На правах рукописи

Файзмамадова Лолазор Гадомамадовна

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ И КРИВЫХ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 7

Работа выполнена в Таджикском государственном университете коммерции

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор
Шабозов Мирганд Шабозович

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Кобельков Георгий Михайлович,** доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, заведующий кафедрой вычислительной математики;

Темурбекова София Давронбековна, кандидат физико-математических наук, Финансово-экономический институт Таджикистана, заведующей кафедрой прикладная информатика в экономике

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Таджикский национальный университет

Защита состоится *«30» июня 2017 г.* в *10^{00}* часов на заседании диссертационного совета Д 047.007.02, созданного на базе Института математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г.Душанбе, ул Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джураева.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте http://www.mitas.tj Института математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан.

Автореферат разослан "___" ____________ 2017 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02 **Ш.А.Хайруллоев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Известно, что задача приближённого вычисления определённых интегралов возникла сразу же после создания Ньютоном и Лейбницом теории интегрального исчисления. С тех пор возникло множество приближённых методов вычисления определённых интегралов. И сегодня указанная задача является одной из наиболее важных задач численного анализа и не утратила своё актуальности.

Развитие методов приближённого интегрирования привело к известным экстремальным задачам отыскания *наилучших* (*оптимальных*) квадратурных формул в смысле С.М.Никольского[1,2] и А.Сарда[3,4].

К середине восьмидесятых годов прошлого столетия в решении экстремальных задач теории квадратур наблюдался значительный прогресс. Для соболевских классов периодических дифференцируемых функций с ограниченной по норме старшей производной в пространстве L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ и классов функций, задаваемых модулями непрерывности r-й производной, задача отыскания наилучших квадратурных формул полностью была решена. Эти и другие наиболее важные результаты приведены Н.П.Корнейчуком в „Добавлении" к известной монографии С.М.Никольского[2]. Н.П.Корнейчук, наряду с значительным успехом в этой области, отмечает, что решение аналогичных задач для других типов определённых интегралов, таких как определённые интегралы с весовой функцией, сингулярные интегралы с фиксированной особенностью, криволинейные интегралы, поверхностные интегралы, не решены, а для многомерных определённых интегралов наилучшие кубатурные формулы известны в очень редких случаях. Поэтому решение экстремальных задач отыскания наилучших квадратурных и кубатурных формул для перечисленных интегралов является актуальным. Частично этот пробел — нахождение оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов — восполняется в данной диссертационной работе.

В диссертационной работе рассматриваются экстремальные задачи отыскания оптимальных квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(M_k) + R_N(f;\Gamma), \qquad (1)$$

[1]Никольский С.М. Квадратурные формулы // Изв. АН СССР. Серия матем. 1952. Т.6. С.181-196.

[2]Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука. 1988. 256 с.

[3]Sard A. Best approximation integration formulas, best approximate formulas // American J. of Math. 1949. LXXI. P.80-91.

[4]Sard A., Meyers F. Best approximate integration formulas // J. Math. and Phys. 1950. XXIX. P.118-123.

для которой выполнено условие $A_1 + A_2 + \cdots + A_N = L$, где L – длина Γ.

Сформулируем экстремальную задачу отыскания *наилучшей* (или *оптимальной*) квадратурной формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла в смысле С.М.Никольского[2] и в смысле А.Сарда[3,4] применительно к квадратурной формуле (1), зависящей как от кривой Γ, так и от произвольных коэффициентов $\mathcal{A}_k$ и расположения узлов $\{M_k\}$. Если кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in [0, L]$, то формула (1) приобретает следующий вид

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(f). \tag{2}$$

Всякая квадратурная формула вида (2) задаётся векторами узлов $S = \Big\{s_k : \ 0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N \le L\Big\}$ и коэффициентов $A = \{A_k\}_{k=1}^N$; $R_N(f; \Gamma) := R_N(f, \Gamma; A, S)$ – погрешность формулы (2) на функции $f(M) := f(x(s), y(s))$. При фиксированном целом $N \ge 1$ через $\mathcal{A}$ обозначим множество векторов (S, A) узлов и коэффициентов, для которых формула (2) имеет смысл. Погрешность формулы (2)

$$R_N(f, \Gamma; A, S) = \int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds - \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k))$$

имеет вполне определённое числовое значение. Пусть $\mathfrak{N}_Q(L)$ — класс плоских спрямляемых кривых Γ с непрерывной кривизной, целиком лежащей в области $Q = \{x^2(s) + y^2(s) \le L^2\}$, длины которых равны L.

