^+(\zeta) = \frac{(a_2 + c_2\zeta^n)}{F^+(\zeta)}c_2 + \frac{c_1}{q_2 + \zeta^m} + \frac{a_2 + c_2\zeta^n}{F^+(\zeta)}\sum_{j=1}^{m}\frac{c_{2+j}}{\zeta - q_{jm}}.$$

Функция $\Phi_2^+(\zeta)$ имеет в точках q_{jm} $(j=1,2,...,m)$ полюс. Чтобы устранить их, представим

$$q+\zeta^m=\prod_{j=1}^{m}(\zeta-q_{jm})$$

и потребуем от свободных констант c_1, c_{2+j} $(j=1,2,...,m)$, чтобы они удовлетворяли m требованиям:

$$\frac{c_1}{\prod\limits_{k\neq j}(g_{jm}-g_{km})}=-\frac{a_2+c_2q_{jm}^n}{F^+(q_{jm})}c_{2+j},\ j=1,2,3,\cdots,m.$$

Теперь, предположив, что выполнены неравенства

$$a_2+c_2q_{jm}^n\neq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (j=1,2,...,m), \tag{4.18}$$

найдем константы c_{2+j} через c_1

$$c_{2+j}=-\frac{F^+(q_{jm})c_1}{(a_2+c_2q_{jm}^n)\prod\limits_{k\neq j}(q_{jm}-q_{km})}, \quad j=1,2,...,m.$$

Заметим, что условия (4.18) можно записать в виде

$$\prod_{j=1}^{m}(a_2+c_2\sqrt[m]{|q_2|^n}e^{i\frac{n\varphi+2j\pi}{m}})\neq 0, \quad \forall t\in\Gamma$$

или же

$$(a_2(t))^m(d(t))^n+(-1)^{nm}(c_2(t))^m(b(t))^n\neq 0, \quad \forall t\in\Gamma. \tag{4.19}$$

Таким образом, имеем

$$\Phi^-(\zeta)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{F^-(\zeta)} & \dfrac{\overline{a_2}}{q_2+\zeta^m}-\dfrac{1}{F^-(\zeta)}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{c_{2+j}}{\zeta-q_{jm}} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^+(\zeta) = \begin{pmatrix} -\dfrac{q_2+\zeta^m}{F^+(\zeta)} & \dfrac{a_2+c_2\zeta^n}{F^+(\zeta)} \\ -\dfrac{q_2+\zeta^m}{F^+(\zeta)}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\dfrac{c_{2+j}}{\zeta-q_{jm}} & \dfrac{1}{q_2+\zeta^m}+\dfrac{a_2+c_2\zeta}{F^+(\zeta)}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\dfrac{c_{2+j}}{\zeta-q_{jm}} \end{pmatrix}$$

и в случае 2^0 также при выполнении граничного условия (4.7) матрицы $\Omega_A^{+-}(t)$ факторизуются с нулевыми частными индексами, то есть, оператор A нётеров $L^p(D), \quad 1<p<\infty$.

Теперь остаётся доказать формулу для вычисления индекса (4.8).

Доказательство проведем по методу математической индукции по параметру $m \geqslant n$.

Пусть в (1) $m=n$, то есть оператор A имеет вид

$$A = q_1(z)I + b_1(z)K + \bar{S_m} + d_1(z)\bar{S_m}K,$$

тогда, как показано в работе [24], индекс оператора A равен

$$\kappa = 2mInd_\Gamma(b_1(t)-d_1(t)q_1(t)) = 2mInd_\Gamma(b(t)c(t)-a(t)d(t)).$$

Пусть теперь при $m=\nu$ указанная формула для индекса оператора A справедлива, то есть имеет место

$$\kappa = 2Ind_\Gamma(b_1^n(t)+(-1)^{n\nu}d_1^n(t)q_1^\nu(t)) = 2Ind_\Gamma(b^n(t)c^\nu(t)+(-1)^{n\nu}d^n(t)a^\nu(t)).$$

Покажем, что тогда для оператора A из 4.1

$$A = q_1(z)I + b_1(z)K + \bar{S_n} + d_1(z)\bar{S}_{n+\nu}K,$$

справедлива формула (4.8). Представим оператор A в виде

$$A \equiv q_1(z)I + b_1(z)K + \bar{S}_n + d_1(z)\bar{S}_{n+\nu}K =$$

$$= q_1(z)I + b_1(z)K + \bar{S}_n(I + d_1(z)\bar{S}_\nu K). \tag{4.20}$$

Поскольку $|d_1(z)| \neq 1$, то, как известно, оператор

$$V_1 = I - d_1\bar{S}_\nu K$$

в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ обратим.

Умножив обе части (4.20) справа на обратимый оператор V_1, с точностью до вполне непрерывного оператора, получим:

$$AV_1 = (q_1 I + b_1 K)(I - d_1\bar{S}_\nu K) + \bar{S}(I + d_1\bar{S}_\nu K)(I - d_1\bar{S}_\nu K).$$

Воспользовавшись формулой композиций операторов

$$\bar{S}_\nu S_\nu = I - \bar{B}_\nu + T,$$

где $\bar{B}_\nu$ - обобщённый оператор Бергмана порядка ν , а T вполне непрерывный оператор, получим

$$AV_1 = (q_1 I + b_1 K + \bar{S}_n - q_1 d_1 \bar{S}_\nu K) - b_1\bar{d}_1 S_\nu K - |d_1|^2\bar{S}_n(I - \bar{B}_\nu).$$

Оператор в первой скобке справа имеет вид оператора A с параметром ν и, следовательно, по предположению индукции его индекс равен:

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma(b_1^n + (-1)^{n(n+\nu)}q_1^{n+\nu}d_1^n) = 2Ind_\Gamma(b^n c^{n+\nu} + (-1)^{n(n+\nu)}q_1^{n+\nu}d^n).$$

Построив теперь семейство нётеровых операторов

$$T_\lambda = (q_1 I + b_1 K + \bar{S}_n - q_1 d_1\bar{S}_\nu K) - \lambda d_1(\bar{b}_1 S_\nu K + d_1\bar{S}_n(I - \bar{B}_\nu)),$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$, мы сопоставим оператору AT_1 нётеревый оператор

$$A_0 = q_1 I + b_1 K + \overline{S}_n - q_1 d_1 \overline{S}_\nu K$$

с индексом κ из (8). Формула для индекса доказана.

б) Пусть теперь выполнено условие (4.6) теоремы. Тогда по схеме пункта **а)** доказывается, что матрицы-символы $\Omega_A^{\pm}(t)$ безусловно факторизуются с нулевыми частными индексами. В этом случае индекс оператора A равно нулю.

Замечание 1. Если в операторе (1) $n \geq m \geq 1$, то достаточно от оператора A перейти к оператору AK.

5 Теория нётера интегральных уравнений с двумерными сингулярными операторами S_n и $\overline{S}_m K$

Пусть D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, I - тождественный оператор, m - целое число, $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции. В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D),\quad 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ рассмотрим следующий сингулярный интегральный оператор

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(S_n f)(z) + d(z)(\overline{S}_m \overline{f})(z) = g(z), \quad (5.1)$$

где S_m - двумерный сингулярный интегральный оператор из 2.2. При $m = n$, оператор (5.1) включается в класс операторов, изученных в работе [24], для которых получены необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D),\quad 1 < p < \infty$ и формулы для вычисления индекса.

