Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский государственный университет коммерции

На правах рукописи

Файзмамадова Лолазор Гадомамадовна

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ И КРИВЫХ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
академик АН Республики Таджикистан,
профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 7

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Известно, что задача приближённого вычисления определённых интегралов возникла сразу же после создания Ньютоном и Лейбницом теории интегрального исчисления. С тех пор возникло множество приближённых методов вычисления определённых интегралов. И сегодня указанная задача является одной из наиболее важных задач численного анализа и не утратила своё актуальности.

Развитие методов приближённого интегрирования привело к известным экстремальным задачам отыскания *наилучших* (*оптимальных*) квадратурных формул в смысле С.М.Никольского [9–11] и А.Сарда [15, 16]. К середине восьмидесятых годов прошлого столетия в решении экстремальных задач теории квадратур наблюдался значительный прогресс. Для соболевских классов периодических дифференцируемых функций с ограниченной по норме старшей производной в пространстве L_p $(1 \le p \le \infty)$ и классов функций, задаваемых модулями непрерывности r-й производной, задача отыскания наилучших квадратурных формул полностью была решена. Эти и другие наиболее важные результаты приведены Н.П.Корнейчуком в „Добавлении" к известной монографии С.М.Никольского [11]. Н.П.Корнейчук, наряду с значительным успехом в этой области, отмечает, что решение аналогичных задач для других типов определённых интегралов, таких как определённые интегралы с весовой функцией, сингулярные интегралы с фиксированной особенностью, криволинейные интегралы, поверхностные интегралы, не решены, а для многомерных определённых интегралов наилучшие кубатурные формулы известны в очень редких случаях. Поэтому решение экстремальных задач отыскания наилучших квадратурных и кубатурных формул для перечисленных интегралов является актуальным. Частично этот пробел — нахождение оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов — восполняется в данной диссертационной работе.

В диссертационной работе рассматриваются экстремальные задачи отыскания оптимальных квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(M_k) + R_N(f;\Gamma), \qquad (0.0.1)$$

для которой выполнено условие $A_1 + A_2 + \cdots + A_N = L$.

Сформулируем экстремальную задачу отыскания *наилучшей* (или *оптимальной*) квадратурной формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла в смысле С.М.Никольского [11, с.128] и в смысле А.Сарда [15, 16] применительно к квадратурной формуле (0.0.1), зависящей как от кривой Γ, так и от произвольных коэффициентов $\mathcal{A}_k$ и расположения узлов $\{M_k\}$. Если кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in [0, L]$, то формула (0.0.1) приобретает следующий вид

$$\int_{0}^{L} f(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(f). \qquad (0.0.2)$$

Всякая квадратурная формула вида (0.0.2) задаётся векторами узлов $S = \Big\{s_k : \ 0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N \le L\Big\}$ и коэффициентов $A = \{A_k\}_{k=1}^{N}$; $R_N(f;\Gamma) := R_N(f,\Gamma; A, S)$ – погрешность формулы (0.0.2) на функции $f(M) := f(x(s), y(s))$. При фиксированном целом $N \ge 1$ через $\mathcal{A}$ обозначим множество векторов (S, A) узлов и коэффициентов, для которых формула (0.0.2) имеет смысл. Погрешность формулы (0.0.2)

$$R_N(f,\Gamma; A, S) = \int_{0}^{L} f(x(s), y(s))ds - \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k))$$

имеет вполне определённое числовое значение. Пусть $\mathfrak{N}_Q(L)$ — класс плоских спрямляемых кривых Γ с непрерывной кривизной, целиком лежащей в области $Q = \{x^2(s) + y^2(s) \le L^2\}$, длины которых равны L.

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $f(x(s), y(s))$, определённых в точках кривой Γ и интегрируемых как сложная функция $F(s) := f(x(s), y(s))$

параметра $s \in [0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности на всём классе $\mathfrak{M}$ на заданной кривой Γ примем величину

$$R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; A, S) = \sup\left\{|R_N(f, \Gamma; A, S)| : \ f \in \mathfrak{M}\right\}. \qquad (0.0.3)$$

Аналогично, за величину, характеризующую наибольшую погрешность квадратурной формулы (0.0.2) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, следует взять величину

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S) = \sup\left\{R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; A, S) : \ \Gamma \in \mathfrak{N}_Q(L)\right\}. \qquad (0.0.4)$$

Задача состоит в отыскании величины

$$\mathscr{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\left\{R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S) : \ (A, S) \subset \mathcal{A}\right\}. \qquad (0.0.5)$$

Если существует $(A^0, S^0) = \left(\{A_k\}_{k=1}^N, \{s_k^0\}_{k=1}^N\right)$ — вектор коэффициентов и узлов, для которых выполняется равенство

$$\mathscr{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^0, S^0),$$

то квадратурная формула (0.0.2) с векторами коэффициентов и узлов (A^0, S^0) называется *наилучшей* (или *оптимальной*) квадратурной формулой в смысле С.М.Никольского на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, а вектор (A^0, S^0) называется *наилучшим* или *оптимальным вектором коэффициентов и узлов*. Теперь предположим, что в квадратурной формуле (0.0.2) вектор $S^* = \{s_k^*\}_{k=1}^N$ заранее зафиксирован и требуется найти величину

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); S^*) = \inf\left\{R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A, S^*) : \ A \subset \mathcal{A}\right\} \qquad (0.0.6)$$

и если существует вектор коэффициентов $A^0 \subset \mathcal{A}$, для которого

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); S^*) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^0, S^*),$$

то говорят, что квадратурная формула (0.0.2) с вектором коэффициентов A^0 и фиксированным вектором узлов S^* является наилучшей (или оптимальной) по коэффициентам в смысле А.Сарда [15].

Если же в квадратурной формуле (0.0.2) заранее зафиксирован вектор коэффициентов $A^* = \{A_k^*\}_{k=1}^N$ и требуется вычислить величину

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*) = \inf\left\{R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*, S) : \ S \subset \mathcal{A}\right\} \qquad (0.0.7)$$

и при этом существует вектор узлов $S^0 \subset \mathcal{A}$, для которого

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); A^*, S^0),$$

то говорят, что квадратурная формула (0.0.2) с вектором узлов S^0 и фиксированным вектором коэффициентов $A^* = \left\{A_k^*\right\}_{k=1}^N$ является *наилучшей* (или *оптимальной*) по узлам в смысле А.Сарда [15].

В этой работе мы находим *наилучшие* (*оптимальные*) квадратурные формулы вида (0.0.2), как в смысле С.М.Никольского, так и в смысле А.Сарда, для некоторых классов функций и классов кривых.

Цель работы

1. Найти наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов в смысле С.М.Никольского и А.Сарда для классов функций с ограниченным по норме градиентом $\left\|\nabla f\right\|_{L_2} \leq \mathcal{K}$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
2. Найти наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций с ограниченной по норме пространства $L_p[0, L]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ градиента и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
3. Найти наилучшие весовые квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для классов функций с ограниченными вариациями.
4. Найти наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций, у которых норма $\left\|\nabla^2 f\right\|_{L_p} \leq \mathcal{K}$ $(1 \leq p \leq \infty)$, и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
5. Найти асимптотически точные оценки погрешности усложнённых квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций, у которых градиент $\nabla f \in H^\omega[0, L]$, и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Научная новизна исследований

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1. Найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов в смысле С.М.Никольского и А.Сарда

для классов функций с ограниченным по норме градиентом $\left\|\nabla f\right\|_{L_2} \le \mathcal{K}$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

2. Найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций с ограниченным по норме пространства $L_p[0, L]$ $(1 \le p \le \infty)$ градиентом и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
3. Найдены наилучшие весовые квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для классов функций с ограниченными вариациями.
4. Найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций, у которых норма $\left\|\nabla^2 f\right\|_{L_p} \le \mathcal{K}$ $(1 \le p \le \infty)$, и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.
5. Получены асимптотически точные оценки погрешности усложнённых квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций, у которых градиент $\nabla f \in H^{\omega}[0, L]$, и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Основные методы исследования

В диссертации используются современные методы решения экстремальных задач теории аппроксимации и функционального анализа, а при нахождении оптимальных квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов для различных классов функций и кривых используется известный метод Корнейчука оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты диссертации могут быть использованы при приближённом вычислении поверхностных интегралов. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2012-2017 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвящённой 80-летию члена-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертационной работы опубликованы в 8 работах [20–26, 32]. Из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 4 статьи в трудах международных конференций. В совместной работе [32] научному руководителю М.Ш.Шабозову принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 35 наименований, занимает 86 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

В диссертационной работе найдены *наилучшие* (*оптимальные*) квадратурные формулы вида (0.0.2) как в смысле С.М.Никольского, так и в смысле А.Сарда для некоторых классов функций и классов кривых.

Отметим, что наилучшие квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого вида ранее найдены, например, в работах С.Б.Вакарчука [4], М.Ш.Шабозова [27, 33], М.Ш.Шабозова и Ф.М.Мирпоччоева [30], М.Ш.Шабозова и Д.С.Сангмамадова [31], Д.С.Сангмамадова [17, 18], Ф.М.Мирпоччоева [7, 8], М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [34], К.Тухлиева [19], Г.А.Юсупова и А.А.Шабозовой [35].

В первом параграфе первой главы приведена постановка задач и определение классов функций $\{f(x(s), y(s))\}$, задаваемых и непрерывных на классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, для которых решена задача отыскания наилучших квадратурных формул (0.0.5) в смысле С.М.Никольского для формул вида (0.0.2).

Пусть $W_p^{(1)}(\mathcal{K}; Q) := W^{(1)}L_p(\mathcal{K}; Q)$, $1 \le p \le \infty$ — класс функций $\{f(x(s), y(s))\}$, у которых почти всюду в области $Q = \{x^2(s) + y^2(s) \le L^2\}$ существуют частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ с ограничением

$$\Big\|grad\, f(x(\cdot), y(\cdot))\Big\|_{L_{p[0,L]}} := \left(\int_0^L \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right|^p ds\right)^{1/p} \le \mathcal{K},\ 1 \le p < \infty,$$

$$\Big\|grad\, f(x(\cdot), y(\cdot))\Big\|_{L_{\infty[0,L]}} = \underset{(x,y)\in Q}{supvrai}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right|\right\} \le \mathcal{K},\ p = \infty,$$

где, как обычно,

$$\Big|grad\, f(x(s), y(s))\Big| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial y}\right)^2}$$

при условии, что $(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 = 1$.

Через $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$ обозначим множество функций $f \in W^{(1)}_p(\mathcal{K};Q)$, удовлетворяющих условию $f(x(0),y(0))=0$.

Аналогичным образом через $W^{(2)}_p(\mathcal{K};Q) := W^{(2)}L_p(\mathcal{K};Q)$, $1 \le p \le \infty$ обозначим множество функций $\{f(x(s),y(s))\}$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^{2-i}x\partial y^i} \quad (i=0,1,2),$$

удовлетворяющие условиям

$$\left\|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right\|_{L_p[0,L]} = \left(\int\limits_0^L \left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right|^p ds\right)^{1/p} \le \mathcal{K}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\left\|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right\|_{L_\infty[0,L]} := \underset{(x,y)\in Q}{supvrai}\left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right| \le \mathcal{K},\ p=\infty.$$

Через $W^{(2)}_{0,p}(\mathcal{K};Q) := W^{(2)}_{0,p}L_p(\mathcal{K};Q)$, $1 \le p \le \infty$ обозначим множество функций $f \in W^{(2)}_p(\mathcal{K};Q)$, у которых

$$f(x(0),y(0)) = f'_x(x(0),y(0)) = f'_y(x(0),y(0)) = 0.$$

Одним из результатов второго параграфа первой главы является

Теорема 1.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.2) *для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого типа на классе функций* $W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q)$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *наилучшей является формула*

$$\int\limits_\Gamma f(M)ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right) + R_N(f,\Gamma). \quad (0.0.8)$$

При этом погрешность формулы (0.0.8) *на всём классе* $W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q)$ *и классе* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathscr{E}_N(W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}}, \quad (0.0.9)$$

где L — длина кривой Γ.

В этом же параграфе рассматривается **следующая задача:** исходя из наилучшей квадратурной формулы С.М.Никольского (0.0.8), построить наилучшую по коэффициентам в смысле Сарда квадратурную формулу следующего вида

$$\int\limits_{\Gamma} f(x(s),y(s))ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N} \mathcal{B}_k f(x(\tau_k),y(\tau_k)) + R_N^*(f,\Gamma), \qquad (0.0.10)$$

где τ_k $(k=\overline{1,N})$ – заранее заданные узлы, а $\mathcal{B}_k$ подлежат определению из условия минимизации погрешности формулы (0.0.10).

Таким образом, для рассматриваемого класса функций $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ требуется построить удлинённую наилучшую по коэффициентам квадратурную формулу вида (0.0.10), то есть найти значения коэффициентов $\mathcal{B}_k$ при заданных $\tau_k = kL/(2N+1)$ $(k=\overline{1,N})$ так, чтобы величина погрешности $R_N^*(f,\Gamma)$ на указанных классах функций и кривых была наименьшей.