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $f(x(s), y(s))$, определённых в точках кривой Γ и интегрируемых как сложная функция $F(s) := f(x(s), y(s))$ параметра $s \in [0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности на всём классе $\mathfrak{M}$ на заданной кривой Γ примем величину

$$R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; A, S) = \sup\Big\{|R_N(f, \Gamma; A, S)| : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}. \tag{3}$$

Аналогично, за величину, характеризующую погрешность квадратурной формулы (2) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, следует взять величину

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S) = \sup\Big\{R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; A, S) : \ \Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)\Big\}. \tag{4}$$

Задача состоит в отыскании величины

$$\mathscr{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\Big\{R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S) : \ (A, S) \subset \mathcal{A}\Big\}. \tag{5}$$

Если существует $(A^0, S^0) = \left(\{A_k^0\}_{k=1}^N, \{s_k^0\}_{k=1}^N\right)$ – вектор коэффициентов и узлов, для которых выполняется равенство

$$\mathscr{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^0, S^0),$$

то квадратурная формула (2) с векторами коэффициентов и узлов (A^0, S^0) называется *наилучшей* (или *оптимальной*) квадратурной формулой в смысле С.М.Никольского на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, а вектор (A^0, S^0) называется *наилучшим* или *оптимальным вектором коэффициентов и узлов*. Теперь предположим, что в квадратурной формуле (2) вектор $S^* = \{s_k^*\}_{k=1}^N$ заранее зафиксирован и требуется найти величину

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); S^*) = \inf\left\{R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S^*) : \ A \subset \mathcal{A}\right\} \tag{6}$$

и если существует вектор коэффициентов $A^0 \subset \mathcal{A}$, для которого

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); S^*) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^0, S^*),$$

то говорят, что квадратурная формула (2) с вектором коэффициентов A^0 и фиксированным вектором узлов S^* является наилучшей (или оптимальной) по коэффициентам в смысле А.Сарда[3].

Если же в квадратурной формуле (2) заранее зафиксирован вектор коэффициентов $A^* = \{A_k^*\}_{k=1}^N$ и требуется вычислить величину

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*) = \inf\left\{R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*, S) : \ S \subset \mathcal{A}\right\} \tag{7}$$

и при этом существует вектор узлов $S^0 \subset \mathcal{A}$, для которого

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*, S^0),$$

то говорят, что квадратурная формула (2) с вектором узлов S^0 и фиксированным вектором коэффициентов $A^* = \left\{A_k^*\right\}_{k=1}^N$ является *наилучшей* (или *оптимальной*) по узлам в смысле А.Сарда[3].

В этой работе мы находим *наилучшие* (*оптимальные*) квадратурные формулы вида (2), как в смысле С.М.Никольского, так и в смысле А.Сарда, для некоторых классов функций и классов кривых.

Цель и задачи исследования. Цель работы состоит в следующем:

1. Найти наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов в смысле С.М.Никольского и А.Сарда для классов функций с ограниченным по норме градиентом $\left\|\nabla f\right\|_{L_2} \le \mathcal{K}$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

2. Найти наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций с ограниченной по норме пространства $L_p[0,L]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ градиента и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
3. Найти наилучшие весовые квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для классов функций с ограниченными вариациями.
4. Найти наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций, у которых норма $\left\|\nabla^2 f\right\|_{L_p} \leq \mathcal{K}$ $(1 \leq p \leq \infty)$, и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
5. Найти асимптотически точные оценки погрешности усложнённых квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций, у которых градиент $\nabla f \in H^\omega[0,L]$, и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Основные методы исследования. В диссертации используются современные методы решения экстремальных задач теории аппроксимации и функционального анализа, а при нахождении оптимальных квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов для различных классов функций и кривых используется известный метод Корнейчука оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- Найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов в смысле С.М.Никольского и А.Сарда для классов функций с ограниченным по норме градиентом $\left\|\nabla f\right\|_{L_2} \leq \mathcal{K}$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
- Найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций с ограниченным по норме пространства $L_p[0,L]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ градиентом и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
- Найдены наилучшие весовые квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для классов функций с ограниченными вариациями.
- Найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций, у которых норма $\left\|\nabla^2 f\right\|_{L_p} \leq \mathcal{K}$ $(1 \leq p \leq \infty)$, и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
- Получены асимптотически точные оценки погрешности усложнённых квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций, у которых градиент $\nabla f \in H^\omega[0,L]$, и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты диссертации могут быть использованы при приближённом вычислении поверхностных интегралов. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2012-2017 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвящённой 80-летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г.).