Прежде всего, аналогично [39], устанавливаем, что оператор A будет нётеровым в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ тогда и только тогда, когда нётеровым является матричный оператор

$$U = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)S_n & b(z)I + d(z)\overline{S_m} \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m & \overline{a(z)}I + \overline{c(z)}\overline{S}_n \end{pmatrix}$$

в векторном пространстве $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$. Поскольку символ оператора S_m равен $(\dfrac{\overline{\sigma}}{\sigma})^m$ $(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$, то, согласно [21], для нётеровости операторной матрицы U необходимо, чтобы $detG_A(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| =$

1, где $G_A(z,t)$ - матрица символ оператора A (см.[47],гл.VI.4)

$$G_A(z;t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\bar{t}^n & b(z) + d(z)t^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\bar{t}^m & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}t^n \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением получим

$$detG_A(z,t) = |a(z) + c(z)\bar{t}^n|^2 - |b(z) + d(z)t^m|^2 \neq 0 \qquad (5.2)$$

для $\forall z \in \overline{D},\ |t| = 1$, где $t = e^{-2i\varphi} = \dfrac{\overline{\sigma}}{\sigma}$. Вводя обозначения

$$\triangle_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \quad \triangle_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

перепишем неравенство (5.2) в виде

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) - 2Re(\overline{b(z)}d(z)t^m - \overline{a(z)}c(z)t^n) \neq 0 \qquad (5.3)$$

Заметим, что если неравенство (5.3) выполнено для всех $z \in \overline{D},\ |t| = 1$, то тогда $\triangle_1(z) - \triangle_2(z) \neq 0$ для $\forall z \in \overline{D}$, ибо тригонометрический полином

$$P_{2m}(\varphi) = 2Re\Big(\overline{b(z)}d(z)e^{2mi\varphi} - \overline{a(z)}c(z)e^{2ni\varphi}\Big)$$

свободного члена не имеет и поэтому обязательно обращается в нуль при некотором φ: $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Введем обозначения

$$M = \max_{|t|=1} Re(\bar{b}dt^m - \bar{a}ct^n),$$

$$-m = \min_{|t|=1} Re(\bar{b}dt^m - \bar{a}ct^n).$$

Очевидно, что неравенство (5.3) равносильно двум условиям

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) > 2M(z), \quad \forall z \in \overline{D},$$

$$\triangle_1(z) - \triangle_2(z) < -2m(z), \quad \forall z \in \overline{D},$$

где здесь $M(z) > 0, \quad m(z) < 0.$

Лемма 5.1. *Матрица $G_A(z,t)$ - невырождена для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ тогда только тогда, когда выполнено одно из двух неравенств:*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \tag{5.4}$$

$$|\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)} \tag{5.5}$$

для всех $z \in \overline{D}$, где

$$\chi(z) = \begin{cases} M(z), & \text{если } \triangle_j(z) > 0 \\ m(z), & \text{если } \triangle_j(z) < 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

В соответствии с результатами леммы 5.1., можно доказать, что для оператора A имеется два гомотопических класса, которые можно описать в зависимости индекса двучлена $a + c\bar{t}^n$ из (2), а именно:

$$\tau = \underset{|t|=1}{ind}(a(z) + c(z)\bar{t}^n) = 0 \quad \text{либо} \quad \tau = \underset{|t|=1}{ind}(a(z) + c(z)\bar{t}^n) = -n,$$

при этом, если коэффициенты оператора A удовлетворяют условию (5.4), то $\tau = 0$, а если выполнено условие (5.5), то $\tau = -n$.

Теорема 5.1. *Для нётеровости оператора A в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\triangle_1(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \ \forall z \in \overline{D}, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} |\triangle_2(z)| > \chi(z) + \sqrt{\chi^2(z) + \triangle_1(z)\triangle_2(z)}, \quad \forall z \in \overline{D}, \\ (\overline{b(\tau)})^n (c(\tau))^m + (-1)^{nm} (\overline{d(\tau)})^n (a(\tau))^m \neq 0, \quad \forall \tau \in \Gamma. \end{gathered} \tag{5.7}$$

При этом если выполнено условие (5.6), то индекс оператора A равен нулю, а если выполнено условие (5.7), то индекс оператора A равен

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma}(\overline{b(\tau)})^n(c(\tau))^m + (-1)^{nm}(\overline{d(\tau)})^n(a(\tau))^m \neq 0, \quad \forall\tau\in\Gamma \quad (5.8)$$

5.1 Случай, когда детерминант матрицы-символа оператора A положительный

а) Пусть выполнено условие (5.7). Тогда, как отмечено выше, $\underset{|t|=1}{ind}(a+c\bar{t}^n) = -n$ и выполнено условие (5.2).

Здесь будем считать, что

$$|a(z)+c(z)\bar{t}^n| > |b(z)+d(z)t^m|, \quad \forall z\in\overline{D}, \quad t\in\Gamma.$$

Тогда двучлен $a+\frac{c}{t^n}$ вне единичного круга $|t|=1$ имеет n -кратный полюс $t^n = -\frac{c}{a}$ $(|c|>|a|)$. Перепишем оператор A в виде

$$A = q_1 I + b_1 K + \overline{S_n} + d_1 S_m K, \qquad (*)$$

где $q_1 = \dfrac{a}{c}$, $b_1 = \dfrac{b}{c}$, $d_1 = \dfrac{d}{c}$. По символу данного оператора построим матрицы

$$\Omega_A^+(t) = \begin{pmatrix} q_1+\bar{t}^n & b_1+d_1t^m \\ \overline{b_1}+\overline{d_1}\bar{t}^m & \overline{q_1}+t^n \end{pmatrix},$$

$$\Omega_A^-(t) = \begin{pmatrix} q_1+t^n & b_1+d_1\bar{t}^m \\ \overline{b_1}+\overline{d_1}t^m & \overline{q_1}+\bar{t}^n \end{pmatrix},$$

где $t = \dfrac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 + i}$, $-\infty<\sigma_1<\infty$, а коэффициенты $q_1,\ b_1,\ d_1$ зависят от точки z контура Γ. Если теперь мы покажем, что матрицы $\Omega_A^{\pm}(t)$ факторизуются с нулевыми частными индексами, то из 5.2 будет следовать, что оператор нётеров в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$. С этой целью для матрицы $\Omega_A^{\pm}(t)$ построим задачу Римана для аналитических в единичном круге $|t| < 1$ функций $(\Phi_1(\xi), \Phi_2(\xi))$:

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = (q_1 + \frac{1}{t^n})\Phi_1^+(t) + (b_1 + d_1 t^m)\Phi_2^+(t), \\ \Phi_2^-(t) = (\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})\Phi_1^+(t) + (\bar{q}_1 + t^n)\Phi_2^+(t), \end{cases} \quad , \tag{5.9}$$

где $\Phi_{1,2}^+(t)$, $\Phi_{1,2}^-(t)$ - неизвестные функции точки окружности $|t| = 1$, аналитически продолжимые по t соответственно внутри и вне единичного круга.