Наилучшая по коэффициентам квадратурная формула (0.0.10) в смысле А.Сарда, получаемая удлинением наилучшей квадратурной формулы (0.0.8) в смысле С.М.Никольского, имеет вид

$$\int\limits_{0}^{L} f(x(s),y(s))ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right) +$$

$$+\frac{L}{2(2N+1)} f\left(x\left(\frac{L}{2N+1}\right), y\left(\frac{L}{2N+1}\right)\right) + R_N^*(f,\Gamma). \qquad (0.0.11)$$

Учитывая (0.0.8) и значение погрешности (0.0.9) для формулы (0.0.11), получаем точную на классе $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ оценку погрешности

$$\mathscr{E}_N^*(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{3}{4(2N+1)}} =$$

$$= \mathscr{E}_N(W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q), \mathfrak{N}_Q(L))\sqrt{1 - \frac{3}{4(2N+1)}}.$$

В первом параграфе мы определили $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$, $1 \leq p \leq \infty$ как подкласс функций $\{f(x(s), y(s))\}$ класса $W^{(1)}_{p}(\mathcal{K};Q)$, имеющих в области Q непрерывные частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ с ограничением

$$\left\| grad\, f(x(\cdot), y(\cdot)) \right\|_{L_{p[0,L]}} := \left(\int\limits_0^L \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right|^p ds \right)^{1/p} \leq \mathcal{K},\ 1 \leq p < \infty.$$

В третьем параграфе доказано, что для класса $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$, $1 \leq p \leq \infty$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ имеет место следующая

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.1) *наилучшей для классов функций* $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f(M_k^*) + R_N(f;\Gamma), \tag{0.0.12}$$

где $M_k^* := M\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)$, $x = x(s)$, $y = y(s)$ *— параметрические уравнения кривой* Γ, L *— её длина. Для минимальной оценки погрешности формулы* (0.0.12) *на указанных классах функций и кривых имеет место точная оценка*

$$\mathscr{E}_N(W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q); \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{1+1/q}}{\sqrt[q]{q+1}(2N+1)},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 \leq q \leq \infty.$$

Из данной теоремы при $p = 1, 2, \infty$ выводятся конкретные следствия.

В четвёртом параграфе первой главы рассмотрен вопрос оптимизации приближённого вычисления криволинейного интеграла с весом первого рода

$$\mathcal{J}(q;f;\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} q(M)f(M)ds \approx \sum_{k=1}^{N} A_k f(M_k), \tag{0.0.13}$$

где весовая функция $q(M) \geq 0$ на Γ — произвольная спрямляемая кривая с конечной длиной L, кривизна которой кусочно-непрерывна, а $f(M) = f(x, y)$ – произвольная непрерывная на Γ функция.

Предположим, что кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$ $(0 \le s \le L)$ и функция $q(x(s), y(s)) \ge 0$, $0 \le s \le L$. Обозначая тогда через $s_k \in [0, L]$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ значения длины дуги s кривой Γ, которые соответствуют точкам $M_k \in \Gamma$, перепишем квадратурную формулу (0.0.13) в следующем виде

$$\int\limits_0^L q(x(s), y(s)) f(x(s), y(s)) ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(q, f; \Gamma). \quad (0.0.14)$$

Будем предполагать, что квадратурная формула (0.0.14) является точной для постоянной функции $f(x(s), y(s)) = C = \text{const}$. Тогда очевидно выполняется условие

$$\int\limits_0^L q(x(s), y(s)) ds = \sum_{k=1}^{N} A_k. \quad (0.0.15)$$

Пусть $V(L; M)$ — класс заданных на отрезке $[0, L]$ функций

$$F(s) := f(x(s), y(s)),$$

полная вариация которых на отрезке $[0, L]$ не превосходит числа M :

$$\bigvee_0^L (F) = \bigvee_0^L (f) \le M.$$

Для класса функций $V(L, M)$ требуется найти величину

$$\mathscr{E}_N(q; V(L, M), \mathfrak{N}_Q(L)) =$$

$$= \inf \Big\{ R_N(q; V(L, M); \mathfrak{N}_Q(L); A, S) : \ (A, S) \subset \mathcal{A} \Big\} \quad (0.0.16)$$

и указать векторы коэффициентов и узлов (A^0, S^0), реализующих точную нижнюю грань в (0.0.16).

Основным результатом четвёртого параграфа первой главы является

Теорема 1.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.14) *наилучшей для классов функций* $V(L, M)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула, у которой векторы узлов и коэффициентов* (A^0, S^0) *определяются по весовой* *функции $q(x(s),y(s))$ из соотношения*

$$2\int\limits_0^{s_1^0} q(x(s),y(s))ds = \int\limits_{s_1^0}^{s_2^0} q(x(s),y(s))ds = \cdots$$

$$\cdots = \int\limits_{s_{N-1}}^{s_N^0} q(x(s),y(s))ds = 2\int\limits_{s_N^0}^{L} q(x(s),y(s))ds = \beta(S^0), \tag{0.0.17}$$

$$A_k^0 = \beta(S^0), \quad k = \overline{1,N}. \tag{0.0.18}$$

При этом для погрешности наилучшей формулы на указанных классах функций и кривых справедлива оценка

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2}\,\beta(S^0).$$

Рассмотрены конкретные частные случаи:

I. Пусть, например, $q(x(s),y(s)) = s^\alpha$, $\alpha > -1$. Тогда из равенства (0.0.17) и (0.0.18) находим *узлы* и *коэффициенты наилучшей* для классов $V(L,M)$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$ квадратурной формулы:

$$s_k^0 = \left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L, \quad A_k^0 = \frac{L^{\alpha+1}}{N(\alpha+1)}, \quad k = \overline{1,N}.$$

Таким образом, в этом случае *наилучшая квадратурная формула* имеет вид:

$$\int\limits_0^L s^\alpha f(x(s),y(s))ds =$$

$$= \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}L\right), y\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}L\right)\right) + R_N(f;s^\alpha).$$

При этом для погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе $V(L,M)$ справедлива оценка

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{ML^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)N}.$$

II. Пусть $q(x(s), y(s)) = e^s$. *В этом случае узлы и коэффициенты наилучшей формулы* имеют вид:

$$s_k^0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2k-1}{2N}(e^L - 1) + 1\right), \ A_k^0 = \frac{e^L - 1}{N}, \ k = \overline{1, N}.$$

При этом

$$\mathscr{E}_N(V(L, M), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M(e^L - 1)}{2N}.$$

Также рассмотрен случай, когда в сформулированной задаче заранее зафиксированы в качестве узлов квадратурной формулы концы промежутка $[0, L]: \ s_0 = 0, \ s_N = L$, а узлы $s_1, s_2, \ldots, s_{N-1}$ и коэффициенты A_k $(k = \overline{1, N})$ требуется выбрать оптимальным образом. Такими квадратурными формулами в литературе называются квадратурные формулы типа А.А.Маркова (см., например, [11, с.156]). Итак, считая

$$S = \Big\{s_k : \ 0 = s_0 < s_1, \cdots < s_{N-1} < s_N = L\},$$

рассмотрим *квадратурную формулу типа Маркова* общего вида

$$\int\limits_0^L q(x(s), y(s)) f(x(s), y(s)) ds = A_0 f(x(0), y(0)) + \sum_{k=1}^{N-1} A_k f(x(s_k), y(s_k)) +$$
$$+ A_N f(x(L), y(L)) + R_N(f; \Gamma, A, S). \qquad (0.0.19)$$

Для погрешности наилучшей формулы типа Маркова (0.0.19) получено следующее утверждение.

Теорема 1.4.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.14) *наилучшей для классов функций* $V(L, M)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула, у которой векторы узлов и коэффициентов* $(\overline{A}, \overline{S})$ *определяются по весовой функции* $q(x(s), y(s))$ *из соотношения*

$$\int\limits_0^{\overline{s}_1} q(x(s), y(s)) ds = \int\limits_{\overline{s}_1}^{\overline{s}_2} q(x(s), y(s)) ds = \cdots$$

$$\cdots = \int\limits_{\overline{s}_{N-2}}^{\overline{s}_{N-1}} q(x(s), y(s)) ds = \int\limits_{\overline{s}_{N-1}}^{L} q(x(s), y(s)) ds = \beta(\overline{S}), \qquad (0.0.20)$$

$$\overline{A}_1 = \int\limits_a^{\bar{t}_1} q(x(s),y(s))ds = \frac{1}{2}\beta(\overline{S}),\ \overline{A}_N = \int\limits_{\bar{t}_{N-1}}^{\bar{t}_N} q(x(s),y(s))ds = \frac{1}{2}\beta(\overline{S});$$

$$\overline{A}_k = \int\limits_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} q(x(s),y(s))ds = \beta(\overline{S}), \quad (k=\overline{1,N-2}), \tag{0.0.21}$$

где $\bar{t}_0 = 0,\ \bar{t}_N = L,$ *а числа* $\bar{t}_k$ *определяются из равенства*

$$\int\limits_{\bar{s}_{k-1}}^{\bar{t}_k} q(x(s),y(s))ds = \int\limits_{\bar{t}_k}^{\bar{s}_k} q(x(s),y(s))ds,\ (k=\overline{1,N-1}).$$

При этом

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2}\,\beta(\overline{S}). \tag{0.0.22}$$

Рассмотрены **частные случаи** *наилучших квадратурных формул типа Маркова* для рассмотренных выше конкретных весовых функций:

I. Пусть $q(x(s),y(s)) = s^\alpha,\ \alpha > -1$. Из соотношений (0.0.20) – (0.0.22) находим *узлы, коэффициенты и точную оценку погрешности наилучшей квадратурной формулы типа Маркова* (0.0.19) на классах функций $V(L,M)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$:

$$\bar{s}_k = \left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L,\ (k=\overline{1,N-1}),\ \bar{s}_0 = 0,\ \bar{s}_N = L;$$

$$\bar{p}_0 = \bar{p}_N = \frac{L^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)N},\ \bar{p}_k = \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N} \quad (k=\overline{1,N-1});$$

Таким образом, *наилучшая квадратурная формула типа Маркова* (0.0.19) имеет вид

$$\int\limits_0^L s^\alpha f(x(s),y(s))ds = \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}\left\{\frac{f(x(0),y(0)) + f(x(L),y(L))}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L\right), y\left(\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L\right)\right)\right\} + R_N(f;s^\alpha).$$

$$\overline{\mathscr{E}}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2}\cdot\frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}.$$

II. $q(x(s),y(s)) = e^s,\ 0\le s\le L$. В этом случае *узлы, коэффициенты и точная оценка погрешности наилучшей квадратурной формулы* имеют вид:

$$\overline{s}_0 = 0,\ \overline{s}_N = L,\ \overline{s}_k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k}{N}(e^L-1)+1\right),\ (k=\overline{1,N-1});$$

$$\overline{p}_0 = \overline{p}_N = \frac{e^L-1}{2N},\ \overline{p}_k = \frac{e^L-1}{N}\ \ (k=\overline{1,N-1});$$

$$\overline{\mathscr{E}}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2}\cdot\frac{e^L-1}{N}.$$

Переходим к краткому изложению результатов второй главы.

В первом параграфе второй главы рассматривается вопрос отыскания наилучших квадратурных формул вида (0.0.2) для классов функций $\{f(x(s),y(s))\}$ с ограниченной в пространстве L_p $(1\le p\le\infty)$ нормой второго градиента

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_p}\le\mathcal{K},\ 1\le p\le\infty$$

вдоль произвольной кривой $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$, длина которой равна L.

Прежде всего напомним, что через $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ в параграфе 1.1 мы обозначали класс функций $\{f(x(s),y(s))\}$, у которых всюду в области Q существуют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^{2-k}x\partial y^k}\quad(k=0,1,2),$$

удовлетворяющие условиям

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_p[0,L]} := \left(\int\limits_0^L\left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right|^p ds\right)^{1/p}\le\mathcal{K},\quad 1\le p<\infty,$$

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_\infty[0,L]} := essup\left\{\left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right|:\ s\in[0,L]\right\}\le\mathcal{K},\ p=\infty,$$

где оператор «∇» определяется равенством

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} \quad \text{и} \quad \nabla^2 := \nabla(\nabla),$$

$$\nabla^2 f(x(s),y(s)) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

В первом параграфе второй главы найдены наилучшие квадратурные формулы для классов функций $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ при всех $1\le p\le\infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Приведём формулировку результата для классов функций $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ $(1\le p\le\infty)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Теорема 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.1) *наилучшей для класса функций* $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$, $1\le p\le\infty$ *и класса кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является квадратурная формула*

$$\int\limits_\Gamma f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} A_k^* f(M_k^*) + R_N(f;\Gamma), \tag{0.0.23}$$

где $A_k^* = p_k^* L$, $M_k^* := M\big(x(\sigma_k^* L), y(\sigma_k^* L)\big)$, $x=x(s)$, $y=y(s)$ — *параметрические уравнения кривой* Γ, L — *её длина, коэффициенты* p_k^* *и узлы* σ_k^* *определены равенствами*

$$p_1^* = p_N^* = \frac{1+\sqrt{p_{2q}(1)}}{2\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\,\big)}; \tag{0.0.24}$$

$$p_k^* = \frac{1}{N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}}, \quad k=\overline{1,N-1}, \tag{0.0.25}$$

$$\sigma_k^* = \frac{2(k-1)+\sqrt{p_{2q}}}{2\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\,\big)}, \quad k=\overline{1,N}. \tag{0.0.26}$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (0.0.23) *на указанных классах функций и кривых справедлива точная оценка*

$$\mathscr{E}_N(W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{2+1/q}p_{2q}(1)}{8\sqrt[q]{2q+1}\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)}, \tag{0.0.27}$$

$$(p^{-1}+q^{-1}=1,\ 1\le q\le\infty).$$

Из теоремы 2.1.1 вытекает ряд утверждений.