Публикации. Результаты автора по теме диссертационной работы опубликованы в 8 работах [1–8]. Из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 4 статьи в трудах международных конференций. В совместной работе [1] научному руководителю М.Ш.Шабозову принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 35 наименований, занимает 86 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

В диссертационной работе найдены *наилучшие* (*оптимальные*) квадратурные формулы вида (2) как в смысле С.М.Никольского, так и в смысле А.Сарда для некоторых классов функций и классов кривых.

Отметим, что наилучшие квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого вида ранее найдены, например, в работах С.Б.Вакарчука[5], М.Ш.Шабозова[6,7], М.Ш.Шабозова и Ф.М.Мирпоччоева[8], М.Ш.Шабозова и Д.С.Сангмамадова[9], Д.С.Сангмамадова[10,11], Ф.М.Мирпоччоева[12], М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева[13], К.Тухлиева[14], Г.А.Юсупова и А.А.Шабозовой[15].

В первом параграфе первой главы приведена постановка задач и определение классов функций $\{f(x(s), y(s))\}$, задаваемых и непрерывных на классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, для которых решена задача отыскания наилучших квадратурных формул (5) в смысле С.М.Никольского для формул вида (2).

Пусть $W_p^{(1)}(\mathcal{K}; Q) := W^{(1)}L_p(\mathcal{K}; Q)$, $1 \le p \le \infty$ — класс функций $\{f(x(s), y(s))\}$, у которых почти всюду в области $Q = \{x^2(s) + y^2(s) \le L^2\}$ существуют частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ с ограничением

$$\Big\| grad\, f(x(\cdot), y(\cdot)) \Big\|_{L_{p[0,L]}} := \left(\int\limits_0^L \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right|^p ds \right)^{1/p} \le \mathcal{K},\ 1 \le p < \infty,$$

[5]Вакарчук С.Б. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. 1986. Т.38, №5. С.643-645.

[6]Шабозов М.Ш. Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью // Укр. матем. журнал. 1995. Т.47, №9. С.1300-1305.

[7]Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. 2014. Т.96, №7. С.637-640.

[8]Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. 2010. Т.53, №6. С.415-419.

[9]Шабозов М.Ш., Сангмамадов Д.С. О наилучших квадратурных формулах приближённого вычисления криволинейных интегралов первого типа // ДАН РТ. 2012. Т.55, №11. С.847-852.

[10]Сангмамадов Д.С. Наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода // ДАН РТ. 2011. Т.54, №9. С.709-714.

[11]Сангмамадов Д.С. К вопросу об оценках квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода некоторых классов функции // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. 2011, №3(144). С.7-13.

[12]Мирпоччоев Ф.М. О приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. 2012. Т.55, №5. С.359-365.

[13]Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. 2015. Сер.1. Т.2(60), Вып.4. С.72-85.

[14]Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Изв. ТулГУ. 2013. Вып.2. Ч.1. С.50-57.

[15]Юсупов Г.А., Шабозова А.А. Точные оценки приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. 2013. Т.56, №7. С.509-514.

$$\left\| grad\, f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_\infty[0,L]} = \underset{(x,y)\in Q}{supvrai}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right|\right\} \le \mathcal{K},\ p=\infty,$$

где, как обычно,

$$\left| grad\, f(x(s),y(s))\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\right)^2}$$

при условии, что $(dx/ds)^2+(dy/ds)^2=1$.

Через $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$ обозначим множество функций $f\in W^{(1)}_p(\mathcal{K};Q)$, удовлетворяющих условию $f(x(0),y(0))=0$.

Аналогичным образом через $W^{(2)}_p(\mathcal{K};Q) := W^{(2)}L_p(\mathcal{K};Q)$, $1\le p\le\infty$ обозначим множество функций $\{f(x(s),y(s))\}$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial^2 f/\partial^{2-i}x\partial y^i$ $(i=0,1,2)$, удовлетворяющие условиям

$$\left\|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right\|_{L_p[0,L]} = \left(\int\limits_0^L \left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right|^p ds\right)^{1/p} \le \mathcal{K},\quad 1\le p<\infty,$$

$$\left\|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right\|_{L_\infty[0,L]} := \underset{(x,y)\in Q}{supvrai}\left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right| \le \mathcal{K},\ p=\infty.$$

Через $W^{(2)}_{0,p}(\mathcal{K};Q) := W^{(2)}_{0,p}L_p(\mathcal{K};Q)$, $1\le p\le\infty$ обозначим множество функций $f\in W^{(2)}_p(\mathcal{K};Q)$, у которых

$$f(x(0),y(0)) = f'_x(x(0),y(0)) = f'_y(x(0),y(0)) = 0.$$

Одним из результатов второго параграфа первой главы является

Теорема 1.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (2) *для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого типа на классе функций* $W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q)$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *наилучшей является формула*

$$\int\limits_\Gamma f(M)ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right) + R_N(f,\Gamma). \qquad (8)$$

При этом погрешность формулы (8) *на всём классе* $W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q)$ *и классе* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathscr{E}_N(W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}}, \qquad (9)$$

где L *— длина кривой* Γ.