Займемся решением задачи Римана (5.9). В первом равенстве системы (5.9) слева стоят аналитически продолжимая вне единичного круга функция, а справа аналитически продолжимая внутри единичного круга функция с n - кратным полюсом в точке $t = 0$. По теореме Лиувилля

$$\Phi_1^-(\zeta) = c_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{j+1}}{\zeta^j},$$

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{c_1 + \sum_{j=1}^n \frac{c_{j+1}}{\zeta^j}}{q_1 + \frac{1}{\zeta^n}} - \frac{b_1 + d_1\zeta^m}{q_1 + \frac{1}{\zeta^n}}\Phi_2^+(\zeta). \tag{5.10}$$

Поставив значение $\Phi_1^+(t)$ во второе равенство системы (5.9) и, учитывая, что $\det G_A^+(t) = |q_1 + \bar{t}^n|^2 - |b_1 + d_1 t^m|^2$, можно факторизовать в виде $\dfrac{F^+(t)}{F^-(t)}$ где $F^+(t) \neq 0$, $F^-(t) \neq 0$ - аналитически продолжимые соответственно внутри и вне единичного круга функции, получим

$$\Phi_2^-(t) = \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{t^m})(c_1 + \sum_{j=1}^n \frac{c_{j+1}}{t^j})}{q_1 + \frac{1}{t^n}} + \frac{F^+(t)}{F^-(t)(q_1 + \frac{1}{t^n})}\Phi_2^+(t). \tag{5.11}$$

Отсюда

$$F^-(t)\Big(\Phi_2^-(t)-\frac{(\overline{b_1}+\frac{\overline{d_1}}{t^m})(c_1+\sum_{j=1}^n\frac{c_j}{t^j})}{q_1+\frac{1}{t^n}}\Big)=\frac{F^+(t)}{(q_1+\frac{1}{t^n})}\Phi_2^+(t).$$

Правая часть последнего равенства аналитически продолжима внутри единичного круга, а левая часть аналитически продолжима вне единичного круга функций, за исключением точек $\zeta_j=\frac{1}{q_{jn}}$:

$$q_{jn}=\sqrt[n]{|q_1|}e^{\frac{i(\varphi+2j\pi)}{n}},\quad j=1,2,.....,n.,\ \ \varphi=arg(-q_1),$$

где она имеет n - кратный полюс $\zeta^n=-\frac{1}{q_1}$, поэтому из теоремы Лиувилля будет следовать

$$F^-(t)\Big(\Phi_2^-(t)-\frac{(\overline{b_1}+\frac{\overline{d_1}}{t^m})(c_1+\sum_{j=1}^n\frac{c_{j+1}}{t^j})}{q_1+\frac{1}{t^n}}\Big)=\frac{F^+(t)}{q_1+\frac{1}{t^n}}\Phi_2^+\equiv\Big[c_{n+2}+\sum_{j=1}^n\frac{c_{n+2+j}}{\frac{1}{t}-q_{jn}}\Big],$$

то есть

$$\begin{gathered}\Phi_2^-(\zeta)=\frac{(\overline{b_1}+\frac{\overline{d_1}}{\zeta^m})(c_1+\sum_{j=1}^n\frac{c_{j+1}}{\zeta^j})}{q_1+\frac{1}{\zeta^n}}+\\ \frac{1}{F^-(\zeta)}\Big[c_{n+2}+\sum_{j=1}^n\frac{c_{n+2+j}}{\frac{1}{\zeta}-q_{jn}}\Big],\end{gathered}\tag{5.12}$$

Подставив выражения для $\Phi_2^+(\zeta)$ в (5.10), получим

$$\Phi_1^+(\zeta)=\frac{c_1+\sum_{j=1}^n\frac{c_{j+1}}{\zeta^j}}{q_1+\frac{1}{\zeta^n}}-(b_1+d_1\zeta^m)\frac{\Big[c_{n+2}+\sum_{j=1}^n\frac{c_{n+2+j}}{\frac{1}{\zeta}-q_{jn}}\Big]}{F^+(\zeta)}$$

Функция $\Phi_2^-(\zeta)$ в точке $\zeta=-\frac{1}{q_1}$ имеет n - кратный полюс и его необходимо устранить, для чего представив

$$q+\frac{1}{\zeta^n}=\prod_{j=1}^n\Big(\frac{1}{\zeta}-q_{jn}\Big),$$

потребуем, чтобы выражения при полюсах $\zeta = \frac{1}{q_{jn}}$ обращались в нуль,т.е. чтобы константы $c_1, c_{n+1}, c_{n+2+j} \quad (j = 1, 2, ..., n)$, удовлетворяли n требованиям:

$$c_{n+2+j} = -\frac{(\bar{b}_1 + \bar{d}_1 q_{jn}^m)(c_1 + c_{n+1} q_{jn})}{\prod\limits_{k\neq j}(g_{jn} - g_{kn}) F^+(q_{jn}^m)} \, j = 1, 2, 3, \cdots, n,$$

где c_1, c_{n+1} свободные константы, $c_2 = 0, c_3 = 0, ..., c_n = 0$, а на границе Γ области D предполагается, что выполнены неравенства $\bar{b}_1 + \bar{d}_1 q_j^m n \neq 0, \quad (j = 1, 2, ..., n)$. Заметим, что условия на границе Γ можно записать в виде

$$\prod_{j=1}^{n}(\bar{b}_1 + \bar{d}_1 \sqrt[n]{|q_1|^m} e^{i\frac{m(\varphi+2j\pi)}{n}}) \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma.$$

Итак для функции $\Phi_{12}^{\pm}(\zeta)$ получили следующие выражения:

$$\Phi_1^-(\zeta) = c_1 + \frac{c_{n+1}}{\zeta^n},$$

$$\Phi_2^-(\zeta) = \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{\zeta^m})(c_1 + \frac{c_{n+1}}{\zeta^n})}{q_1 + \frac{1}{\zeta^n}} + \frac{1}{F^-(\zeta)}\Big[c_{n+2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{n+2+j}}{\frac{1}{\zeta} - q_{jn}}\Big],$$

$$\Phi_1^+(\zeta) = \frac{c_1 + \frac{c_{n+1}}{\zeta^n}}{q_1 + \frac{1}{\zeta^n}} - (b_1 + d_1\zeta^m)\frac{\Big[c_{n+2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{n+2+j}}{\frac{1}{\zeta} - q_{jn}}\Big]}{F^+(\zeta)},$$

$$\Phi_2^+(\zeta) = \frac{q_1 + \frac{1}{\zeta^n}}{F^+(\zeta)}\Big[c_{n+2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{n+2+j}}{\frac{1}{\zeta} - q_{jn}}\Big].$$