Следствие 2.1.1. *Пусть* $f\in W_1^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ *и* $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$. *В этом случае* $q=\infty$ *и многочлен наилучшего приближения в* L_∞ *есть многочлен Чебышёва первого рода*

$$T_2(t)=\frac{\cos(2\arccos t)}{2}:=t^2-\frac{1}{2},\quad p_{2\infty}(1)=T_2(1)=\frac{1}{2}.$$

Коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид

$$A_1=A_N=\frac{(\sqrt{2}+1)L}{2\big(1+\sqrt{2}(N-1)\big)};$$

$$A_k=\frac{\sqrt{2}L}{1+\sqrt{2}(N-1)},\quad k=\overline{2,N-1};$$

$$s_k=\frac{\big[1+2\sqrt{2}(k-1)\big]}{2\big[1+\sqrt{2}(N-1)\big]},\quad k=\overline{1,N}.$$

При этом погрешность наилучшей формулы на классах функций $W_1^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathscr{E}_N(W_1^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{\mathcal{K}L^2}{8\big[1+\sqrt{2}(N-1)\big]}.$$

Следствие 2.1.2. *Пусть* $f\in W_2^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ *и* $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$. *Тогда* $q=2$ *и многочлен* $p_{22}(t)$ *есть многочлен Лежандра*

$$\mathscr{L}_2(t)=\frac{3t^2-1}{3},\quad p_{22}(1)=\mathscr{L}_2(1)=\frac{2}{3},$$

а коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид

$$p_1=p_N=\frac{\big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,\big)L}{2\big[\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)\big]};$$

$$p_k=\frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)},\quad k=\overline{2,N-1};$$

$$s_k = \frac{\left[\sqrt{2} + 2\sqrt{3}(k-1)\right]L}{2\left[\sqrt{2} + \sqrt{3}(N-1)\right]}, \quad k = \overline{1, N}.$$

При этом минимальная погрешность наилучшей квадратурной формулы равна

$$\mathscr{E}_N(W_2^{(2)}(\mathcal{K}; Q); \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{5/2}}{4\sqrt{5}\left[\sqrt{2} + \sqrt{3}(N-1)\right]^2}.$$

Следствие 2.1.3. *Пусть* $f \in W_\infty^{(2)}(\mathcal{K}; Q)$ *и* $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$. *Тогда* $q = 1$ *и многочлен* p_{21} *есть многочлен Чебышёва второго рода*

$$U_2(t) = \frac{\sin(3\arccos t)}{4\sqrt{1-t^2}} := t^2 - \frac{1}{4}, \quad p_{21}(1) = \frac{3}{4}.$$

В этом случае коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид

$$p_1 = p_N = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})L}{2\left(\sqrt{3} + 2(N-1)\right)};$$

$$p_k = \frac{2L}{\sqrt{3} + 2(N-1)}, \quad k = \overline{2, N-1};$$

$$s_k = \frac{\left[\sqrt{3} + 4(k-1)L\right]}{2\left[\sqrt{3} + 2(N-1)\right]}, \quad k = \overline{1, N}.$$

При этом погрешность наилучшей формулы на классах функций $W_\infty^{(2)}(\mathcal{K}; Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathscr{E}_N(W_\infty^{(2)}(\mathcal{K}; Q); \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^3}{8\left[\sqrt{3} + 2(N-1)\right]^2}.$$

В этом же параграфе найдены наилучшие квадратурные формулы для классов функций $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K}; Q),\ 1 \le p \le \infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Теорема 2.1.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (0.0.2) *наилучшей для классов функций* $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K}; Q),\ 1 \le p \le 2$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула, у которой коэффициенты и узлы имеют вид*

$$p_k = \frac{2L}{2N + \sqrt{p_{2q}(1)}}, \quad k = \overline{1, N-1};$$

$$p_N = \frac{\left(2+\sqrt{p_{2q}(1)}\right)L}{2N+\sqrt{p_{2q}(1)}};$$

$$s_k = \frac{2kL}{2N+\sqrt{p_{2q}(1)}}, \quad k=\overline{1,N}.$$

При этом для точной оценки погрешности наилучшей формулы на указанных классах функций $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$, $1 \le q \le \infty$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_N(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{2+1/q}p_{2q}(1)}{2\sqrt[q]{2q+1}\left(2N+\sqrt{p_{2q}(1)}\right)^2}.$$

Из этой теоремы также при $p=1,2,\infty$ выведен ряд следствий.

Во втором параграфе второй главы рассматривается задача нахождения асимптотически точных усложненных квадратурных формул для класса функций $W_\nabla^{(1)}H^\omega[0,L]$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, вдоль которых градиент $\nabla f(x(s),y(s))$ для любых двух точек $s',s'' \in [0,L]$ удовлетворяет условию

$$\Big|\nabla f(x(s''),y(s'')) - \nabla f(x(s'),y(s'))\Big| \le \omega(|s''-s'|),$$

где $\omega(t)$ – произвольно заданный модуль непрерывности на отрезке $[0,L]$.

Для изложения результатов второго параграфа второй главы нам понадобятся некоторые определения. Напомним правило построения усложнённых квадратурных формул для приближённого вычисления обычного определённого интеграла

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \tag{0.0.28}$$

от произвольной интегрируемой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0,1]$. С целью приближённого вычисления интеграла (0.0.28) отрезок $[0,1]$ делят на n равных частей точками $x_k = k/n$ $(k=\overline{0,n})$ и на каждом из интервалов (x_{k-1},x_k) $(k=\overline{1,n})$ применяют заранее выбранную квадратурную формулу с узлами $x_{k-1} \le t_1 < t_2 < \cdots t_m \le x_k$ и коэффициентами p_i $(i = \overline{1,m})$. В результате получим усложнённую квадратурную формулу

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} L(x_{k-1}, x_k; f) + R_n(f) = L_n(f) + R_n(f), \tag{0.0.29}$$

где

$$L(x_{k-1}, x_k; f) = \sum_{i=1}^{m} p_i f(t_i).$$

Многие известные квадратурные формулы имеют именно такое происхождение. Так, например:

а) усложнённая квадратурная формула прямоугольников имеет вид:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + R_{n,\text{П}}(f);$$

б) усложнённая квадратурная формула трапеций имеет вид:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2n}\left\{f(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1)\right\} + R_{n,\text{Т}}(f);$$

в) усложнённая квадратурная формула Симпсона имеет вид:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6n}\left\{f(0) + 4\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1)\right\} + R_{n,\text{С}}(f).$$

Пусть теперь требуется приближённо вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_\Gamma f(M)ds = \int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds \tag{0.0.30}$$

в предположении, что кривая Γ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(s),\ y = y(s),\ 0 \le s \le L.$$

Для приближённого вычисления интеграла (0.0.30), построим аналоги усложнённых квадратурных формул прямоугольников, трапеций и Симпсона. Для этого отрезок $[0, L]$ делим на N равных частей точками

$$s_k = kh,\ h = L/N,\ k = \overline{0, N}$$

и на каждом интервале (s_{k-1}, s_k) применяем заранее выбранную квадратурную формулу с узлами

$$s_{k-1} \le \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m \le s_k, \quad k = \overline{1, N}$$

и коэффициентами $q_i,\ i = \overline{1, m}$. В результате получим усложнённую квадратурную формулу

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} L(s_{k-1}, s_k; f) + R_N(f, \Gamma), \tag{0.0.31}$$

где

$$L(s_{k-1}, s_k; f) = \sum_{i=1}^{m} q_i f(x(\xi_i), y(\xi_i)),$$

а $R_N(f, \Gamma)$ – погрешность формулы (0.0.31) на функцию $f(M)$, определённая в точках $M(x, y)$ на кривой Γ, длина которой равна L.

По аналогии с формулами а) – в) построим следующие усложнённые квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейного интеграла:

1) квадратурная формула прямоугольников

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\right) + R_{N,\Pi}(f, \Gamma); \tag{0.0.32}$$

2) квадратурная формула трапеций

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{2N}\Bigg\{ f(x(0), y(0)) + f(x(L), y(L)) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_{N,\text{T}}(f,\Gamma); \qquad (0.0.33)$$

3) квадратурная формула Симпсона

$$\int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds = \frac{L}{6N}\Bigg\{ f(x(0),y(0)) + f(x(L),y(L)) +$$

$$+4\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_{N,\text{C}}(f,\Gamma). \qquad (0.0.34)$$

Основным результатом второго параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.2.1. *Для погрешности усложнённых квадратурных формул прямоугольников* (0.0.32), *трапеций* (0.0.33) *и Симпсона* (0.0.34) *для классов функций* $W_\nabla^{(1)}H^\omega[0,L]$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедливы оценки*

$$R_{N,\varPi}\Big(W_\nabla^{(1)}H^\omega[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt + \frac{\omega(1)}{32N^2}, \qquad (0.0.35)$$

$$R_{N,T}\Big(W_\nabla^{(1)}H^\omega[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt + \frac{3\omega(1)}{32N^2}, \qquad (0.0.36)$$

$$R_{N,C}\Big(W_\nabla^{(1)}H^\omega[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{36N}\int\limits_0^1 (2+t)\omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt. \qquad (0.0.37)$$

В заключение этого параграфа отметим, что оценки (0.0.35) – (0.0.37) справедливы при любом модуле непрерывности $\omega(t)$. Но если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то повторяя схему рассуждений, приведённую в статье С.А.Агаханова [1], можно получить следующие асимптотические точные оценки для класса функций $W_\nabla^{(1)}H^\omega[0,L]$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$:

$$\frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt \le R_{N,\Pi}\Big(W^{(1)}_{\nabla}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt+\frac{\omega(1)}{32N^2},$$

$$\frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt \le R_{N,\mathrm{T}}\Big(W^{(1)}_{\nabla}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt+\frac{3\omega(1)}{32N^2},$$

$$\frac{1}{18N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt \le R_{N,\mathrm{C}}\Big(W^{(1)}_{\nabla}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{18N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt + \frac{1}{72N}\,\omega\left(\frac{1}{3N}\right).$$

ГЛАВА I

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ И КРИВЫХ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ

Задача приближённого вычисления определённого интеграла является одной из наиболее важных задач численного анализа.

Развитие методов приближённого интегрирования привело к известным экстремальным задачам отыскания наилучших (оптимальных) квадратурных формул в смысле С.М.Никольского [9–11] и А.Сарда [15, 16]. К середине восьмидесятых годов прошлого столетия в решении экстремальных задач теории квадратур наблюдался значительный прогресс. Для соболевских классов периодических дифференцируемых функций с ограниченной по норме старшей производной в пространстве L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ и классов функций, задаваемых модулями непрерывности r-й производной, были найдены наилучшие квадратурные формулы. Эти и другие важные результаты в данном направлении приведены Н.П.Корнейчуком в „Добавлении" к известной монографии С.М.Никольского [11]. В „Добавление", наряду со значительным успехом в этой области, отмечается, что решение аналогичных задач для других типов определённых интегралов, таких как определённые интегралы с положительной весовой функцией, сингулярные интегралы, криволинейные интегралы и многомерные интегралы известны в очень редких случаях.

Теперь уже можно указать на некоторые результаты, которые появились после выхода монографии [11] с добавлением Н.П.Корнейчука, где рассмотрены вопросы оптимизации квадратурных формул с весом [3,5,6,12–14,28,29], найдены оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов с фиксированными особенностями [3, 12, 27], а также в отыскании оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов первого типа [7, 8, 17, 18].

§1.1. Постановка задачи и предварительные факты

В данной работе рассматривается вопрос оптимизации приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds \approx \sum_{k=1}^{N} A_k f(M_k), \tag{1.1.1}$$

где Γ – произвольная спрямляемая кривая с конечной длиной L, $M \in \Gamma$ – точка, лежащая на кривой Γ, а $f(M)$ – произвольная непрерывная на кривой Γ функция. По аналогии с монографией С.М.Никольского [11], конечную сумму

$$\sum_{k=1}^{N} A_k f(M_k),$$

состоящую из линейной комбинации нескольких значений подынтегральной функции, будем называть квадратурной суммой. Для достижения высокой точности при помощи формулы (1.1.1) нужно возможно лучшим образом воспользоваться выбором числовых коэффициентов A_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ и узлов M_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$, принадлежащих кривой Γ.

Если кривую Γ удаётся параметризовать, то формулу (1.1.1) можно привести к более удобному виду для вычислений. Из курса анализа хорошо известно, что параметрические уравнения кривой Γ с длиною, равной L, отнесённой к длине дуги s как параметру, имеют вид

$$x = x(s),\ y = y(s),\ \ 0 \le s \le L. \tag{1.1.2}$$

Обозначая через $s_k \in [0, L]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ значения длины дуги s кривой Γ, которые соответствуют точкам $M_k \in \Gamma$, перепишем квадратурную формулу (1.1.1) в виде

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)) + R_N(f; \Gamma), \tag{1.1.3}$$

где $x = x(s)$, $y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что квадратурная формула (1.1.3) является точной для постоянной функции $f(M) = \text{const}$, то есть что выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N} A_k = L, \quad L - \text{длина кривой } \Gamma. \tag{1.1.4}$$

Предполагая выполнённым условие (1.1.4) для квадратурной формулы (1.1.3), сформулируем экстремальную задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы в смысле С.М.Никольского [11, с.128] и смысле А.Сарда [15, 16].