В этом же параграфе рассматривается **следующая задача:** исходя из наилучшей квадратурной формулы С.М.Никольского (8), построить наилучшую по коэффициентам в смысле Сарда квадратурную формулу следующего вида

$$\int\limits_{\Gamma} f(x(s),y(s))ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\mathcal{B}_k f(x(\tau_k),y(\tau_k)) + R_N^*(f,\Gamma), \tag{10}$$

где τ_k $(k=\overline{1,N})$ – заранее заданные узлы, а $\mathcal{B}_k$ подлежат определению из условия минимизации погрешности формулы (10).

Таким образом, для рассматриваемого класса функций $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ требуется построить удлинённую наилучшую по коэффициентам квадратурную формулу вида (10), то есть найти значения коэффициентов $\mathcal{B}_k$ при заданных $\tau_k = kL/(2N+1)$ $(k=\overline{1,N})$ так, чтобы величина погрешности $R_N^*(f,\Gamma)$ на указанных классах функций и кривых была наименьшей.

Наилучшая по коэффициентам квадратурная формула (10) в смысле А.Сарда, получаемая удлинением наилучшей квадратурной формулы (8) в смысле С.М.Никольского, имеет вид

$$\int\limits_{0}^{L} f(x(s),y(s))ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)+$$

$$+\frac{L}{2(2N+1)} f\left(x\left(\frac{L}{2N+1}\right), y\left(\frac{L}{2N+1}\right)\right) + R_N^*(f,\Gamma). \tag{11}$$

Учитывая (8) и значение погрешности (9) для формулы (11), получаем точную на классе $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ оценку погрешности

$$\mathscr{E}_N^*(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{3}{4(2N+1)}} =$$

$$= \mathscr{E}_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L))\sqrt{1-\frac{3}{4(2N+1)}}.$$

В первом параграфе мы определили $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$, $1\le p\le\infty$ как подкласс функций $\{f(x(s),y(s))\}$ класса $W^{(1)}_{p}(\mathcal{K};Q)$, имеющих в области Q непрерывные частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ с ограничением

$$\Big\|grad\, f(x(\cdot),y(\cdot))\Big\|_{L_{p[0,L]}} := \left(\int\limits_0^L \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right|^p ds\right)^{1/p} \le \mathcal{K},\ 1\le p<\infty.$$

В третьем параграфе доказано, что для класса $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$, $1\le p\le\infty$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ имеет место следующая

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (1) *наилучшей для классов функций* $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_\Gamma f(M)ds=\frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^N f(M_k^*)+R_N(f;\Gamma), \tag{12}$$

где $M_k^*:=M\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right),y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)$, $x=x(s)$, $y=y(s)$ *— параметрические уравнения кривой* Γ, L *— её длина. Для минимальной оценки погрешности формулы* (12) *на указанных классах функций и кривых имеет место точная оценка*

$$\mathscr{E}_N(W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{\mathcal{K}L^{1+1/q}}{\sqrt[q]{q+1}(2N+1)},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1\le q\le\infty.$$

Из данной теоремы при $p=1,2,\infty$ выводятся конкретные следствия.

В четвёртом параграфе первой главы рассмотрен вопрос оптимизации приближённого вычисления криволинейного интеграла с весом первого рода

$$\mathcal{J}(q;f;\Gamma)=\int\limits_\Gamma q(M)f(M)ds\approx\sum_{k=1}^N A_kf(M_k), \tag{13}$$

где весовая функция $q(M)\ge 0$ на Γ — произвольная спрямляемая кривая с конечной длиной L, кривизна которой кусочно-непрерывна, а $f(M)=f(x,y)$ – произвольная непрерывная на Γ функция.