Теперь, выбрав сначала $c_1 = 0, \ c_{n+1} = 1,$ а затем $c_1 = 1, \ c_{n+1} = 0$, найдем элементы матрицы $\Phi^-(\zeta)$ и $\Phi^+(\zeta)$

$$\Phi^-(\zeta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\zeta^n} & 1 \\ \frac{(\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{\zeta^m})\frac{1}{\zeta^n}}{q_1 + \frac{1}{\zeta^n}} + \frac{1}{F^-(\zeta)} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{n+2+j}^1}{\frac{1}{\zeta} - q_{jn}} & \frac{\overline{b_1} + \frac{\overline{d_1}}{\zeta^m}}{q_1 + \frac{1}{\zeta^n}} + \frac{1}{F^-(\zeta)} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{n+2+j}^2}{\frac{1}{\zeta} - q_{jn}} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^+(\zeta) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{\zeta^n}}{q_1+\frac{1}{\zeta^n}} - (b_1 + d_1\zeta^m)\frac{\sum_{j=1}^n \frac{c^1_{n+2+j}}{\frac{1}{\zeta}-q_{jn}}}{F^+(\zeta)} & \frac{1}{q_1+\frac{1}{\zeta^n}} - (b_1 + d_1\zeta^m)\frac{\sum_{j=1}^n \frac{c^2_{n+2+j}}{\frac{1}{\zeta}-q_{jn}}}{F^+(\zeta)} \\ \frac{q_1+\frac{1}{\zeta^n}}{F^+(\zeta)}\sum_{j=1}^n \frac{c^1_{n+2+j}}{\frac{1}{\zeta}-q_{jn}} & \frac{q_1+\frac{1}{\zeta^n}}{F^+(\zeta)}\sum_{j=1}^n \frac{c^2_{n+2+j}}{\frac{1}{\zeta}-q_{jn}} \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\det \Phi^-(\zeta) = \frac{\bar{b}_1 + \bar{d}_1 q^m_{jn}}{\prod\limits_{k\neq j}(g_{jn} - g_{kn})F^+(q^m_{jn})F^-(\zeta)} \neq 0,$$

$$\det \Phi^+(\zeta) = \frac{\bar{b}_1 + \bar{d}_1 q^m_{jn}}{\prod\limits_{k\neq j}(g_{jn} - g_{kn})F^+(q^m_{jn})F^+(\zeta)} \neq 0, \qquad \text{для} \quad \forall \zeta \in D.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\Big((\overline{b(\tau)})^n (c(\tau))^m + (-1)^{nm} (\overline{d(\tau)})^n (a(\tau))^m \Big) \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma, \tag{5.13}$$

мы имеем

$$\Phi^-(\zeta) = \Omega^+_A(\zeta)\Phi^+(\zeta).$$

или

$$\Omega^+_A(\zeta) = \Phi^-(\zeta)\Big(\Phi^+(\zeta)\Big)^{-1}. \tag{5.14}$$

Аналогично, доказывается, что при условии

$$\Big((\overline{b(\tau)})^n (c(\tau))^m + (-1)^{nm} (\overline{d(\tau)})^n (a(\tau))^m \Big) \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma, \tag{5.15}$$

имеет место представление

$$\Omega^-_A(\zeta) = \Phi^-_*(\zeta)\Big(\Phi^+_*(\zeta)\Big)^{-1}. \tag{5.16}$$

В полученных для матрицы $\Omega^{\pm}_A(\zeta)$ представлениях (5.14) и (5.16) первые множители аналитически продолжимы вне единичного круга, а вторые внутри, причём их определители нигде в ноль не обращаются, то есть матрицы $\Omega^{\pm}_{A}(\zeta)$ имеют нулевые частные индексы. Следовательно оператор A нётеров, то есть достаточность граничного условия (5.7) доказана. Необходимость условия (5.7) доказывается от противного с помощью локального метода (см. [42]).

5.2 Вывод формулы для вычисления индекса оператора

Докажем формулу для вычисления индекса (5.8).

Доказательство проведём по методу математической индукции по параметру $m \geqslant n$.

Пусть в (5.1) $m = n$, то есть оператор A имеет вид

$$A = q_1(z)I + b_1(z)K + S_m + d_1(z)\bar{S_m}K,$$

тогда, как показано в работе [46], индекс оператора A равен

$$\kappa = 2mInd_{\Gamma}(\overline{b_1(t)} - \overline{d_1(t)}q_1(t)) = 2mInd_{\Gamma}(\overline{b(t)}c(t) - a(t)\overline{d(t)}).$$

Пусть теперь при $m = \nu$ указанная формула для индекса оператора A справедлива, то есть имеет место

$$\kappa = 2Ind_{\Gamma}(\overline{b_1^n(t)} + (-1)^{n\nu}\overline{d_1^n(t)}q_1^{\nu}(t)) = 2Ind_{\Gamma}(\overline{b^n(t)}c^{\nu}(t) + (-1)^{n\nu}\overline{d_1^n(t)}a_1^{\nu}(t)).$$

Покажем, что тогда для оператора A из (∗)

$$A = q_1(z)I + b_1(z)K + S_n + d_1(z)\bar{S}_{n+\nu}K,$$

справедлива формула (5.8). Представим оператор A в виде

$$\begin{aligned} A \equiv q_1(z)I + b_1(z)K + S_n + d_1(z)\bar{S}_{n+\nu}K = \\ = q_1(z)I + b_1(z)K + (I + d_1(z)\bar{S}_{\nu}K)S_n. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Поскольку $|d_1(z)| \neq 1$, то, как известно, оператор

$$V_2 = I - d_1 \bar{S}_\nu K$$

в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ обратим.

Умножив обе части (5.17) справа на обратимый оператор V, с точностью до вполне непрерывного оператора, получим:

$$AV_2 = (I - d_1 S_\nu K)(q_1 I + b_1 K) + (I - d_1 \bar{S}_\nu K)(I + d_1 \bar{S}_\nu K) S_n.$$

Воспользовавшись формулой композиций операторов

$$\bar{S}_\nu S_\nu = I - \bar{B}_\nu + T,$$

где $\bar{B}_\nu$ - обобщённый оператор Бергмана порядка ν [48], а T вполне непрерывный оператор, получим

$$AV_2 = (q_1 I + b_1 K + S_n - \bar{q}_1 d_1 S_\nu K) - \bar{b}_1 d_1 S_\nu - |d_1|^2 (I - \bar{B}_\nu) S_n.$$

Оператор в первой скобке справа имеет вид оператора A с параметром ν и, следовательно, по предположению индукции его индекс равен:

$$\kappa = 2Ind_\Gamma(\overline{b_1^n} + (-1)^{n(n+\nu)} q_1^{n+\nu} \overline{d_1^n}) =$$

$$= 2Ind_\Gamma(\overline{b^n} c^{n+\nu} + (-1)^{n(n+\nu)} a^{n+\nu} \overline{d^n}).$$

Построив теперь семейство нётеровых операторов

$$V_\lambda = (q_1 I + b_1 K + S_n - \bar{q}_1 d_1 S_\nu K) - \lambda d_1 (\bar{b}_1 S_\nu + \bar{d}_1 (I - \bar{B}_\nu)) S_n,$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$, мы сопоставим оператору AV_1 нётеревый оператор

$$A_0 = q_1 I + b_1 K + S_n - \bar{q}_1 d_1 \overline{S}_\nu K$$

с индексом κ из (5.8). Формула для индекса доказана.

б). Пусть теперь выполнено условие (5.6) теоремы. Тогда по схеме пункта а) доказывается,что матрицы-символы $\Omega_A^{\pm}(t)$ безусловно факторизуются с нулевыми частными индексами. В этом случае оператор А обратим.