Очевидно, что всякая квадратурная формула вида (1.1.3) задаётся векторами узлов $S = \Big\{s_k : \ 0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{N-1} < s_N \le L\Big\}$ и коэффициентов $A = \{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^{N}$, а потому погрешность формулы также зависит от указанных векторов узлов и коэффициентов: $R_N(f;\Gamma) := R_N(f,\Gamma;A,S)$ – погрешность формулы (1.1.3) на функции $f(M) := f(x(s), y(s))$. При фиксированном целом $N \ge 1$ через $\mathcal{A}$ обозначим множество векторов (S, A) узлов и коэффициентов, для которых формула (1.1.3) имеет смысл, то есть пригодна для вычислений.

Очевидно, что остаток (погрешность) формулы (1.1.3)

$$R_N(f,\Gamma;A,S) = \int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds - \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k))$$

имеет вполне определённое числовое значение. Пусть $\mathfrak{N}_Q(L)$ – класс плоских спрямляемых кривых Γ с непрерывной кривизной, расположенных в области $Q = \Big\{(x,y) : \ x^2 + y^2 \le L^2\Big\}$, длина которых равна L.

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $f(x(s), y(s))$, определённых в точках кривой Γ с параметрическими уравнениями (1.1.2) и интегрируемых как сложная функция

$$F(s) := f(x(s), y(s))$$

параметра $s \in [0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности на всём классе $\mathfrak{M}$ на заданной кривой Γ, примем величину

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;A,S)=\sup\Big\{|R_N(f,\Gamma;A,S)|:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}. \tag{1.1.5}$$

Аналогично за величину, характеризующую наибольшую погрешность квадратурной формулы (1.1.3) на всём классе функций $\mathfrak{M}$ и на всём классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, следует взять величину

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A,S)=\sup\Big\{R_N(\mathfrak{M};\Gamma;A,S):\ \Gamma\in\mathfrak{N}_Q(L)\Big\}. \tag{1.1.6}$$

Требуется найти величину

$$\mathscr{E}_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}_Q(L))=\inf\Big\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A,S):\ (A,S)\subset\mathcal{A}\Big\}. \tag{1.1.7}$$

Если существует вектор коэффициентов и узлов

$$(A^0,S^0)=\Big(\{\mathcal{A}\}_{k=1}^N,\{s_k^0\}_{k=1}^N\Big),$$

для которых выполняется равенство

$$\mathscr{E}_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}_Q(L))=R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A^0,S^0),$$

то квадратурная формула (1.1.3) с векторами коэффициентов и узлов (A^0,S^0) называется *наилучшей* (или *оптимальной*) квадратурной формулой в смысле С.М.Никольского на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, а вектор (A^0,S^0) называется *наилучшим* или *оптимальном вектором коэффициентов и узлов.*

Теперь предположим, что в квадратурной формуле (1.1.3) вектор $S^*=\{s_k^*\}_{k=1}^N$ заранее зафиксирован и требуется найти величину

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);S^*)=\inf\Big\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A,S^*):\ A\subset\mathcal{A}\Big\} \tag{1.1.8}$$

и если существует вектор коэффициентов $A^0\subset\mathcal{A}$, для которого

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);S^*)=R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A^0,S^*),$$

то говорят, что квадратурная формула (1.1.3) с вектором коэффициентов A^0 и фиксированным вектором узлов S^* является наилучшей (или оптимальной) по коэффициентам в смысле А.Сарда [15].

Если же в квадратурной формуле (1.1.3) заранее зафиксирован вектор-коэффициентов $A^* = \{\mathcal{A}_k^*\}_{k=1}^N$ и требуется вычислить величину

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A^*) = \inf\left\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A^*,S):\ S\subset\mathcal{A}\right\} \qquad (1.1.9)$$

и при этом существует вектор-узлов $S^0\subset\mathcal{A}$, для которого

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A^*) = R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);A^*,S^0),$$

то говорят, что квадратурная формула (1.1.3) с вектором узлов S^0 и фиксированным вектором коэффициентов $A^* = \left\{\mathcal{A}_k^*\right\}_{k=1}^N$ является *наилучшей* (или *оптимальным*) по узлам в смысле А.Сарда [15].

В этой работе мы находим *наилучшие* (*оптимальные*) квадратурные формулы вида (1.1.3) как в смысле С.М.Никольского, так и в смысле А.Сарда для некоторых классов функций и классов кривых.

Отметим, что наилучшие (оптимальные) квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого вида ранее найдены в работах С.Б.Вакарчука [4], М.Ш.Шабозова [27,33], М.Ш.Шабозова и Ф.М.Мирпоччоева [30], М.Ш.Шабозова и Д.С.Сангмамадова [31], Д.С.Сангмамадова [17, 18], Ф.М.Мирпоччоева [7, 8], М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [34], К.Тухлиева [19], Г.А.Юсупова и А.А.Шабозовой [35] и других.

1.1.1. Классы функций. Введём нужные нам для дальнейшего определения классов функций $\{f(x(s),y(s))\}$, задаваемых и непрерывных на классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, для которых будем решать задачу отыскания наилучших квадратурных формул (1.1.7) в смысле С.М.Никольского для формул вида (1.1.3).

Пусть $W_p^{(1)}(\mathcal{K};Q) := W^{(1)}L_p(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ – класс функций $\{f(x(s),y(s))\}$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ с ограничением

$$\left\|grad\, f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_{p[0,L]}} := \left(\int\limits_0^L\left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right|^p ds\right)^{1/p} \le \mathcal{K},\ 1\le p<\infty,$$

$$\left\|grad\, f(x(\cdot), y(\cdot))\right\|_{L_{\infty[0,L]}} = \underset{(x,y)\in Q}{supvrai} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right| \right\} \le \mathcal{K},\ p = \infty,$$

где, как обычно,

$$\left|grad\, f(x(s), y(s))\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial y}\right)^2}$$

при условии, что

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

Через $W_{0,p}^{(1)}(\mathcal{K}; Q)$ обозначим множество функций $f \in W_p^{(1)}(\mathcal{K}; Q)$, удовлетворяющих условию $f(x(0), y(0)) = 0$.

Аналогичным образом через $W_p^{(2)}(\mathcal{K}; Q) := W^{(2)} L_p(\mathcal{K}; Q)$, $1 \le p \le \infty$ обозначим множество функций $\{f(x(s), y(s))\}$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^{2-i} x \partial y^i} \quad (i = 0, 1, 2)$$

и удовлетворяющих условию

$$\left\|\nabla^2 f(x(s), y(s))\right\|_{L_p[0,L]} = \left(\int_0^L \left|\nabla^2 f(x(s), y(s))\right|^p ds\right)^{1/p} \le \mathcal{K}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\left\|\nabla^2 f(x(s), y(s))\right\|_{L_\infty[0,L]} := \underset{(x,y)\in Q}{supvrai} \left|\nabla^2 f(x(s), y(s))\right| \le \mathcal{K},\ p = \infty.$$

Здесь, как обычно операторы «∇» и «∇^2» определяются равенствами

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds},$$

$$\nabla^2 := \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2,$$

в соответствие с которыми запишем соотношения

$$\nabla f(x(s),y(s)) = \frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds},$$

$$\nabla^2 f(x(s),y(s)) := \nabla(\nabla f(x(s),y(s))) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Через $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q) := W_{0,p}^{(2)}L_p(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ обозначим множество функций $f\in W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$, у которых

$$f(x(0),y(0)) = f'_x(x(0),y(0)) = f'_y(x(0),y(0)) = 0.$$

§1.2. Наилучшая квадратурная формула для класса функций $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$

В этом параграфе для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого типа

$$\mathcal{J}(f,\Gamma)=\int\limits_{\Gamma} f(M)ds=\int\limits_{0}^{L} f(x(s),y(s))ds \tag{1.2.1}$$

укажем на классе функций $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ и классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ наилучшую квадратурную формулу в смысле С.М.Никольского. С этой целью квадратурную формулу (1.1.3) запишем в следующем виде

$$\mathcal{J}(f,\Gamma)=\int\limits_{0}^{L} f(x(s),y(s))ds=\sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k),y(s_k))+$$

$$+R_N(f;\Gamma):=L_N(f;\Gamma;A,S)+R_N(f;\Gamma;A,S). \tag{1.2.2}$$

Для каждой функции $f\in W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ и каждой $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$ остаток квадратурной формулы (1.2.1) имеет вполне определённое значение

$$|R_N(f;\Gamma;A,S)|:=|\mathcal{J}(f;\Gamma)-L_N(f;\Gamma;A,S)|.$$

В соответствии с задачей С.М.Никольского (1.1.7) требуется найти величину

$$\mathscr{E}_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L))=$$

$$=\inf\Big\{R_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S):\ (A,S)\subset\mathcal{A}\Big\}, \tag{1.2.3}$$

то есть указать вектор коэффициентов и узлов $(A^0,S^0)\subset\mathcal{A}$, реализующий точную нижнюю грань в правой части (1.2.3).

Имеет место следующая

Теорема 1.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида (1.2.2) для приближённого вычисления криволинейного интеграла (1.2.1) на классе функ-*

ций $W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q)$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *наилучшей является формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right) + R_N(f,\Gamma). \quad (1.2.4)$$

При этом погрешность формулы (1.2.4) на всём классе $W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q)$ *и классе* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathscr{E}_N(W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}}, \quad (1.2.5)$$

где L *– длина кривой* Γ.

Доказательство. Записав для произвольной функции $f \in W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q)$ как сложной функции одной переменной $f(x(s), y(s))$ формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши

$$f(x(s), y(s)) = f(x(0), y(0))+$$

$$+\int\limits_0^L (s-t)^0_+\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^L (s-t)^0_+\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)dt \quad (1.2.6)$$

остаток квадратурной формулы (1.2.2), с учётом равенства (1.1.4), представим в следующем интегральном представлении

$$R_N(f;\Gamma) = \int\limits_0^L f(x(s),y(s))ds - \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k), y(s_k)) =$$

$$= \int\limits_0^L\left\{\int\limits_0^L (s-t)^0_+\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)dt\right\}ds-$$

$$-\sum_{k=1}^{N} A_k\left\{\int\limits_0^L (s-t)^0_+\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)dt\right\} =$$

$$= \int\limits_0^L\left\{L - s - \sum_{k=1}^{N} A_k(s_k - s)^0_+\right\}\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)ds :=$$

$$= \int\limits_0^L \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right) \Phi(s) ds, \qquad (1.2.7)$$

где, ради краткости, положено

$$\Phi(s) = L - s - \sum_{k=1}^{N} A_k (s_k - s)_+^0, \quad u_+^0 = [\max(0, u)]^0.$$

Оценивая правую часть равенства (1.2.7), согласно неравенству Коши – Буняковского

$$\int\limits_a^b f(x) \mathrm{g}(x) dx \le \left(\int\limits_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_a^b \mathrm{g}^2(x) dx \right)^{1/2}$$

для произвольной функции $f \in W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K}; Q)$ получаем

$$|R_N(f; \Gamma)| \le \left(\int\limits_0^L \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2 ds \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_0^L \left| grad\, f(x(s), y(s)) \right|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2 ds \right)^{1/2} \le$$

$$\le \mathcal{K} \left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2 ds \right)^{1/2}. \qquad (1.2.8)$$

Докажем, что существует функция $f_0 \in W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K}; Q)$, для которой (1.2.8) обращается в равенство. В самом деле, рассмотрим кривую $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$ с параметрическими уравнениями

$$\Gamma^* : \begin{cases} x(s) = s/\sqrt{2}, \\ y(s) = s/\sqrt{2}, \quad 0 \le s \le L \end{cases}$$

и положим

$$f_0(x, y) = \int\limits_0^{x(s)} \varphi(t) dt + \int\limits_0^{y(s)} \varphi(t) dt,$$

где

$$\varphi(t)=\frac{\mathcal{K}}{\sqrt{2}}\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2\,ds\right)^{-1/2}\left|\widetilde{\Phi}(t)\right|\operatorname{sgn}\widetilde{\Phi}(t),$$

$$\widetilde{\Phi}(s)=L-\sqrt{2}s-\sum_{k=1}^{N}A_k(s_k-\sqrt{2}s)_+^0,\quad \widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\equiv\Phi(s).$$

Покажем, что $f_0\in W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$. В самом деле, имеем:

$$\nabla f_0(x(s),y(s))=\frac{\partial f_0}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f_0}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}=$$

$$=\varphi(x(s))x'(s)+\varphi(y(s))y'(s)=$$

$$=\varphi\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\varphi\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\varphi\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2\,ds\right)^{-1/2}\left|\widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right|\operatorname{sgn}\widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2\,ds\right)^{-1/2}\cdot|\Phi(s)|\operatorname{sgn}\Phi(s). \tag{1.2.9}$$

Откуда сразу получаем

$$\left\|\nabla f_0(x(s),y(s))\right\|^2_{L_2[0,L]}=\left\|grad\,f(x(s),y(s))\right\|^2_{L_2[0,L]}=$$

$$=\mathcal{K}^2\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2\,ds\right)^{-1}\cdot\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2\,ds=\mathcal{K}^2. \tag{1.2.10}$$

Этим включение $f_0\in W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ доказано.