Предположим, что кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x=x(s)$, $y=y(s)$ $(0\le s\le L)$ и функция $q(x(s),y(s))\ge 0$, $0\le s\le L$. Обозначая тогда через $s_k\in[0,L]$ $(k=1,2,\dots,N)$ значения длины дуги s кривой Γ, которые соответствуют точкам $M_k\in\Gamma$, перепишем квадратурную формулу (13) в следующем виде

$$\int_0^L q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds = \sum_{k=1}^N A_k f(x(s_k),y(s_k)) + R_N(q,f;\Gamma). \qquad (14)$$

Будем предполагать, что квадратурная формула (14) является точной для постоянной функции $f(x(s),y(s)) = C = \mathrm{const}$. Тогда очевидно выполняется условие

$$\int_0^L q(x(s),y(s))ds = \sum_{k=1}^N A_k. \qquad (15)$$

Пусть $V(L;M)$ — класс заданных на отрезке $[0,L]$ функций

$$F(s) := f(x(s),y(s)),$$

полная вариация которых на отрезке $[0,L]$ не превосходит числа M :

$$\bigvee_0^L(F) = \bigvee_0^L(f) \le M.$$

Для класса функций $V(L,M)$ требуется найти величину

$$\mathscr{E}_N(q;V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) =$$

$$= \inf\Big\{R_N(q;V(L,M);\mathfrak{N}_Q(L);A,S):\ (A,S)\subset\mathcal{A}\Big\} \qquad (16)$$

и указать векторы коэффициентов и узлов (A^0,S^0), реализующих точную нижнюю грань в (16).

Основным результатом четвёртого параграфа первой главы является

Теорема 1.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (14) *наилучшей для классов функций* $V(L,M)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула, у которой векторы узлов и коэффициентов* (A^0,S^0) *определяются по весовой функции* $q(x(s),y(s))$ *из соотношения*

$$2\int_0^{s_1^0} q(x(s),y(s))ds = \int_{s_1^0}^{s_2^0} q(x(s),y(s))ds = \cdots$$

$$\cdots = \int_{s_{N-1}}^{s_N^0} q(x(s),y(s))ds = 2\int_{s_N^0}^{L} q(x(s),y(s))ds = \beta(S^0), \qquad (17)$$

$$A_k^0 = \beta(S^0), \quad k=\overline{1,N}. \qquad (18)$$

При этом для погрешности наилучшей формулы на указанных классах функций и кривых справедлива оценка

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{M}{2}\,\beta(S^0).$$

Частные случаи: I. Пусть, например, $q(x(s),y(s))=s^\alpha$, $\alpha>-1$. Тогда из равенства (17) и (18) находим *узлы* и *коэффициенты наилучшей* для классов $V(L,M)$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$ квадратурной формулы:

$$s_k^0=\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}L,\quad A_k^0=\frac{L^{\alpha+1}}{N(\alpha+1)},\quad k=\overline{1,N}.$$

Таким образом, в этом случае *наилучшая квадратурная формула* имеет вид:

$$\int\limits_0^L s^\alpha f(x(s),y(s))ds=$$

$$=\frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}L\right),y\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}L\right)\right)+R_N(f;s^\alpha).$$

При этом для погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе $V(L,M)$ справедлива оценка

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{ML^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)N}.$$

II. Пусть $q(x(s),y(s))=e^s$. *В этом случае узлы и коэффициенты наилучшей формулы* имеют вид:

$$s_k^0=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2k-1}{2N}(e^L-1)+1\right),\ A_k^0=\frac{e^L-1}{N},\ k=\overline{1,N}.$$

При этом

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{M(e^L-1)}{2N}.$$

Также рассмотрен случай, когда в сформулированной задаче заранее зафиксированы в качестве узлов квадратурной формулы концы промежутка $[0,L]:\ s_0=0,\ s_N=L$, а узлы $s_1,s_2,\ldots,s_{N-1}$ и коэффициенты A_k $(k=\overline{1,N})$ требуется выбрать оптимальным образом. Такими квадратурными формулами в литературе называются квадратурные формулы типа А.А.Маркова (см., например[2]). Итак, считая $S=\big\{s_k:\ 0=s_0<s_1,\dots<s_{N-1}<s_N=L\big\}$, рассмотрим *квадратурную формулу типа Маркова* общего вида

$$\int_0^L q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds = A_0 f(x(0),y(0)) + \sum_{k=1}^{N-1} A_k f(x(s_k),y(s_k)) +$$

$$+A_N f(x(L),y(L)) + R_N(f;\Gamma,A,S). \tag{19}$$

Для погрешности наилучшей формулы типа Маркова (19) доказана

Теорема 1.4.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (14) *наилучшей для классов функций* $V(L,M)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула, у которой векторы узлов и коэффициентов* $(\overline{A},\overline{S})$ *определяются по весовой функции* $q(x(s),y(s))$ *из соотношения*

$$\int_0^{\overline{s}_1} q(x(s),y(s))ds = \int_{\overline{s}_1}^{\overline{s}_2} q(x(s),y(s))ds = \cdots$$

$$\cdots = \int_{\overline{s}_{N-2}}^{\overline{s}_{N-1}} q(x(s),y(s))ds = \int_{\overline{s}_{N-1}}^{L} q(x(s),y(s))ds = \beta(\overline{S}), \tag{20}$$

$$\overline{A}_1 = \int_a^{\overline{t}_1} q(x(s),y(s))ds = \frac{1}{2}\beta(\overline{S}),\ \ \overline{A}_N = \int_{\overline{t}_{N-1}}^{\overline{t}_N} q(x(s),y(s))ds = \frac{1}{2}\beta(\overline{S});$$

$$\overline{A}_k = \int_{\overline{t}_k}^{\overline{t}_{k+1}} q(x(s),y(s))ds = \beta(\overline{S}), \quad (k=\overline{1,N-2}), \tag{21}$$