Замечание 1. Если в операторе (5.1) $n > m \geq 1$, то достаточно от оператора A перейти к оператору AK :

$$AK = bI + aK + d\overline{S}_m + cS_nK.$$

6 Исследование одного класса систем интегральных уравнений, содержащих двумерные сингулярные операторы и операторы Бергмана

Пусть D - конечная односвязная область комплексной плоскости z, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ; $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$, $B(z,\zeta)$ обозначает керн-функцию Бергмана области D (см.[32],[66]), представимую в виде

$$B(z,\zeta) = \frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{\pi(1-\omega(z)\overline{\omega(\zeta)})^2},$$

где $\omega(z)$ - однолистное комформное отображение области D на единичный круг, штрих обозначает производную, а черта над функцией - комплексное сопряжение; B и $\overline{B}$ - интегральные операторы соответственно с ядрами $B(z,\zeta), \overline{B(z,\zeta)}$:

$$(Bf)(z) = \iint\limits_D B(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \qquad (\overline{B}f)(z) = \iint\limits_D \overline{B(z,\zeta)}f(\zeta)ds_\zeta;$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered}(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + \sum_{m=1}^{N} b_m(z)(S_m f)(z) + \\ + c(z)(Bf)(z) + d(z)(\overline{B}f)(z) + \delta(z)(\overline{Bf})(z) = g(z), \ z \in D,\end{gathered} \tag{6.1}$$

где S_m - двумерный сингулярный интегральный оператор с чётной экспоненциальной характеристикой порядка m из (2.2), N - натуральное число, $a(z), b_m(z), c(z), d(z), \delta(z)$ - непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы - функции порядка n,$f(z)$ и $g(z)$ - соответственно искомая и известная вектор-функции размерности n, принадлежащие $L^p(D), 1 < p < \infty$; действие матрицы на вектор понимается в смысле скалярного умножения строк матрицы на этот вектор.

При некоторых дополнительных требованиях гладкости коэффициентов система (6.1) включается в класс систем двумерных сингулярных интегральных уравнений в (см. [11]; так же см. [52]-[55]), где она редуцируется к краевым задачам для эллиптических систем дифференциальных уравнений.

Система (6.1) может быть отнесена также к общим многомерным сингулярным интегральным уравнениям, для которых в [21] даны необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D), 1 < p < \infty$, содержащие требование равенства нулю частных индексов матрицы - символа в точках Γ.

В [35] изучен случай, когда $\delta(z) \equiv 0$, где получены необходимые и достаточные условия нётеровости в $L^p(D), p > 1$ и найдена формула для подсчёта индекса.

Нашей целью является получение для системы (6.1) эффективных необходимых и достаточных условий нётеровости и нахождение формулы для вычисления индекса. Под индексом здесь понимается разность между числом линейно-независимых решений (над полем вещественных чисел) однородной системы в $L^p(D)$ и числом линейно-независимых решений однородной сопряжённой (транспонированной) системы в пространстве $L^{p'}(D)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Прежде всего, использовав тождества

$$B = I - S\overline{S} + T, \overline{B} = I - \overline{S}S + T,$$

где I - тождественный, а T - вполне непрерывные операторы, $S = S_1$, преобразуем (6.1) к виду, не содержащему операторы B и $\overline{B}$:

$$(Af)(z) \equiv \Big(a(z) + c(z) + d(z)\Big) f(z) + \delta(z)\overline{f(z)} + \sum_{m=1}^{N} b_m(z)(S_m f)(z) -$$

$$- c(z)(S\overline{S}f)(z) - d(z)(\overline{S}Sf)(z) - \delta(z)(\overline{S}S\overline{f})(z) + T = g(z), \tag{6.2}$$

Введя новые функции $\omega_1(z) = (\overline{S}f)(z), \quad \omega_2(z) = (Sf)(z)$ и перейдя в (6.2) к комплексно-сопряжённым значениям, напишем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} (a + c + d)f + \sum_{m=1}^{N} b_m S_m f + \delta\overline{f} - cS\omega_1 - \delta\overline{S}\overline{\omega}_1 - d\overline{S}\omega_2 + T = g, \\ \overline{\delta}f + (\overline{a} + \overline{c} + \overline{d})\overline{f} + \sum_{m=1}^{N} \overline{b}_m \overline{S}_m \overline{f} - \overline{\delta}S\omega_1 - \overline{c}\overline{S}\overline{\omega}_1 - \overline{d}S\overline{\omega}_2 + T = \overline{g}, \\ -\overline{S}f + \omega_1 = 0, \\ -S\overline{f} + \overline{\omega}_1 = 0, \\ -Sf + \omega_2 = 0, \\ -\overline{Sf} + \overline{\omega}_2 = 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Так же, как в ([39] стр. 274) устанавливается, что система (6.3) будет нётеровой тогда и только тогда, когда нётеровой является операторная матрица

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \delta(z)I & -c(z)S & -\delta(z)\overline{S} & -d(z)\overline{S} & 0 \\ \overline{\delta}(z)I & \overline{A}_{11} & -\overline{\delta(z)}S & -\overline{c(z)}\overline{S} & 0 & -\overline{d(z)}S \\ -\overline{S} & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 & E & 0 & 0 \\ -S & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -\overline{S} & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \qquad (6.4)$$

где A_{11} - оператор, имеющий вид

$$A_{11} = \Big(a(z) + c(z) + d(z)\Big)I + \sum_{m=1}^{N} b_m(z)S_m.$$

Имеет место

Лемма 6.1. *Если система (6.1) нётерова в $L^p(D)$ $1 < p < \infty$, то*

$$\det a(z) \neq 0$$

для всех $z \in \overline{D}$.

Доказательство. Выпишем соответствующий символ операторной матрицы $\mathcal{A}$ (см.,[1] стр.78):

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} A_{11}(\sigma) & \delta(z) & -\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}c(z) & -\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}\delta(z) & -\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}d(z) & 0 \\ \overline{\delta}(z) & \overline{A_{11}(\sigma)} & -\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\overline{\delta(z)} & -\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}\overline{c(z)} & 0 & -\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\overline{d(z)} \\ -\frac{\sigma}{\overline{\sigma}} & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\overline{\sigma}}{\sigma} & 0 & E & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{\sigma}}{\sigma} & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{\overline{\sigma}} & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \qquad (6.5)$$

где элемент $A_{11}(\sigma)$ имеет вид

$$A_{11}(\sigma) = a(z) + c(z) + d(z) + \sum_{m=1}^{N} b_m(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\Big)^m,$$

а E - единичная матрица порядка n.