С другой стороны, учитывая равенства (1.2.9) и (1.2.10) из (1.2.7), будем иметь

$$R_N(f_0,\Gamma)=\int\limits_0^L \nabla f_0(x(s),y(s))\Phi(s)ds=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2\,ds\right)^{1/2}. \qquad (1.2.11)$$

Таким образом, из равенства (1.2.11) сразу следует, что

$$R_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S)=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2\,ds\right)^{1/2}$$

и задача сводится к отысканию следующей величины

$$\mathscr{E}_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L))=\mathcal{K}\inf\left\{\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^2\,ds\right)^{1/2}:\ (A,S)\subset\mathcal{A}\right\}. \quad (1.2.12)$$

Обычными средствами анализа легко доказать, что точная нижняя грань в правой части равенства (1.2.12) достигается для векторов коэффициентов

$$A^0:=\left\{A_k:\ A_k=\frac{2L}{2N+1},\ k=\overline{1,N}\right\} \qquad (1.2.13)$$

и векторов узлов

$$S^0:=\left\{s_k:\ s_k=\frac{2kL}{2N+1},\ k=\overline{1,N}\right\}. \qquad (1.2.14)$$

При этом точная оценка погрешности наилучшей квадратурной формулы вида (1.1.3) с наилучшими векторами коэффициентов (1.2.13) и наилучшим вектором узлов (1.2.14) на классах функций $W_{0,p}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ равна

$$R_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{\mathcal{K}L^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1. Отметим, что полученный результат также вытекает из более общего результата параграфа 1.3 при $q=2$.

Здесь этот факт используем *при решении следующей задачи:* для множества $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ функций $f(x(s),y(s))$, определённых на кривой $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$, удовлетворяющих условиям $f(x(0),y(0))=0$,

$$\left\|grad\, f(x(s),y(s))\right\|_{L_2[0,L]}\leq\mathcal{K}.$$

Исходя из наилучшей квадратурной формулы С.М.Никольского (1.2.4) построим наилучшую по коэффициентам в смысле Сарда квадратурную формулу следующего вида

$$\int\limits_{\Gamma} f(x(s),y(s))ds=\frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right),y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\mathcal{B}_k f(x(\tau_k),y(\tau_k))+R_N^*(f,\Gamma),\tag{1.2.15}$$

где τ_k $(k=\overline{1,N})$ – заранее заданные узлы, а $\mathcal{B}_k$ подлежат определению из условия минимизации погрешности формулы (1.2.15).

Требуется для рассматриваемого класса функций $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ построить наилучшую по коэффициентам квадратурную формулу вида (1.2.15), то есть найти значения коэффициентов $\mathcal{B}_k$ при заданных τ_k так, чтобы величина погрешности $R_N^*(f,\Gamma)$ на указанных классах функций и классах кривых была наименьшей.

Фиксируем узлы

$$\tau_k^0=\frac{s_k^0+s_{k-1}^0}{2},\quad k=\overline{1,N},\ s_{-1}^0=0.$$

Сводим поставленную задачу к минимизации нижеследующего интеграла по коэффициентам $\mathcal{B}_k$:

$$\mathscr{E}_N^*(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L))=\mathcal{K}L^{3/2}\inf_{\mathcal{B}_k}\left(\int\limits_0^1\mathscr{K}^2(s)ds\right)^{1/2},\tag{1.2.16}$$

где

$$\mathscr{K}(s)=1-s-\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{2N+1}\left(\frac{2k}{2N+1}-s\right)_+^0-\sum_{k=1}^{N}\mathcal{B}_k\left(\frac{2k-1}{2(2N+1)}-s\right)_+^0.$$

Таким образом, для отыскания значений $\mathcal{B}_k^*$ $(k=\overline{1,N})$, реализующих inf в интеграле, стоящем в правой части (1.2.16), требуется минимизировать интеграл

$$\mathcal{J}=\int\limits_0^1 \mathscr{K}^2(s)ds. \tag{1.2.17}$$

Пользуясь средствами дифференциального исчисления, получаем следующую систему уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathcal{B}_l}=0 \quad (l=\overline{1,N}). \tag{1.2.18}$$

Решение этой системы действительно даёт минимум интегралу (1.2.17), так как легко проверить, что все определители $\left\|\mathcal{J}''_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j}\right\|_{i,j=1}^{l}$ при $l=\overline{1,N}$ положительны. Систему (1.2.18) можно записать в развёрнутом виде

$$\sum_{k=1}^{N}\mathcal{B}_k\int\limits_0^1\left(\frac{2k-1}{2(2N+1)}-s\right)_+^0\left(\frac{2l-1}{2(2N+1)}-s\right)ds=$$

$$=\int\limits_0^1(1-s)\left(\frac{2l-1}{2(2N+1)}-s\right)ds-$$

$$-\frac{2}{2N+1}\int\limits_0^1\left(\frac{2k-1}{2(2N+1)}-s\right)_+^0\left(\frac{2l-1}{2(2N+1)}-s\right)ds \qquad (l=\overline{1,N}),$$

откуда после простых арифметических вычислений следует равенство

$$\sum_{k=1}^{l}(2k-1)\mathcal{B}_k+(2l-1)\sum_{k=l+1}^{N}\mathcal{B}_k=\frac{1}{2(2N+1)}, \quad l=\overline{1,N}. \tag{1.2.19}$$

Система (1.2.19) имеет единственное решение

$$\mathcal{B}_1^*=\frac{1}{2(2N+1)}, \quad \mathcal{B}_2^*=\mathcal{B}_3^*=\cdots=\mathcal{B}_N^*=0.$$

Таким образом, для класса функций $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ с фиксированными значениями

$$\tau_k^0 = \frac{s_{k-1}^0 + s_k^0}{2}, \quad k = \overline{1,N}, \text{ где } s_0^0 = 0, \ s_k^0 = \frac{2kL}{2N+1}$$

– наилучшие узлы формулы (1.2.4), наилучшая по коэффициентам квадратурная формула (1.2.15) в смысле А.Сарда, получаемая удлинением наилучшей квадратурной формулы (1.2.4) в смысле С.М.Никольского имеет вид

$$\int_0^L f(x(s),y(s))ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right) +$$

$$+\frac{L}{2(2N+1)} f\left(x\left(\frac{L}{2N+1}\right), y\left(\frac{L}{2N+1}\right)\right) + R_N^*(f,\Gamma). \qquad (1.2.20)$$

Учитывая (1.2.17) и значение погрешности (1.2.5) для формулы (1.2.20) получаем точную на классе $W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ оценку погрешности

$$\mathcal{E}_N^*(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{3}{4(2N+1)}} =$$

$$= \mathcal{E}_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q), \mathfrak{N}_Q(L))\sqrt{1-\frac{3}{4(2N+1)}}.$$

Пусть теперь класс $W_2^{(1)}(\mathcal{K};Q)$ множества функций $f(x(s),y(s))$, заданных и определённых на кривых $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$, удовлетворяющих условию

$$\left\| grad\, f(x(s),y(s)) \right\|_{L_2[0,L]} \le \mathcal{K}.$$

Для этого класса функций среди квадратурных формул вида

$$\int_0^L f(x(s),y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x(s_k),y(s_k)) + Qf(x(0),y(0)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N} \mathcal{B}_k f(x(\tau_k),y(\tau_k)) + R_N^*(f,\Gamma) \qquad (1.2.21)$$

при заданных векторах коэффициентов $A = \{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^N$, векторах узлов

$$S = \Big\{ s_k : 0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_{N-1} < s_N \leq L \Big\},$$

$$T := \Big\{ t_k : 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N \leq L \Big\}$$

будем искать наилучшую по коэффициентам квадратурную формулу в смысле А.Сарда. Прежде всего заметим, что в силу включения

$$W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q) \subset W_2^{(1)}(\mathcal{K};Q)$$

справедливо очевидное неравенство

$$R_N(W_2^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S,T) \geq R_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S,T). \quad (1.2.22)$$

Пусть

$$Q = 1 - \sum_{k=1}^{N}(A_k + \mathcal{B}_k),$$

тогда

$$R_N(C) = 0, \quad C = \text{const}.$$

Используя эти соотношения, имеем

$$R_N(f(x(s),y(s))) = R_N(f(x(s),y(s)) - f(x(0),y(0))),$$

поэтому

$$R_N(W_2^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S,T) \leq R_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S,T). \quad (1.2.23)$$

Сравнивая оценку снизу (1.2.22) и оценку сверху (1.2.23), получаем

$$\mathscr{E}_N(W_2^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q) = \mathscr{E}_N(W_{0,2}^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)). \quad (1.2.24)$$

Из равенства (1.2.24) и наилучшей квадратурной формулы в смысле С.М.Никольского для классов функций $W_2^{(1)}(\mathcal{K}; Q)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ сразу следует наилучшая квадратурная формула в смысле А.Сарда вида

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)+$$

$$+\frac{L}{2(2N+1)}\left[f(x(0), y(0)) + f\left(x\left(\frac{L}{2N+1}\right), y\left(\frac{L}{2N+1}\right)\right)\right] + R_N(f, \Gamma).$$

При этом точная оценка погрешности последней формулы совпадает с точной оценкой квадратурной формулы (1.2.20). Таким образом,

$$\mathscr{E}_N(W_2^{(1)}(\mathcal{K}; Q), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{3/2}}{(2N+1)\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{3}{4(2N+1)}}.$$

§1.3. Наилучшая квадратурная формула приближённого вычисления криволинейного интеграла для классов функций $W_{0,p}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$

В первом параграфе мы определили $W_{0,p}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ как подкласс функций $\{f(x(s),y(s))\}$ класса $W_p^{(1)}(\mathcal{K};Q)$, имеющих в области $Q=\{(x,y):\ x^2+y^2\le L\}$ непрерывные частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ с ограничением

$$\left\|grad\, f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_{p[0,L]}}:=\left(\int\limits_0^L\left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right|^p ds\right)^{1/p}\le\mathcal{K},\ 1\le p<\infty$$

и, при $s=0$, обращающихся в нуль: $f(x(0),y(0))=0$.

Если же $f(x(0),y(0))\ne0$, то есть когда $f\in W_p^{(1)}(\mathcal{K};Q)$, то требуют, что квадратурная формула (1.1.3) была точна на множестве постоянных функций $f(x(s),y(s))=C$, что эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^N A_k=L.$$

В этом случае в работе М.Ш.Шабозова и Ф.М.Мирпоччоева [30] доказана следующая

Теорема [30]. *Среди всех квадратурных формул вида (1.1.1) с произвольными векторами коэффициентов и векторами узлов* (A,S), $A=\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^N$, $S=\Big\{s_k:\ 0\le s_1<s_2<\ldots<s_{N-1}<s_N\le L\Big\}$ *наилучшей для класса функций* $W_p^{(1)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ *и класса кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является квадратурная формула прямоугольников*

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)ds=\frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right),y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right)+R_N(f;\Gamma),$$

где $x=x(s)$, $y=y(s)$ *– параметрические уравнения кривой* Γ, L *– её длина. При этом для погрешности формулы на указанных классов функций и классов кривых справедлива точная оценка*

$$\mathscr{E}_N(W_p^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{\mathcal{K}L^{1+1/q}}{2N\sqrt[q]{q+1}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1\le q\le\infty.$$

Отметим, что при $p = 1$ сформулированная теорема ранее была доказана С.Б.Вакарчуком [4].

Здесь мы докажем, что для класса $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K}; Q)$, $1 \le p \le \infty$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ имеет место следующая

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (1.1.1) *наилучшей для классов функций* $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K}; Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f(M_k^*) + R_N(f;\Gamma), \tag{1.3.1}$$

где $M_k^* := M\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)$, $x = x(s)$, $y = y(s)$ *— параметрические уравнения кривой* Γ, L *— её длина. Для минимальной оценки погрешности формулы (1.3.1) на указанных классов функций и кривых имеет место точная оценка*

$$\mathscr{E}_N(W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K}; Q); \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{1+1/q}}{\sqrt[q]{q+1}(2N+1)},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 \le q \le \infty.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для произвольной функции $f \in W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K}; Q)$, $1 \le q \le \infty$ как сложной функции $F(s) := f(x(s), y(s))$ переменной $s \in [0, L]$, удовлетворяющей условию $f(x(0), y(0)) \equiv 0$, справедливо интегральное представление, вытекающее из (1.2.6):

$$f(x(t), y(t)) := \int\limits_0^L \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)(t-s)_+^0 ds, \tag{1.3.2}$$

где $(t-s)_+^0 := \Big\{1,\ \text{если}\ t \ge s;\ 0,\ \text{если}\ t < s\Big\}$.