где $\overline{t}_0 = 0$, $\overline{t}_N = L$, *а числа* $\overline{t}_k$ *определяются из равенства*

$$\int_{\overline{s}_{k-1}}^{\overline{t}_k} q(x(s),y(s))ds = \int_{\overline{t}_k}^{\overline{s}_k} q(x(s),y(s))ds,\ (k=\overline{1,N-1}).$$

При этом

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2}\,\beta(\overline{S}). \tag{22}$$

Рассмотрены **частные случаи** *наилучших квадратурных формул типа Маркова* для рассмотренных выше конкретных весовых функций:

I. Пусть $q(x(s),y(s)) = s^\alpha$, $\alpha > -1$. Из соотношений (20) – (22) находим *узлы, коэффициенты и точную оценку погрешности наилучшей квадратурной формулы типа Маркова* (19) на классах функций $V(L,M)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$:

$$\overline{s}_k = \left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L,\ (k=\overline{1,N-1}),\ \overline{s}_0 = 0,\ \overline{s}_N = L;$$

$$\overline{p}_0 = \overline{p}_N = \frac{L^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)N},\ \overline{p}_k = \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}\ \ (k=\overline{1,N-1});$$

Наилучшая квадратурная формула типа Маркова (19) имеет вид

$$\int\limits_0^L s^\alpha f(x(s),y(s))ds = \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}\left\{\frac{f(x(0),y(0))+f(x(L),y(L))}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L\right), y\left(\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L\right)\right)\right\} + R_N(f;s^\alpha).$$

$$\overline{\mathscr{E}}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2}\cdot\frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}.$$

II. $q(x(s),y(s)) = e^s,\ 0\le s\le L$. В этом случае *узлы, коэффициенты и точная оценка погрешности наилучшей квадратурной формулы* имеют вид:

$$\overline{s}_0 = 0,\ \overline{s}_N = L,\ \overline{s}_k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k}{N}(e^L-1)+1\right),\ (k=\overline{1,N-1});$$

$$\overline{p}_0 = \overline{p}_N = \frac{e^L-1}{2N},\ \overline{p}_k = \frac{e^L-1}{N}\ \ (k=\overline{1,N-1});$$

$$\overline{\mathscr{E}}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2}\cdot\frac{e^L-1}{N}.$$

Переходим к краткому изложению результатов второй главы.

В первом параграфе второй главы рассматривается вопрос отыскания наилучших квадратурных формул вида (2) для классов функций $\{f(x(s),y(s))\}$ с ограниченной в пространстве L_p $(1\le p\le\infty)$ нормой второго градиента

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_p} \le \mathcal{K},\ 1\le p\le\infty$$

вдоль произвольной кривой $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$, длина которой равна L.

Прежде всего напомним, что через $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ в параграфе 1.1 мы обозначали класс функций $\{f(x(s),y(s))\}$, у которых всюду в области Q существуют непрерывные частные производные $\partial^2 f/\partial^{2-k}x\partial y^k$ $(k=0,1,2)$, удовлетворяющие условиям

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_p[0,L]} := \left(\int\limits_0^L \left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right|^p ds\right)^{1/p} \le \mathcal{K},\ \ 1\le p<\infty,$$

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_\infty[0,L]} := essup\left\{\left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right| : \ s\in[0,L]\right\} \le \mathcal{K}, \ p=\infty,$$

где оператор «∇» определяется равенством

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} \quad \text{и} \quad \nabla^2 := \nabla(\nabla),$$

В первом параграфе второй главы найдены наилучшие квадратурные формулы для классов функций $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ при всех $1\le p\le\infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Приведём формулировку результата для классов функций $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ $(1\le p\le\infty)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Теорема 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (1) *наилучшей для класса функций* $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$, $1\le p\le\infty$ *и класса кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является квадратурная формула*

$$\int\limits_\Gamma f(M)ds = \sum_{k=1}^N A_k^* f(M_k^*) + R_N(f;\Gamma), \tag{23}$$