Согласно [21], из нётеровости системы (6.1) вытекает, что $\det G_z(\sigma) \neq 0$ при $z \in \overline{D}$ и комплексных $\sigma, 0 < |\sigma| < \infty$. Кроме того, нётеровость влечёт равенство нулю при $z \in \Gamma$ частных индексов матрицы $G_z(x \pm i), -\infty < x < \infty$;

$$G_z(x \pm i) =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}(x\pm i) & \delta(z) & -\frac{x\mp i}{x\pm i}c(z) & -\frac{x\pm i}{x\mp i}\delta(z) & -\frac{x\pm i}{x\mp i}d(z) & 0 \\ \overline{\delta}(z) & \overline{A_{11}(x\pm i)} & -\frac{x\mp i}{x\pm i}\overline{\delta(z)} & -\frac{x\pm i}{x\mp i}\overline{c(z)} & 0 & -\frac{x\mp i}{x\pm i}\overline{d(z)} \\ -\frac{x\pm i}{x\mp i} & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x\mp i}{x\pm i} & 0 & E & 0 & 0 \\ -\frac{x\mp i}{x\pm i} & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -\frac{x\pm i}{x\mp i} & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

где

$$A_{11}(x \pm i) = a(z) + c(z) + d(z) + \sum_{m=1}^{N}\Big(\frac{x \mp i}{x \pm i}\Big)^m b_m(z).$$

Поэтому для $z \in \Gamma$ имеем $\underset{-\infty<x<\infty}{Ind} detG_z(x \pm i) = 0$. С помощью очевидных преобразований матриц устанавливается, что

$$detG_z(x \pm i) = \det\Big\{a(z) + \sum_{m=1}^{N}\Big(\frac{x \mp i}{x \pm i}\Big)^m b_m(z)\Big\}.$$

Теперь из указанных фактов заключаем, что функция

$$\Phi(\zeta) = \det\Big\{a(z) + \sum_{m=1}^{N} \zeta^m b_m(z)\Big\}$$

не обращается в ноль при $|\zeta| = 1$ и $z \in \overline{D}$, а для $z \in \Gamma$ она не имеет нулей также внутри круга $|\zeta| < 1$. Отсюда, поскольку $Ind_{|\zeta|=1}\Phi_z(\zeta) = const$ для $z \in \overline{D}$, вытекает, что $\Phi_z(\zeta) \neq 0$ при $z \in \overline{D}, |\zeta| \leq 1$, в частности $\Phi_z(0) \neq 0,$ при $z \in \overline{D}$. После этого остаётся заметить, что $\Phi_z(0) = \det a(z)$, чем и завершается доказательство леммы 6.1..

Таким образом, исследуя систему (6.1) на нётеровость, можем считать матрицу $a(z)$ обратимой. Непосредственной проверкой с учётом свойств композиций операторов $S_m, B, \overline{B}$ (см. [49],[50]) устанавливается

Лемма 6.2. *В пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$, справедливо равенство*

$$Af = (aI + cB)\Big(I + a^{-1}\sum_{m=1}^{N} b_m S_m\Big)\Big(I + a^{-1}d\overline{B} + a^{-1}\delta\overline{B}K\Big)f + T_2,$$

где K - оператор перехода к комплексно-сопряжённым значениям, T_2- вполне непрерывный оператор.

Теорема 6.1. *Для нётеровости системы (6.1) в $L^p(D), 1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$1)\ \det\{a(z) + \sum_{m=1}^{N} \zeta^m b_m(z)\} \neq 0 \quad \textit{при} \quad z \in \overline{D}, \quad |\zeta| \leq 1;$$

$$2)\ \det\{a(t) + c(t)\} \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in \Gamma;$$

$$3)\ \det\{a(t) + d(t)\} \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in \Gamma.$$

При этом индекс системы равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \det\{a(t) + d(t)\} - 2Ind_\Gamma \det\{a(t) + c(t)\}.$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы каждый из трёх операторов-сомножителей в представлении леммы 6.2. будет нётеровым. В самом деле, нётеровость оператора $I+a^{-1}\sum\limits_{m=1}^{N} b_m S_m$ при выполнении условия 1) вытекает из [21]. Если выполнено условие 2) и $\det a(z) \neq 0, z \in \overline{D}$, то оператор $a^{-1}I + c_1 B$, где $c_1(z)$ - непрерывное продолжение внутрь области D матрицы-функции $[a(t)+c(t)]^{-1} - a^{-1}(t), t \in \Gamma$, является левым и правым регуляризатором для оператора $aI + cB$. Аналогично при выполнении 3) строится регуляризатор для оператора $I + a^{-1}d\overline{B} + a^{-1}\delta\overline{B}K$.

Необходимость условия 1) установлена в доказательстве леммы 6.1.

Идея доказательства необходимости условия 2) (а также 3) аналогична [50]. Пусть $\det\{a(t_0)+c(t_0)\} = 0, t_0 \in \Gamma$ и $(y_1, y_2, ..., y_n)$ - ненулевое решение системы.

$Y \cdot \{a(t)+d(t)\} = 0,$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & \cdots & y_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

.

Тогда оператор YB не вполне непрерывен, а

$$YB\{a(t_0)I + c(t_0)B\} = 0, \tag{6.7}$$

обозначим через A_{t_0} оператор A при значениях коэффициентов в точке t_0. Ясно, что оператор A локально эквивалентен оператору A_{t_0} в точке t_0 .

Следовательно, для этих операторов одновременно существуют или нет локальные регуляризаторы. Если допустить, что для A_{t_0} существует правый локальный регуляризатор R_n, то будем иметь: с одной стороны, оператор $YBA_{t_0}R_n$ не вполне непрерывен, а с другой стороны, учитывая 2), заключаем, что $YBA_{t_0}R_n$ вполне непрерывен. Полученное противоречие говорит о том, что A_{t_0} а значит, и A не может иметь правого локального регуляризатора в точке t_0, если $\det\{a(t_0)+c(t_0)\}=0$, что и доказывает необходимость условия 2). Аналогично доказывается отсутствие левого локального регуляризатора при нарушении условия 3).

Теперь остаётся вычислить индекс оператора A. Прежде всего из непрерывности по норме относительно τ семейства операторов

$$I+a^{-1}\sum_{m=1}^{N}\tau^m b_m S_m, \quad 0\le\tau\le 1,$$

и нётеровости каждого из них при выполнении условия 1) следует, что

$$Ind\{I+a^{-1}\sum_{m=1}^{N}b_m S_m\}=0.$$

Для вычисления индекса оператора $aI+cB$ используется известный способ (см., например, [10, с. 486-488]), позволяющий установить, что искомый индекс равен

$$\nu\cdot Ind_\Gamma\det[a(t)+c(t)],$$

где ν - некоторое постоянное целое число. Рассмотрение диагонального случая с учётом значения индекса скалярного оператора приводит к выводу, что коэффициент пропорциональности ν равен минус единице. После этого очевидно, что

$$Ind(I+a^{-1}d\overline{B})=2Ind_\Gamma\det[a(t)+d(t)].$$

Теперь на основе леммы 6.2 утверждение об индексе оператора A вытекает из известных фактов теории линейных операторов.

Замечание 1. Вместо непрерывности матриц-функций $c(z), d(z)$ и $\delta(z)$ в $\overline{D}$ достаточно потребовать, чтобы их элементы были измеримыми ограниченными функциями, имеющими на Γ равномерно достижимые предельные значения, которые образуют непрерывные функции.

Замечание 2. В условиях нётеровости однородная система (6.1) имеет одни и те же решения во всех пространствах $L^p(D), 1 < p < \infty$, что вытекает из независимости индекса от p и вложения $L^{p_1}(D) \subset L^{p_2}(D)$ при $p_1 > p_2$.

Замечание 3. Изложенные результаты (по крайней мере, применительно к $L^2(D)$) остаются в силе и в том случае, когда $N = \infty$, если потребовать, например, чтобы сходился ряд из норм матриц $b_m(z)$.