Подставляя формулу (1.3.2) в квадратурную формулу (1.1.3), погрешность формулы представим в виде

$$R_N(f;,\Gamma) = \int\limits_0^L \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)\Phi(s)ds, \tag{1.3.3}$$

где, как и в предыдущем параграфе, ядро $\Phi(s)$ определено равенством

$$\Phi(s) = L - s - \sum_{k=1}^{N} A_k (s_k - s)_+^0.$$

Оценивая правую часть (1.3.3), согласно равенству Гёльдера,

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{g}(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |\mathrm{g}(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

$$p^{-1} + q^{-1} = 1,\ 1 \leq q \leq \infty$$

и учитывая тождество

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

для произвольной функции $f \in W_{0,p}^{(1)}(\mathcal{K}; Q)$, $1 \leq q \leq \infty$ и произвольной кривой $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$ параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s),\ 0 \leq s \leq L, \end{cases}$$

которой удовлетворяют уравнению

$$x^2(s) + y^2(s) = L^2,$$

получаем оценку сверху

$$|R_N(f;\Gamma)| \leq \int_0^L \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right| |\Phi(s)|\, ds \leq$$

$$\leq \left(\int_0^L \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right|^p ds \right)^{1/p} \left(\int_0^L |\Phi(s)|^q\, ds \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int_0^L \left| grad\, f(x(s), y(s)) \right|^p ds \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\Phi(s)|^q \, ds \right)^{1/q} \le$$

$$\le \mathcal{K} \left(\int_0^L |\Phi(s)|^q \, ds \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \ 1 \le q \le \infty. \tag{1.3.4}$$

Прежде всего докажем, что существует функция $f_1 \in W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K}; Q)$ и кривая $\Gamma^* \subset \mathfrak{N}_Q(L)$, для которых неравенство (1.3.4) обращается в равенство. Для этой цели рассмотрим кривую

$$\Gamma^* : \begin{cases} x := x(s) = s/\sqrt{2}, \\ y := y(s) = s/\sqrt{2}, \quad 0 \le s \le L, \end{cases}$$

очевидно принадлежащую классу $\mathfrak{N}_Q(L)$, и положим

$$f_1(x(s), y(s)) = \int_0^{x(s)} \varphi_1(t) dt + \int_0^{y(s)} \varphi_1(t) dt,$$

где

$$\varphi_1(t) = \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{2}} \left(\int_0^L |\Phi(s)|^q \, ds \right)^{-1/p} \left| \widetilde{\Phi}(t) \right|^{q-1} \mathrm{sgn} \widetilde{\Phi}(t),$$

$$\widetilde{\Phi}(s) = L - \sqrt{2}s - \sum_{k=1}^{m} A_k (s_k - \sqrt{2}s)^0_+, \quad \widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(s).$$

Покажем, что функция $f_1 \in W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K}; Q)$. Имеем

$$\nabla f_1(x(s), y(s)) = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} = \sqrt{2} \varphi \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \mathcal{K} \left(\int_0^L |\Phi(s)|^q \, ds \right)^{-1/p} \left| \widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right|^{q-1} \mathrm{sgn}\, \widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \mathcal{K} \left(\int_0^L |\Phi(s)|^q \, ds \right)^{-1/p} \cdot |\Phi(s)|^{q-1} \, \mathrm{sgn}\, \Phi(s). \tag{1.3.5}$$

Отсюда получим

$$\left\|\nabla f_1(x(s),y(s))\right\|^p_{L_p[0,L]} = \left\|grad\, f(x(s),y(s))\right\|^p_{L_p[0,L]} =$$

$$= \mathcal{K}^p \left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^q\, ds\right)^{-1} \cdot \int\limits_0^L |\Phi(s)|^{(q-1)p}\, ds =$$

$$= \mathcal{K}^p \left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^q\, ds\right)^{-1} \cdot \int\limits_0^L |\Phi(s)|^q\, ds = \mathcal{K}^p. \qquad (1.3.6)$$

Этим включение $f_1 \in W^{(1)}_{0,2}(\mathcal{K};Q)$ доказано.

С другой стороны, с учётом (1.3.5) и (1.3.6) из (1.3.3) будем иметь

$$R_N(f_1;\Gamma) = \int\limits_0^L \nabla f_1(x(s),y(s))\Phi(s)ds =$$

$$= \mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^q\, ds\right)^{1/q},\ 1 \le q \le \infty. \qquad (1.3.7)$$

Таким образом, из равенства (1.3.7) следует, что

$$R_N(W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S) = \mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^q\, ds\right)^{1/q},\ 1 \le q \le \infty$$

и задача состоит в отыскании величины

$$\mathscr{E}_N(W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\left\{\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi(s)|^q\, ds\right)^{1/q} :\ (A,S) \subset \mathcal{A}\right\}. \qquad (1.3.8)$$

Нетрудно заметить, что экстремальная пара f_1 и Γ^* не единственная. Полагая

$$\sigma_k = s_k/L,\ p_k = A_k/L,\ k = \overline{1,N},$$

перепишем функцию $\Phi(s)$ в следующем удобном нам для дальнейшего виде

$$\Phi(s) = L\left[1 - \frac{s}{L} - \sum_{k=1}^{N} p_k \left(\sigma_k - \frac{s}{L}\right)_+^0\right] := L\Phi_*(s/L). \tag{1.3.9}$$

Подставляя равенство (1.3.9) в правую часть (1.3.8) и сделав замену переменной $\tau = s/L$, приходим к неравенству

$$R_N(W_{0,p}^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S) = \mathcal{K}\left(L^q\int_0^L |\Phi_*(s/L)|^q\,ds\right)^{1/q} =$$

$$= \mathcal{K}L^{1+1/q}\left(\int_0^L |\Phi_*(s/L)|^q\,d(s/L)\right)^{1/q} = \mathcal{K}L^{1+1/q}\left(\int_0^1 |\Phi_*(\tau)|^q\,d\tau\right)^{1/q},$$

где

$$\Phi_*(\tau) = 1 - \tau - \sum_{k=1}^{N} p_k(\sigma_k - \tau)_+^0.$$

Таким образом, требуется вычислить правую часть величины

$$\mathscr{E}_N(W_{0,p}^{(1)}(\mathcal{K};Q),\mathfrak{N}_Q(L)) =$$

$$= \inf\left\{R_N(W_{0,p}^{(1)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S):\ (A,S)\subset\mathcal{A}\right\} =$$

$$= \mathcal{K}L^{1+1/q}\inf\left\{\left(\int_0^1 |\Phi_*(\tau)|^q\,d\tau\right)^{1/q} : \{\sigma_k\}_{k=1}^N,\ \{p_k\}_{k=1}^N\right\}, \tag{1.3.10}$$

где $0 \le \sigma_k \le 1$ $(k = \overline{1,N})$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k = 1$. Таким образом, задача сведётся к исследованию минимума интеграла

$$\int_0^1 \left|1 - \tau - \sum_{k=1}^{N} p_k(\sigma_k - \tau)_+^0\right|^q d\tau = \int_0^1 \left|t - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(t - t_k)_+^0\right|^q dt,$$

где положено

$$\lambda_k = p_{N-k+1},\ t_k = 1 - \sigma_{N-k+1},\ t_k < t_{k+1},\ k = \overline{1, N},\ t_{N+1} = 1. \qquad (1.3.11)$$

Этим вопрос сводится к нахождению минимума интеграла

$$\int_0^1 \left| t - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k (t - t_k)_+^0 \right|^q dt := \int_0^1 \left| t - \rho_N^{(1)}(t) \right|^q dt \qquad (1.3.12)$$

среди всевозможных систем чисел λ_k и t_k при фиксированном N, удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N \leq 1.$$

Итак, требуется найти наилучшее приближение функции t ступенчатыми функциями $\rho_N^{(1)}(t)$ в метрике $L_q[0, 1]$ $(1 \leq q \leq \infty)$, которые на каждом из интервалов (t_k, t_{k+1}) принимают постоянное значение.

Вычисляя интеграл в правой части (1.3.12) при условии

$$t_1 + \sum_{k=1}^{N} (t_{k+1} - t_k) = 1,$$

находим минимальные значения $t = t_k^*$:

$$t_k^* = \frac{2(k-1)+1}{2N+1}, \quad k = \overline{1, N}.$$

При этом экстремальная ступенчатая функция имеет вид:

$$\rho_{N^*}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ 0 < t < \dfrac{1}{2N+1}, \\ \dfrac{2k}{2N+1}, & \text{если } \ t_k^* < t < t_{k+1}^*. \end{cases}$$

Из (1.3.11) находим

$$\lambda_k = \frac{2}{2N+1}, \quad k = \overline{1,N};$$

$$p_k^* = \frac{2}{2N+1}, \quad k = \overline{1,N};$$

$$\sigma_k^* = \frac{2k}{2N+1}, \quad k = \overline{1,N}.$$

Простые вычисления дают равенства

$$\inf_{\lambda_k, t_k} \left(\int_0^1 \left| t - \rho_N^{(1)}(t) \right|^q dt \right)^{1/q} = \left(\int_0^1 \left| t - \rho_{N^*}^{(1)}(t) \right|^q dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[q]{q+1}(2N+1)},$$

воспользуясь которой, в силу (1.3.10), запишем

$$\mathscr{E}_N(W_{0,p}^{(1)}(\mathcal{K};Q), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K} L^{1+1/q}}{\sqrt[q]{q+1}(2N+1)}, \quad 1 \le q \le \infty,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1.

§1.4. Наилучшая квадратурная формула с весом для приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным вариацией и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$

В данном параграфе рассмотрим вопрос оптимизации приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода

$$\mathcal{J}(q;f;\Gamma)=\int\limits_{\Gamma} q(M)f(M)ds\approx\sum_{k=1}^{N}A_k f(M_k), \tag{1.4.1}$$

где весовая функция $q(M)\geq 0$, $\forall\,\Gamma$, Γ — произвольная спрямляемая кривая с конечною длиной L, кривизна которой кусочно-непрерывна, а $f(M)=f(x,y)$ – произвольная непрерывная на Γ функция.

Как и в параграфе 1.1, для достижения высокой точности при помощи формулы (1.4.1), воспользуемся возможно лучшим выбором числовых коэффициентов $\{A_k\}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ и узлов M_k $(k=1,2,\ldots,N)$.

Предположим, что кривая Γ задана параметрическими уравнениями (1.1.2) и функция $q(x(s),y(s))\geq 0$, $0\leq s\leq L$. Обозначая тогда через $s_k\in[0,L]$ $(k=1,2,\ldots,N)$ значения длины дуги s кривой Γ, которые соответствуют точкам $M_k\in\Gamma$, перепишем квадратурную формулу (1.4.1) в следующем виде

$$\int\limits_0^L q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds=\sum_{k=1}^{N}A_k f(x(s_k),y(s_k))+R_N(q,f;\Gamma). \tag{1.4.2}$$

Пусть по-прежнему $\mathcal{A}$ – множество векторов коэффициентов и узлов (A,S) $\big(A=\{A_k\},\ S=\{s_k\}\big)$, для которых формула (1.4.2) имеет смысл.

Будем предполагать, что квадратурная формула (1.4.2) является точной для постоянной функции $f(x(s),y(s))=C=\mathrm{const}$. Тогда выполняется условие

$$\int\limits_0^L q(x(s),y(s))ds=\sum_{k=1}^{N}A_k. \tag{1.4.3}$$

Пусть $V(L;M)$ — класс заданных на отрезке $[0,L]$ функций

$$F(s) := f(x(s),y(s)),$$

полная вариация которых на отрезке $[0,L]$ не превосходит числа M :

$$\bigvee_0^L(F) = \bigvee_0^L(f) \leq M.$$

Для класса функций $V(L,M)$ требуется найти величину

$$\mathscr{E}_N(q;V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) =$$

$$= \inf\Big\{R_N(q;V(L,M);\mathfrak{N}_Q(L);A,S):\ (A,S)\subset\mathcal{A}\Big\} \tag{1.4.4}$$

и указать вектор коэффициентов и узлов (A^0,S^0), реализующий точную нижнюю грань в (1.4.4).

Следуя схеме рассуждений Н.П.Корнейчука [10, с.172-173], Т.Н.Бусарова и А.А.Борисенко [2], получим оценку снизу величины (1.4.4). С этой целью каждому вектору узлов $S=\{s_k\}_{k=1}^N$ сопоставим множество

$$V_S(L,M) := \Big\{f:\ f\in V(L,M),\ f(x(s_k),y(s_k))=0,\ k=\overline{1,N}\Big\},$$

обращающее квадратурную сумму в правой части (1.4.2) в нуль.

Введём следующие обозначения:

$$\beta_0 = \int\limits_0^{s_1} q(x(s),y(s))ds,\ \ \beta_N = \int\limits_{s_N}^{L} q(x(s),y(s))ds;$$

$$\beta_k = \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} q(x(s),y(s))ds,\ \ k=\overline{1,N-1};$$

$$\overline{\beta} = \max\Big\{\beta_k:\ 1\leq k\leq N-1\Big\} = \beta_\nu.$$

Полагаем

$$\beta = \beta(S) = \max\Big\{\overline{\beta},\ 2\beta_0,\ 2\beta_N\Big\}.$$

Из самого определения множества $V_S(L,M)$ сразу следует, что для любого вектора узлов $A:=\{A_k\}$ имеет место соотношение

$$R_N(V_S(L,M),\mathfrak{N}_Q(L);A,S) = \sup_{f\in V_S(L,M)}\left|\int\limits_0^L q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds\right| =$$

$$= \left| \int_0^L q(x(s), y(s)) f_S(x(s), y(s)) ds \right|, \tag{1.4.5}$$

где $f_S(x(s), y(s))$ задаётся следующим образом: если

$$\beta = \overline{\beta} = \beta_\nu \ (1 \leq \nu \leq \nu - 1),$$

то

$$f_S(x(s), y(s)) := \begin{cases} \dfrac{M}{2}, & s_\nu < s < s_{\nu+1}, \\ 0, & s \in [0, L] \setminus (s_\nu, s_{\nu+1}), \end{cases} \tag{1.4.6}$$

если же $\beta = 2\beta_0$, то

$$f_S(x(s), y(s)) := \begin{cases} M, & 0 \leq s < s_1, \\ 0, & s \in [0, L] \setminus [0, s_1), \end{cases} \tag{1.4.7}$$

а если $\beta = 2\beta_N$, то

$$f_S(x(s), y(s)) := \begin{cases} M, & s_N < s \leq L, \\ 0, & s \in [0, L] \setminus (s_N, L]. \end{cases} \tag{1.4.8}$$

Таким образом, из (1.4.5) — (1.4.8) следует, что

$$R_N(V_S(L, M), \mathfrak{N}_Q(L); A, S) = \frac{M}{2} \beta(S),$$

и, следовательно,

$$\mathscr{E}_N(V_S(L, M), \mathfrak{N}_Q(L)) =$$
$$= \inf_{(A,S)} R_N(V_S(L, M); \mathfrak{N}_Q(L); A, S) = \frac{M}{2} \inf_S \beta(S). \tag{1.4.9}$$