где $A_k^* = p_k^* L$, $M_k^* := M\big(x(\sigma_k^* L), y(\sigma_k^* L)\big)$, $x=x(s)$, $y=y(s)$ *— параметрические уравнения кривой* Γ, L *— её длина, коэффициенты* p_k^* *и узлы* σ_k^* *определены равенствами*

$$p_1^* = p_N^* = \frac{1+\sqrt{p_{2q}(1)}}{2\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\,\big)}; \quad p_k^* = \frac{1}{N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}}, \quad k=\overline{1,N-1},$$

$$\sigma_k^* = \frac{2(k-1)+\sqrt{p_{2q}}}{2\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\,\big)}, \quad k=\overline{1,N}.$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (23) *при* $q\in[1,\infty]$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ *на указанных классах функций и кривых справедлива точная оценка*

$$\mathscr{E}_N(W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{2+1/q}p_{2q}(1)}{8\sqrt[q]{2q+1}\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)}.$$

Из теоремы 2.1.1 вытекает ряд утверждений.

Следствие 2.1.1. *Пусть* $f\in W_1^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ *и* $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$. *В этом случае* $q=\infty$ *и многочлен наилучшего приближения в* L_∞ *есть многочлен Чебышёва первого рода* $T_2(t) = 2^{-1}\cos(2\arccos t) := t^2-1/2$, $p_{2\infty}(1)=T_2(1)=1/2$.

Коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид

$$A_1 = A_N = \frac{(\sqrt{2}+1)L}{2\big(1+\sqrt{2}(N-1)\big)}; \quad A_k = \frac{\sqrt{2}L}{1+\sqrt{2}(N-1)}, \quad k=\overline{2,N-1};$$

$$s_k = \frac{\left[1+2\sqrt{2}(k-1)\right]}{2\left[1+\sqrt{2}(N-1)\right]}, \quad k=\overline{1,N}.$$

При этом погрешность наилучшей формулы на классах функций $W_1^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathscr{E}_N(W_1^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^2}{8\left[1+\sqrt{2}(N-1)\right]}.$$

Следствие 2.1.2. *Пусть* $f \in W_2^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ *и* $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$. *Тогда* $q=2$ *и многочлен* $p_{22}(t)$ *есть многочлен Лежандра* $\mathscr{L}_2(t) = 3^{-1}(3t^2-1)$, $p_{22}(1) := \mathscr{L}_2(1) = 2/3$, *а коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид*

$$p_1 = p_N = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)L}{2\left[\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)\right]};\ p_k = \frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)}, \quad k=\overline{2,N-1};$$

$$s_k = \frac{\left[\sqrt{2}+2\sqrt{3}(k-1)\right]L}{2\left[\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)\right]}, \quad k=\overline{1,N}.$$

При этом минимальная погрешность наилучшей квадратурной формулы равна

$$\mathscr{E}_N(W_2^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{5/2}}{4\sqrt{5}\left[\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)\right]^2}.$$

Следствие 2.1.3. *Пусть* $f \in W_\infty^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ *и* $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$. *Тогда* $q=1$ *и многочлен* p_{21} *есть многочлен Чебышёва второго рода*

$$U_2(t) = \sin(3\arccos t)\cdot\left\{4\sqrt{1-t^2}\right\}^{-1} := t^2 - 1/4, \quad p_{21}(1) = 3/4.$$

В этом случае коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид

$$p_1 = p_N = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})L}{2\left(\sqrt{3}+2(N-1)\right)};\ p_k = \frac{2L}{\sqrt{3}+2(N-1)}, \quad k=\overline{2,N-1};$$

$$s_k = \frac{\left[\sqrt{3}+4(k-1)L\right]}{2\left[\sqrt{3}+2(N-1)\right]}, \quad k=\overline{1,N}.$$

При этом погрешность наилучшей формулы на классах функций $W_\infty^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathscr{E}_N(W_\infty^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^3}{8\left[\sqrt{3}+2(N-1)\right]^2}.$$

В этом же параграфе найдены наилучшие квадратурные формулы для классов функций $W^{(2)}_{0,p}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Теорема 2.1.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2) *наилучшей для классов функций* $W^{(2)}_{0,p}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le 2$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула, у которой коэффициенты и узлы имеют вид*

$$p_k=\frac{2L}{2N+\sqrt{p_{2q}(1)}},\quad k=\overline{1,N-1};\ p_N=\frac{\big(2+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)L}{2N+\sqrt{p_{2q}(1)}};$$

$$s_k=\frac{2kL}{2N+\sqrt{p_{2q}(1)}},\quad k=\overline{1,N}.$$

При этом для точной оценки погрешности наилучшей формулы на указанных классах функций $W^{(2)}_{p}(\mathcal{K};Q),\ 1\le q\le\infty$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_N(W^{(2)}_{0,p}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{\mathcal{K}L^{2+1/q}p_{2q}(1)}{2\sqrt[q]{2q+1}\big(2N+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)^2}.$$

Из этой теоремы также при $p=1,2,\infty$ выведен ряд следствий.