Замечание 4. Методами теории операторов (см.напр.[57],[58]) можно распространить полученные результаты на случай сингулярных интегральных уравнений с ограниченными операторными коэффициентами в комплексном банаховом пространстве.

Заключения

В диссертации получены следующие основные результаты:

Для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с чётной характеристикой по ограниченной области в лебеговом пространстве с весом получены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчёта индекса.

Построена нётеровая теория некоторых классов систем интегральных уравнений, содержащих двумерные сингулярные операторы по ограниченной области и операторы Бергмана.

Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть применены при исследовании различных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Список литературы

[1] Михлин, С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения [текст]/ С.Г. Михлин — М.: Физматгиз, 1962. —254 с.

[2] Calderon, A. On the existense of certain singular integrals / A. Calderon, A. Zigmund // Acta math.1952. —V.88. №1. —P. 85-139.

[3] Calderon, A. On singular integrals / A. Calderon, A. Zigmund //American j. math. -1956. — 78.—P. 289-309.

[4] Zigmund, A. On singular integrals / A. Zigmund // Rend. math. eapplic. —197.—v. 5-16. —fass 3-4.-p. 468-505.

[5] Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций [текст]/ И.М. Стейн. –М.: Мир, 1973. 342 с.

[6] Векуа, И.Н. Обобщённые аналитические функции [текст]/ И.Н. Векуа. –М.: Физматгиз, 1959. 672 с.

[7] Векуа, И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений [текст]/ И.Н. Векуа . М.: Гостехиздат, 1948. —296 с.

[8] Альфорс, Л. Лекции по квазиконформным отображениям [текст]/ Л. Альфорс . –М.: Мир, 1969. —650 с.

[9] Шиффер, М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении [текст]/ М. Шиффер // В кн.: Международный математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз, 1962. —С. 193-218.

[10] Боярский, Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций [текст]/ Б.В. Боярский // Диссертация доктор физико-математических наук. —М, 1960.

[11] Джураев, А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений [текст]/ А.Д. Джураев . —М.: Наука, 1987. –415 с.

[12] Джураев, А.Д. О некоторых системах двумерных сингулярных интегральных уравнений с полиномиальными характеристиками в ограниченной области [текст]/ А.Д. Джураев // Доклады Академии наук Тадж. ССР.—1974.— Т. 17. №9.— С. 3-6.

[13] Джураев, А.Д. Применение эллиптических краевых задач к иследованию сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоскости [текст]/ А.Д. Джураев // Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. —Тбилиси, 1972. —Т. 2. —С. 104-118.

[14] Джурав, А.Д. О некоторых двумерных интегральных уравнениях по ограниченной области [текст]/ А.Д. Джураев // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. –Тбилиси. 1979. —С. 89-94.

[15] Джураев, А.Д. Поликерн-функция области, керн-операторы и сингулярные интегральные операторы [текст]/ А.Д. Джураев Доклады Академии наук СССР. 1985. —Т. 283. №5. —С. 1057-1060.

[16] Монахов, В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений [текст]/ В.Н. Монахов Новосибирск: Наука, 1977. —424 с.

[17] Комяк, И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений [текст]/ И.И. Комяк // Доклады Академии наук БССР. —1978. —Т.22, №6. —С. 488-491.

[18] Комяк, И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения [текст]/ И.И. Комяк // Доклады Академии наук БССР.—1977. —Т. 21. №2. —С. 1074-1077.

[19] Комяк, И.И. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Бергмана [текст]/ И.И. Комяк //Доклады Академии наук БССР. —1979. №1. —С. 8-11.

[20] Комяк, И.И. О некоторых классах двумерных интегральных уравнений [текст]/ И.И. Комяк // В сб.: Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам, посвящённого 75-летию со дня рождения акад. АН БССР Ф.Д. Гахова.- Минск, 1985. —С. 64-68.

[21] Duduchava, R. On multidimensional singular integral operators. I, II / R. Duduchava // J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 41-76, 199- 214.

[22] Дудучава, Р. В. О многомерных сингулярных интегральных уравнениях. Основные теоремы [текст]/ Р.В. Дудучава // Сообщения АН Груз. ССР, 1983. —Т.111, №3. —С. 465-467.

[23] Джангибеков, Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах [текст]/ Г. Джангибеков // Математические заметки, 1989. —Т. 46. №46.— С. 91-93.

[24] Джангибеков, Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами [текст]/ Г. Джангибеков // Известия. ВУЗов. математика. 1992, №9. — С. 25-37.

[25] Джангибеков, Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллип-

тических систем уравнений на плоскости [текст]/ Г. Джангибеков // Доклады Российской Академии наук. — 1993.— Т. 330. №4. —С. 415-417.

[26] Джангибеков, Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов [текст]/ Г. Джангибеков // Доклады Академии наук СССР. —1989. —Т. 308. №5.—С. 1037-1041.

[27] Джангибеков, Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области [текст]/ Г. Джангибеков // Доклады Российской Академии наук. 2002. —Т. 383, №1.— С. 7-9.

[28] Бойматов, К.Х. Об одном сингулярном интегральном операторе [текст]/ К.Х. Бойматов, Г. Джангибеков // Успехи математических наук, 1988. — Т.43, вып. 8. — С. 171-172.

[29] Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. / А. Зигмунд -М.:-1939 –с 678.

[30] Джураев, А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области [текст]/ А.Д. Джураев // Доклады Академии наук СССР. —1971. — Т. 197. №6. —С.1251-1254.

[31] Джангибеков, Г. Нётеровость и индекс одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов [текст]/ Г. Джангибеков // Доклады Академии наук СССР.- 1990. — Т. 313. –№3. — С. 1055-1059.

[32] Курант, Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности [текст]/ Р.Курант. —М.; ИЛ,-1953. 310с.

[33] BERGMAN, S. The kerner function and conformal mapping / S. BERGMAN // Math. Surveys Amer. Math. Soc. —1950, №5. —P. 161.

[34] ВИНОГРАДОВ, В.С. Об одной граничной заддаче для эллиптической системы специального вида [текст]/ В.С. ВИНОГРАДОВ // Дифференциальный уравнения. 1971.—Т. 7, №7. —С.1226-1234.

[35] БИЛЬМАН, Б. М. О некоторых системах двумерных сингулярных интегральных уравнений [текст]/ Б. М. БИЛЬМАН, Г. ДЖАНГИБЕКОВ // Доклады Академии наук СССР.—1991.—Т. 318. №5.— С. 1033-1037.

[36] КРЕЙН, С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве [текст]/ С.Г. КРЕЙН — М, 1971. 103 с.

[37] ГАХОВ, Ф.Д. Краевые задачи [текст]/ Ф.Д. ГАХОВ . —М.: Физико-математическая литература, 1968. –639 с.

[38] МУСХЕЛИШВИЛИ, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения [текст]/ Н.И. МУСХЕЛИШВИЛИ . —М.: Наука, 1968. –511 с.

[39] ВЕКУА, Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений [текст]/ Н.П. ВЕКУА – М.: Наука, 1970. -379 с.

[40] СИМОНЕНКО, И.Б. Краевая задача Римана для n пар функций с непрерывными коэффициентами [текст]/ И.Б. СИМОНЕНКО // Известия вузов, Математика, —1961,№1, 160-145.