Методом от противного несложно показать, что

$$\inf_S \beta(S) = \beta(S^0),$$

где вектор узлов $S^0 = \left\{ s_1^0, s_2^0, \ldots, s_N^0 \right\}$ однозначно определяется равенствами

$$2\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{N-1} = 2\beta_N = \beta(S^0). \tag{1.4.10}$$

Так как $V_S(L,M) \subset V(L,M)$, то из (1.4.9) и (1.4.10) сразу следует нужная оценка снизу

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) \geq \mathscr{E}_N(V_S(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) \geq \frac{M}{2}\beta(S^0). \tag{1.4.11}$$

Оценим величину $\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L))$ сверху. С этой целью введём вектор коэффициентов

$$A^0 = \left\{A_1^0, A_2^0, \ldots, A_N^0\right\},$$

полагая

$$A_k^0 = \int\limits_{\sigma_{k-1}^0}^{\sigma_k^0} q(x(s),y(s))ds = \beta(S^0), \quad k = \overline{1,N},$$

где

$$\sigma_0^0 = 0,\ \sigma_N^0 = L,\ \int\limits_{\sigma_{k-1}^0}^{s_k^0} q(x(s),y(s))ds = \int\limits_{s_k^0}^{\sigma_k^0} q(x(s),y(s))ds, \quad k = \overline{1,N}$$

и введём в рассмотрение квадратурную формулу

$$\int\limits_0^L q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds = \sum_{k=1}^N A_k^0 f(x(s_k^0),y(s_k^0)) + R_N(q,f;\Gamma,A^0,S^0).$$

Для произвольной функции $f(x(s),y(s)) \in V(L,M)$ и кривой $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$ получаем

$$\left|R_N(q,f;\Gamma,A^0,S^0)\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^L q(x(s),y(s))f(x(s),y(s))ds - \sum_{k=1}^N A_k^0 f(x(s_k^0),y(s_k^0))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^N \left\{ \int\limits_{\sigma_{k-1}^0}^{s_k^0} \left|f(x(s),y(s)) - f(x(s_k^0),y(s_k^0))\right| q(x(s),y(s))ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{s_k^0}^{\sigma_k^0} \left|f(x(s),y(s)) - f(x(s_k^0),y(s_k^0))\right| q(x(s),y(s))ds \right\} \leq$$

$$\leq \frac{\beta(S^0)}{2}\sum_{k=1}^{N}(a'_k + a''_k), \tag{1.4.12}$$

где, ради краткости, обозначено

$$a'_k = \sup_{\sigma^0_{k-1}\leq s\leq s^0_k}\Big|f(x(s), y(s)) - f(x(s^0_k), y(s^0_k))\Big|;$$

$$a''_k = \sup_{\sigma^0_{k}\leq s\leq s^0_k}\Big|f(x(s), y(s)) - f(x(s^0_k), y(s^0_k))\Big|.$$

В силу определения точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ существуют точки $\tau'_k \in [\sigma^0_{k-1}, s^0_k]$ и $\tau''_k \in [\sigma^0_{k-1}, s^0_k]$ такие, что

$$\Big|f(x(\tau'_k), y(\tau'_k)) - f(x(s^0_k), y(s^0_k))\Big| + \frac{\varepsilon}{2N} > a'_k$$

и

$$\Big|f(x(\tau''_k), y(\tau''_k)) - f(x(s^0_k), y(s^0_k))\Big| + \frac{\varepsilon}{2N} > a''_k.$$

В таком случае имеем

$$\sum_{k=1}^{N}(a'_k + a''_k) < \sum_{k=1}^{N}\Big\{|f(x(\tau'_k), y(\tau'_k)) - f(x(s^0_k), y(s^0_k))| + \frac{\varepsilon}{2N} +$$

$$+|f(x(\tau''_k), y(\tau''_k)) - f(x(s^0_k), y(s^0_k))| + \frac{\varepsilon}{2N}\Big\} < \bigvee_0^L(f) + \varepsilon,$$

а потому из (1.4.12) следует, что

$$\Big|R_N(q, f; \Gamma, A^0, S^0)\Big| < \frac{\beta(S^0)}{2}\left(\bigvee_0^L(f) + \varepsilon\right)$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\Big|R_N(q, f; \Gamma, A^0, S^0)\Big| \leq \frac{\beta(S^0)}{2}\bigvee_0^L(f) \leq \frac{M}{2}\beta(S^0). \tag{1.4.13}$$

Заметим, что неравенство (1.4.13) имеет место для произвольной функции $f \in V(L,M)$ и произвольной кривой $\Gamma \subset \mathfrak{N}_Q(L)$, а потому имеем

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) \leq \frac{M}{2}\,\beta(S^0). \tag{1.4.14}$$

Сопоставляя неравенства (1.4.11) и (1.4.14), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида (1.4.2) наилучшей для классов функций $V(L,M)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ является формула, у которой вектор узлов и коэффициентов (A^0,S^0) определяются по весовой функции $q(x(s),y(s))$ из соотношения*

$$2\int\limits_0^{s_1^0} q(x(s),y(s))ds = \int\limits_{s_1^0}^{s_2^0} q(x(s),y(s))ds = \cdots$$

$$\cdots = \int\limits_{s_{N-1}}^{s_N^0} q(x(s),y(s))ds = 2\int\limits_{s_N^0}^{L} q(x(s),y(s))ds = \beta(S^0), \tag{1.4.15}$$

$$A_k^0 = \beta(S^0), \quad k=\overline{1,N}. \tag{1.4.16}$$

При этом для погрешности наилучшей формулы на указанных классах функций и кривых справедлива оценка

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2}\,\beta(S^0).$$

Рассмотрим конкретные частные случаи:

I. Пусть, например, $q(x(s),y(s)) = s^\alpha$, $\alpha > -1$. Тогда из равенства (1.4.15) и (1.4.16) находим узлы и коэффициенты наилучшей для классов $V(L,M)$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$ квадратурной формулы:

$$s_k^0 = \left(\frac{2k-1}{2N}L^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = \left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}L, \quad k=\overline{1,N};$$

$$A_k^0 = \frac{L^{\alpha+1}}{N(\alpha+1)}, \quad k=\overline{1,N}.$$

Таким образом, в этом случае наилучшая квадратурная формула

$$\int_0^L s^\alpha f(x(s), y(s))ds =$$

$$= \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N} \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L\right), y\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L\right)\right) + R_N(f; s^\alpha).$$

При этом для погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе $V(L, M)$ справедлива оценка

$$\mathscr{E}_N(V(L,M), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{ML^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)N}.$$

II. Пусть $q(x(s), y(s)) = e^s$. В этом случае узлы и коэффициенты наилучшей формулы имеют вид:

$$s_k^0 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2k-1}{2N}(e^L - 1) + 1\right),\ k = \overline{1, N};$$

$$A_k^0 = \frac{e^L - 1}{N},\ k = \overline{1, N}.$$

При этом

$$\mathscr{E}_N(V(L,M), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M(e^L - 1)}{2N}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда в сформулированной задаче заранее зафиксированы в качестве узлов квадратурной формулы концы промежутка $[0, L]:\ s_0 = 0,\ s_N = L$, а узлы $s_1, s_2, \ldots, s_{N-1}$ и коэффициенты A_k $(k = \overline{1, N})$ требуется выбрать оптимальным образом. Такие квадратурные формулы в литературе называют квадратурными формулами типа А.А.Маркова (см., например, [11, с.156]). Итак, считая

$$S = \left\{s_k :\ 0 = s_0 < s_1, \cdots < s_{N-1} < s_N = L\right\},$$

рассмотрим квадратурную формулу типа Маркова общего вида

$$\int_0^L q(x(s), y(s)) f(x(s), y(s))ds = A_0 f(x(0), y(0)) + \sum_{k=1}^{N-1} A_k f(x(s_k), y(s_k)) +$$

$$+A_N f(x(L),y(L)) + R_N(f;\Gamma,A,S). \tag{1.4.17}$$

Повторив буквально изложенные выше рассуждения для погрешности наилучшей формулы типа Маркова (1.4.17), получаем следующее утверждение.

Теорема 1.4.2. *Среди всех квадратурных формул вида (1.4.7) наилучшей для классов функций $V(L,M)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ является формула, у которой векторы узлов и коэффициентов $(\overline{A},\overline{S})$ определяются по весовой функции $q(x(s),y(s))$ из соотношения*

$$\int_0^{\overline{s}_1} q(x(s),y(s))ds = \int_{\overline{s}_1}^{\overline{s}_2} q(x(s),y(s))ds = \cdots$$

$$\cdots = \int_{\overline{s}_{N-2}}^{\overline{s}_{N-1}} q(x(s),y(s))ds = \int_{\overline{s}_{N-1}}^{L} q(x(s),y(s))ds = \beta(\overline{S}), \tag{1.4.18}$$

$$\begin{gathered}\overline{A}_1 = \int_a^{\overline{t}_1} q(x(s),y(s))ds = \frac{1}{2}\beta(\overline{S}),\ \overline{A}_N = \int_{\overline{t}_{N-1}}^{\overline{t}_N} q(x(s),y(s))ds = \frac{1}{2}\beta(\overline{S});\\ \overline{A}_k = \int_{\overline{t}_k}^{\overline{t}_{k+1}} q(x(s),y(s))ds = \beta(\overline{S}), \quad (k=\overline{1,N-2}),\end{gathered} \tag{1.4.19}$$

где $\overline{t}_0 = 0,\ \overline{t}_N = L,$ *а числа* $\overline{t}_k$ *определяются из равенства*

$$\int_{\overline{s}_{k-1}}^{\overline{t}_k} q(x(s),y(s))ds = \int_{\overline{t}_k}^{\overline{s}_k} q(x(s),y(s))ds,\ (k=\overline{1,N-1}).$$

При этом

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2}\,\beta(\overline{S}). \tag{1.4.20}$$

Рассмотрим частные случаи наилучших квадратурных формул типа Маркова для рассмотренных выше конкретных весовых функций:

I. Пусть $q(x(s), y(s)) = s^{\alpha}$, $\alpha > -1$. Из соотношения (1.4.18) – (1.4.20) находим узлы, коэффициенты и точную оценку погрешности наилучшей квадратурной формулы типа Маркова (1.4.17) на классах функций $V(L, M)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$:

$$\overline{s}_k = \left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L,\ (k = \overline{1, N-1}),\ \overline{s}_0 = 0,\ \overline{s}_N = L;$$

$$\overline{p}_0 = \overline{p}_N = \frac{L^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)N},\ \overline{p}_k = \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}\ \ (k = \overline{1, N-1});$$

Таким образом, наилучшая квадратурная формула типа Маркова (1.4.17) имеет вид

$$\int\limits_0^L s^{\alpha} f(x(s), y(s)) ds = \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N} \left\{ \frac{f(x(0), y(0)) + f(x(L), y(L))}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L \right), y\left(\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L \right) \right) \right\} + R_N(f; s^{\alpha}).$$

$$\overline{\mathscr{E}}_N(V(L, M), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2} \cdot \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}.$$

II. $q(x(s), y(s)) = e^{s},\ 0 \le s \le L$. В этом случае узлы, коэффициенты и точная оценка погрешности наилучшей квадратурной формулы имеют вид:

$$\overline{s}_k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{k}{N}(e^L - 1) + 1\right),\ (k = \overline{1, N-1}),\ \overline{s}_0 = 0,\ \overline{s}_N = L;$$

$$\overline{p}_0 = \overline{p}_N = \frac{e^L - 1}{2N},\ \overline{p}_k = \frac{e^L - 1}{N}\ \ (k = \overline{1, N-1});$$

$$\overline{\mathscr{E}}_N(V(L, M), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{M}{2} \cdot \frac{e^L - 1}{N}.$$

ГЛАВА II

НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty,$ $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty,\ \ W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L]$ И КРИВЫХ $\mathfrak{N}_Q(L)$

В первом параграфе этой главы рассматривается вопрос отыскания наилучших квадратурных формул вида (1.1.3) для классов функций $\{f(x(s),y(s))\}$ с ограниченной в пространстве L_p $(1\le p\le\infty)$ нормой второго градиента

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_p}\le\mathcal{K},\ 1\le p\le\infty$$

вдоль произвольной кривой $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$, длина которой равна L.

Во втором параграфе второй главы рассматривается аналогичная задача для класса функций $W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L]$, у которых градиент $\nabla f(x(s),y(s))$ для любых двух точек $s',s''\in[0,L]$ удовлетворяет условию

$$\Big|\nabla f(x(s''),y(s''))-\nabla f(x(s'),y(s'))\Big|\le\omega(|s''-s'|),$$

где $\omega(t)$ — произвольный заданный модуль непрерывности на отрезке $[0,L]$.