Во втором параграфе второй главы рассматривается задача нахождения асимптотически точных усложненных квадратурных формул для классов функций $W^{(1)}_{\nabla}H^{\omega}[0,L]$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, вдоль которых градиент $\nabla f(x(s),y(s))$ для любых двух точек $s',s''\in[0,L]$ удовлетворяет условию

$$\Big|\nabla f(x(s''),y(s''))-\nabla f(x(s'),y(s'))\Big|\le\omega(|s''-s'|),$$

где $\omega(t)$ – произвольно заданный модуль непрерывности на отрезке $[0,L]$.

Для изложения результатов второго параграфа второй главы нам понадобятся некоторые определения.

Пусть требуется приближённо вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds=\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds \tag{24}$$

в предположении, что кривая Γ задана параметрическими уравнениями

$$x=x(s),\ y=y(s),\ 0\le s\le L.$$

Для приближённого вычисления интеграла (24), построим аналоги усложнённых квадратурных формул прямоугольников, трапеций и Симпсона имеющих вид:

1) квадратурная формула прямоугольников

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds = \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\right) + R_{N,\text{П}}(f,\Gamma); \quad (25)$$

2) квадратурная формула трапеций

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds = \frac{L}{2N}\Bigg\{ f(x(0),y(0)) + f(x(L),y(L)) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_{N,\text{Т}}(f,\Gamma); \quad (26)$$

3) квадратурная формула Симпсона

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds = \frac{L}{6N}\Bigg\{ f(x(0),y(0)) + f(x(L),y(L)) +$$

$$+4\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_{N,\text{С}}(f,\Gamma). \quad (27)$$

Основным результатом второго параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.2.1. *Для погрешности усложнённых квадратурных формул прямоугольников* (25), *трапеций* (26) *и Симпсона* (27) *для классов функций* $W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L]$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедливы оценки*

$$R_{N,П}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt + \frac{\omega(1)}{32N^2}, \quad (28)$$

$$R_{N,T}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt + \frac{3\omega(1)}{32N^2}, \quad (29)$$

$$R_{N,C}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{36N}\int\limits_0^1 (2+t)\omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt. \quad (30)$$

В заключение этого параграфа отметим, что оценки (28) – (30) справедливы при любом модуле непрерывности $\omega(t)$. Но если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то получим следующие асимптотические точные оценки для класса функций $W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L]$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$:

$$\frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt \le R_{N,\text{П}}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt + \frac{\omega(1)}{32N^2},$$

$$\frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt \le R_{N,\text{Т}}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt + \frac{3\omega(1)}{32N^2},$$

$$\frac{1}{18N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt \le R_{N,\text{С}}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{18N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt + \frac{1}{72N}\,\omega\left(\frac{1}{3N}\right).$$

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю академику АН Республики Таджикистан, доктору физ.-мат. наук, профессору М.Ш.Шабозову за постановку задач и постоянное внимание при работе над диссертацией.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

1. Шабозов М.Ш., Файзмамадова Л.Г. Наилучшая формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2012. №2(147). С.7-15
2. Файзмамадова Л.Г. О численном интегрировании криволинейных интегралов первого рода // ДАН РТ. 2012. Т.55, №7. С.533-539.
3. Файзмамадова Л.Г. Об одной наилучшей квадратурной формуле для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. 2012. Т.55, №9. С.701-706.

4. Файзмамадова Л.Г. Об оптимальных квадратурных формулах для приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. 2013. Т.56, №4. С.265-271.

В других изданиях:

5. Файзмамадова Л.Г. Об одной оптимальной квадратурной формуле для вычисления криволинейного интеграла первого рода // *«Современные проблемы математического анализа и теории функций»* – Материалы международной научной конференции, посвященной 60-летию академика АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозова (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.). С.165-167.

6. Файзмамадова Л.Г. Наилучшая квадратурная формула для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (г. Худжанд, 28-29 июня 2014). С.93-95.

7. Файзмамадова Л.Г. Об одной оптимальной квадратурной формуле приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функции $W^{(1)}_{0,p}(K,Q)$ // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (г. Душанбе, 27-28 апреля 2015). С.49-51.

8. Файзмамадова Л.Г. Об одной наилучшей квадратурной формуле для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016). С.252-254.