[41] СИМОНЕНКО, И.Б. Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и её применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами[текст]/ И.Б. СИМОНЕНКО //Известия Академии наук СССР, сер. матем.—1964,—С. 28, №2 . 277-306ю.

[42] Симоненко, И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений [текст]/ И.Б. Симоненко I, II // Известия Академии наук СССР, сер. матем.—1965,—С. 29, №3,4 . 567-580, 757-782.

[43] Симоненко, И.Б. Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами [текст]/ И.Б. Симоненко, Чин Нгок Минь// Из-во Ростов. унив. 1986. 58 с.

[44] Гохберг, И.Ц. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторах [текст]/ И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн // Успехи математических наук.—1957.—Т. 12. —№2.—С. 44-118.

[45] Stein E.M. Note on singular integrals / E.M.Stein. // Pros. Amer.Math.Soc.-1957.-8 p.250-254.

[46] Джангибеков, Г. О нётеровости и идексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами [текст]/ Г. Джангибеков // Доклады Академии наук СССР.—1988.—Т. 300, – №2.— С. 272-276.

[47] Михлин, С.Г. Линейные уравнения в частных производных [текст]/ С.Г. Михлин. –М.: Высшая школа, 1977. –431 с.

[48] Джангибеков, Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов [текст]/ Г. Джангибеков // Доклады Академии наук СССР.— 1990. — Т. 314, –№5. —С. 541-545.

[49] Джангибеков, Г. Нётеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов [текст]/ Г. Джангибеков // Известия ВУЗов. матем. —1991. –№1. —С. 19-28.

[50] Комяк, И.И. Условия нётеровости и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области [текст]/ И.И. Комяк // Дифференцальные уравнения.—1980. —Т. 16. –№2, —С. 328-343.

[51] Бильман, Б.М. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области [текст]/ Б.М. Бильман, Г. Джангибеков // Доклады Академии наук СССР.— 1986.- Т.— 288. №4.—С. 792-797.

[52] Василевский, Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные некоторыми двумерными интегральными операторами I [текст]/ Н.Л. Василевский // Math. Nachr.—1980.—Bd. 96.—S.245-255.

[53] Василевский, Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные некоторыми двумерными интегральными операторами II [текст]/ Н.Л. Василевский // Math. Nachr.—1980.—Bd. 99.—S.135-144.

[54] Василевский, Н.Л. Об алгебре, порождённой двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами [текст]/ Н. Л. Василевский // Доклады Академии наук СССР.-1983.—.271. №5.—С.1041-1044 .

[55] Василевский, Н.Л. Банаховы алгебры, порождённые двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-

непрерывными коэффициентами [текст]/ Н.Л. Василевский // Известия ВУЗов Матем.—1986. —№2.—С. 12-21.

[56] Виноградов, В.С. О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения [текст]/ В.С. Виноградов // Доклады Академии наук СССР. — 1978.—Т. 241. –№2. —С.272-274.

[57] Илолов, М. Об обратимости линейных дифференциально- разностных операторов в пространствах периодических функций [текст]/ М. Илолов //Доклады Академии наук Тадж.ССР. —1985. —Т. 28. –№2. —С. 190-193.

[58] Fridman, A. Voltera Integral equations in Banach space,Trans./A.Fridman and M.Shilbrot // Amer. Math. Soc. 126 (1967). —p.131-179.

[59] Манджавидзе, Г.Ф. Применение теории обобщённых аналитических функций к изучению задач сопряжения со смещением [текст]/ Г.Ф. Манджавидзе // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. —Тбилиси, 1979, —С. 1165-1186.

[60] Михайлов, Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [текст]// Л.Г. Михайлов –Душанбе, Дониш, 1963.183с.

[61] Михайлов, Л.Г. О некоторых многомерных интегральных операторах с однородными ядрами [текст]/ Л.Г. Михайлов // Доклады Академии наук СССР. 1967. —Т. 176.–№2. —С. 263-265.

[62] Михайлов, Л.Г. О некоторых двумерных интегральных уравнениях с однородными ядрами [текст]/ Л.Г. Михайлов // Доклады Академии наук СССР. —1970. —Т. 192. –№2. —С. 272-275.

[63] Михайлов, Л.Г. Об одном интегральном уравнении теории обобщенных аналитических функций в сингулярном случае [текст]/ Л.Г. Михайлов // Доклады Академии наук СССР. —1970. —Т. 190. –№3. —С. 531-534.

[64] Михлин, С.Г. О вычислении индекса системы одномерных сингулярных уравнений [текст]/С.Г. Михлин // Доклады Академии наук СССР. —1968, —Т. 168. –№6 —С 120.

[65] Пресдорф, З. Некоторые классы сингулярных уравнений [текст]/ З.Пресдорф -М.: Мир, 1979. –494 с.

[66] Bergman, S. Kernell funstions and elliptic differential equations in mathematical pfysisc. / S. Bergman, M. Schiffer - New. York: Acad. Press, 1953. —432p.

[67] Чоршанбиева, М.Ч. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов [текст]/ Г. Джангибеков, М.Ч. Чоршанбиева// Доклады Академии наук РТ. — 2011. — Т. 54. —№7. — С. 526-535.

[68] Чоршанбиева, М.Ч. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с разными чётными характеристиками [текст]/ Г. Джангибеков, М.Ч. Чоршанбиева// Известия Академии наук РТ. — 2012. — Т. 148. —№3. — С. 29-41.

[69] Чоршанбиева, М.Ч. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов [текст]/ Г. Джанги-

беков, М.Ч. Чоршанбиева// Доклады Академии наук РТ. — 2014. — Т. 57. —№1. — С. 15-25.

[70] Чоршанбиева, М.Ч. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов [текст]/ Г. Джангибеков, М.Ч. Чоршанбиева //Современные проблемы теории функции и дифференциальных уравнений. Материалы межд.научной конф.посвящённой 85-летию академика АН РТ Л.Г. Михайлова. Душанбе, 2013. . —С. 54-55.

[71] Чоршанбиева, М.Ч. Исследование одгого класса систем интегральных уравнений, содержащих двумерные сингулярные операторы и операторы Бергмана [текст]/ М. Илолов, Г. Джангибеков, М.Ч.Чоршанбиева// Доклады Академии наук РТ. —2015. —Т. 58. №9. —С.761-768.

[72] Чоршанбиева, М.Ч. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с разными четными характеристиками [текст]/М.Ч.Чоршанбиева// В сб. Современные проблемы дифференциальных уравнений и математикеского анализа. Материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию академика А. Джураева. —Душанбе, 2012. —С. 32-34.

[73] Чоршанбиева, М.Ч. Нётеровость и индекс одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов [текст]/ М.Ч.Чоршанбиева// В сб. Современные проблемы математики и её преподавание. Материалы международной научной конференции, посвящённой 20-летию Конституции РТ. Худжанд 2 (29) 2014. —С. 156-157.

[74] Чоршанбиева, М.Ч. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с разными характеристиками [текст] /М.Ч. Чоршанбиева // В сб. Современные проблемы математического анализа и теории функций. Материалы международной научной конференции, посвящённой 60-летию академика АН РТ М.Ш. Шабозова. —Душанбе, 2012.—С. 46-48.