§2.1. О наилучших квадратурных формулах вида (1.1.3) для классов функций $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$

Прежде всего напомним, что через $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ в параграфе 1.1 мы обозначали класс функций $\{f(x(s),y(s))\}$, которые всюду в области $Q=\{(x,y):\ x^2+y^2\le L\}$ имеют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^{2-k}x\partial y^k}\quad (k=0,1,2),$$

удовлетворяющие условию

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_p[0,L]}:=\left(\int\limits_0^L\left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right|^p ds\right)^{1/p}\le\mathcal{K},\quad 1\le p<\infty,$$

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_\infty[0,L]}:=essup\left\{\left|\nabla^2 f(x(s),y(s))\right|:\ s\in[0,L]\right\}\le\mathcal{K},\ p=\infty,$$

где оператор «∇» определяется равенством

$$\nabla:=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\quad \text{и}\quad \nabla^2:=\nabla(\nabla),$$

$$\nabla^2 f(x(s),y(s)):=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Для произвольной функции $f\in W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x(s),y(s))=f(x(0),y(0))+$$

$$+\left(\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f(x(s),y(s))}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)\Bigg|_{s=0}s+\int\limits_0^s\left(\frac{\partial^2 f(x(t),y(t))}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\,\frac{\partial^2 f(x(t),y(t))}{\partial x\partial y}\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2 f(x(t),y(t))}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)(s-t)_+dt=$$

$$= f(x(0), y(0)) + \nabla f(x(s), y(s))\Big|_{s=0} \cdot S+$$

$$+ \int\limits_0^L \nabla^2 f(x(t), y(t))(s-t)_+ dt. \qquad (2.1.1)$$

В предположении, что квадратурная формула (1.1.3) точна на множестве многочленов первой степени, то есть при выполнении равенств

$$\int\limits_0^L ds = \sum_{k=1}^N A_k = L, \quad \int\limits_0^L s ds = \sum_{k=1}^N A_k s_k = \frac{L^2}{2}, \qquad (2.1.2)$$

остаток квадратурной формулы (1.1.3) представим в следующем интегральном представлении

$$R_N(f;\Gamma) = \int\limits_0^L f(x(s), y(s)) ds - \sum_{k=1}^N A_k f(x(s_k), y(s_k)) =$$

$$= \int\limits_0^L \left\{ f(x(0), y(0)) + \nabla f(x(s), y(s))\Big|_{s=0} s + \int\limits_0^L \nabla^2 f(x(t), y(t))(s-t)_+ dt \right\} ds-$$

$$- \sum_{k=1}^N A_k \left\{ f(x(0), y(0)) + \nabla f(x(s), y(s))\Big|_{s=0} s_k + \int\limits_0^L \nabla^2 f(x(t), y(t))(s_k - t)_+ dt \right\} ds =$$

$$= \left\{ L - \sum_{k=1}^N A_k \right\} f(x(0), y(0)) + \left\{ \frac{L^2}{2} - \sum_{k=1}^N A_k s_k \right\} \nabla f(x(s), y(s))\Big|_{s=0} +$$

$$+ \int\limits_0^L \nabla^2 f(x(t), y(t)) \left\{ \frac{(L-t)^2}{2} - \sum_{k=1}^N A_k (s_k - t)_+ \right\} dt =$$

$$= \int\limits_0^L \nabla^2 f(x(t), y(t)) \left\{ \frac{(L-t)^2}{2} - \sum_{k=1}^N A_k (s_k - t)_+ \right\} dt =$$

$$= \int\limits_0^L \nabla^2 f(x(t), y(t)) \Phi_2(t) dt, \tag{2.1.3}$$

где, ради краткости, положено

$$\Phi_2() = \frac{(L-t)^2}{2} - \sum_{k=1}^{N} A_k (s_k - t)_+, \quad (s_k - t)_+ = \max(0, s_k - t). \tag{2.1.4}$$

Оценивая правую часть равенства (2.1.3), согласно равенству Гёльдера,

$$\left| \int\limits_a^b f(x) \mathrm{g}(x) dx \right| \leq \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |\mathrm{g}(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

$$(p^{-1} + q^{-1} = 1, \ 1 \leq q \leq \infty)$$

для произвольной функции $f \in W_p^{(2)}(\mathcal{K}; Q), \ 1 \leq q \leq \infty$, получаем

$$|R_N(f; \Gamma)| \leq \left(\int\limits_0^L \left| \nabla^2 f(x(t), y(t)) \right|^p dt \right)^{1/p} \left(\int\limits_0^L |\Phi_2(t)|^q \, dt \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \mathcal{K} \left(\int\limits_0^L |\Phi_2(t)|^q \, dt \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty. \tag{2.1.5}$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что для кривой $\Gamma^* \subset \mathfrak{N}_Q(L)$, заданной параметрическими уравнениями

$$x := x(s), \ y := y(s), \ 0 \leq s \leq L$$

и определённой на кривой Γ^*, функция

$$f_2(x(s), y(s)) = \int\limits_0^{x(s)} \left(\int\limits_0^t \varphi^*(u) du \right) dt + \int\limits_0^{y(s)} \left(\int\limits_0^t \varphi^*(u) du \right) dt,$$

где

$$\varphi^*(s) = \mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi_2(s)|^q\,ds\right)^{-1/p} \left|\Phi_2^*(s)\right|^{q-1} \operatorname{sgn}\Phi_2^*(s),$$

$$\Phi_2^*(s) = \frac{1}{2}\Big(L-\sqrt{2}s\Big)^2 - \sum_{k=1}^{N} A_k(s_k-\sqrt{2}s)_+, \quad \Phi_2^*\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \Phi_2(s),$$

неравенство (2.1.5) обращается в равенство.

В самом деле, легко проверить, что

$$\frac{\partial^2 f_*}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\varphi^*(x(s)) := \frac{1}{2}\,\varphi^*\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi_2(s)|^q\,ds\right)^{-1/p} \left|\Phi_2^*\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right|^{q-1} \operatorname{sgn}\Phi_2^*\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi_2(s)|^q\,ds\right)^{-1/p} |\Phi_2\,(s)|^{q-1}\,\operatorname{sgn}\Phi_2\,(s)\,, \qquad (2.1.6)$$

Аналогичным образом, имеем

$$\frac{\partial^2 f_*}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\varphi^*(y(s)) := \frac{1}{2}\,\varphi^*\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L |\Phi_2(s)|^q\,ds\right)^{-1/p} |\Phi_2\,(s)|^{q-1}\,\operatorname{sgn}\Phi_2\,(s)\,, \qquad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 f_*}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} = 0, \qquad (2.1.8)$$

а потому в силу равенств (2.1.6) – (2.1.8) имеем:

$$\nabla^2 f_*(x(s),y(s)) := \frac{\partial^2 f_*(x(s),y(s))}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + g$$

$$+2\,\frac{\partial^2 f_*(x(s),y(s))}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2 f_*(x(s),y(s))}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\,\varphi^*(x(s))+\frac{1}{2}\,\varphi^*(y(s))=\varphi^*\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L|\Phi_2(s)|^q\,ds\right)^{-1/p}|\Phi_2\,(s)|^{q-1}\,\mathrm{sgn}\Phi_2\,(s)\,. \qquad (2.1.9)$$

Но так как

$$\left\|\nabla^2 f_*(x(\cdot),y(\cdot))\right\|^p_{L_p[0,L]}=$$

$$=\mathcal{K}^p\left(\int\limits_0^L|\Phi_2(s)|^q\,ds\right)^{-1}\cdot\int\limits_0^L|\Phi_2(s)|^{(q-1)p}\,ds=$$

$$=\mathcal{K}^p\left(\int\limits_0^L|\Phi(s)|^q\,ds\right)^{-1}\cdot\int\limits_0^L|\Phi(s)|^q\,ds=\mathcal{K}^p,$$

то функция $f_*(x(s),y(s))\in W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le q\le\infty.$

Воспользовавшись равенством (2.1.9), из (2.1.3) получаем

$$R_N(f_*;\Gamma^*,A,S)=\int\limits_0^L\nabla^2 f_*(x(t),y(t))\Phi_2(t)dt=$$

$$=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L\left(\int\limits_0^L|\Phi_2(t)|^q\,dt\right)^{-1/p}\Big|\Phi_2(t)\Big|^{q-1}\mathrm{sgn}\Phi_2(t)\cdot\Phi_2(t)\right)dt=$$

$$=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L|\Phi_2(t)|^q\,dt\right)^{-1/p}\int\limits_0^L\Big|\Phi_2(t)\Big|^q dt=$$

$$=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L|\Phi_2(t)|^q\,dt\right)^{1-1/p}=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L|\Phi_2(t)|^q\,dt\right)^{1/q},\ 1\le q\le\infty.$$

Тем самым мы доказали, что

$$R_N(W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S)=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L|\Phi_2(s)|^q\,ds\right)^{1/q},\ 1\le q\le\infty. \quad (2.1.10)$$

Полагая $\sigma_k=s_k/L,\ p_k=A_k/L,\ k=\overline{1,N}$, функцию $\Phi_2(s)$, определённую равенством (2.1.4), перепишем в следующем виде

$$\Phi_2(s):=\frac{1}{2}(L-s)^2-\sum_{k=1}^N A_k(s_k-s)_+=$$

$$=L^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{L}\right)^2-\sum_{k=1}^N\frac{A_k}{L}\left(\frac{s_k}{L}-\frac{s}{L}\right)_+\right]=$$

$$=L^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{L}\right)^2-\sum_{k=1}^N p_k\left(\sigma_k-\frac{s}{L}\right)_+\right]:=L^2\widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{L}\right). \quad (2.1.11)$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^N p_k=1,\quad \sigma_1+\sum_{k=1}^N(\sigma_{k+1}-\sigma_k)=1,\quad \sigma_{N+1}=1.$$

Теперь с учётом равенства (2.1.11) из (2.1.10) получаем

$$R_N(W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L);A,S)=\mathcal{K}\left(\int\limits_0^L|\Phi_2(s)|^q\,ds\right)^{1/q}=$$

$$=\mathcal{K}\left(L^{2q+1}\int\limits_0^L\left|\widetilde{\Phi}\left(\frac{s}{L}\right)\right|^q d\left(\frac{s}{L}\right)\right)^{1/q}=$$

$$=\frac{\mathcal{K}}{2}L^{2+1/q}\left(\int\limits_0^1\left|\widetilde{\Phi}_2(s)\right|^q ds\right)^{1/q},\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1\le q\le\infty\right),$$

где

$$\widetilde{\Phi}_2(s) = (1-s)^2 - 2\sum_{k=1}^{N} p_k(\sigma_k - s)_+, \quad (\sigma_k - s)_+ = \max(0, \sigma_k - s). \quad (2.1.12)$$

Таким образом, в силу (1.1.7) требуется найти величину

$$\mathscr{E}_N(W_p^{(2)}(\mathcal{K}; Q), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}}{2} L^{2+1/q} \inf_{p_k, \sigma_k} \left(\int_0^1 \left| \widetilde{\Phi}_2(s) \right|^q ds \right)^{1/q}. \quad (2.1.13)$$

Прежде чем найти минимальное значение интеграла, стоящего в правой части (2.1.13), и указать векторы коэффициентов и узлов $\{(p_k, \sigma_k)\}_{k=1}^N$, реализующих этот минимум, отметим некоторые свойства функции $\widetilde{\Phi}_2(s)$. Очевидно, что функция $\widetilde{\Phi}_2(s)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а её производная $\widetilde{\Phi}_2'(s)$ имеет разрыв в точках $s = \sigma_k$. Выясним, как сказываются на виде функции $\widetilde{\Phi}_2(s)$ условия точности квадратурной формулы (1.1.3) для многочленов первой степени. Если это условие выполнено, то тождественно по переменному s имеем:

$$\int_0^1 (\sigma - s) d\sigma = \sum_{k=1}^{N} p_k(\sigma_k - s), \quad (2.1.14)$$

а так как левая часть (2.1.14) равна

$$\frac{1}{2}\Big[(1-s)^2 - s^2\Big],$$

то мы имеем:

$$(1-s)^2 - 2\sum_{k=1}^{N} p_k(\sigma_k - s) \equiv s^2. \quad (2.1.15)$$

Из вида функции $\widetilde{\Phi}_2(s)$ в (2.1.12) следует, что при $0 \le s \le \sigma_1$ функция $\widetilde{\Phi}_2(s)$ в точности совпадает с выражением, стоящем в левой части (2.1.15), следовательно,

$$\widetilde{\Phi}_2(s) \equiv s^2, \quad 0 \le s \le \sigma_1. \quad (2.1.16)$$

Легко проверить, что имеет место и обратное: из равенства (2.1.16) следует точность квадратурной формулы (1.1.3) для многочленов первой степени. В самом деле, в силу (2.1.12) функция $\widetilde{\Phi}_2(s)$ на отрезке $[0,\sigma_1]$ есть многочлен второй степени, записанный в левой части (2.1.15), а из совпадения двух многочленов на $[0,\sigma_1]$ следует их совпадение на всей числовой оси, то есть справедливо (2.1.15) и эквивалентное ему тождество (2.1.14). Теперь заметим, что в силу определения функции $(\sigma_k - s)_+$ из (2.1.12) сразу следует, что

$$\widetilde{\Phi}_2(s) = (1-s)^2, \quad \sigma_N \le s \le 1,$$

а, что касается остальных промежутков $(\sigma_k, \sigma_{k+1}]$, $k = \overline{1, N-1}$, то на каждом их них $\widetilde{\Phi}_2(s)$ есть некоторый многочлен второй степени со старшим коэффициентом, равным единице, остальные коэффициенты однозначно определяются заданием вектора $\{(p_k, \sigma_k)\}_{k=1}^N$. Таким образом функция $\widetilde{\Phi}_2(s)$ имеет вид

$$\widetilde{\Phi}_2(s) = \begin{cases} t^2 \equiv p_{r0}(t), & 0 \le t \le \sigma_1; \\ t^2 + a_1^{(k)} t + a_0^{(k)} \equiv p_{rk}(t), & \sigma_k < t \le \sigma_{k+1},\ k = \overline{1, N-1}; \\ (1-t)^2 \equiv p_{rN}(t), & \sigma_N \le t \le 1. \end{cases} \qquad (2.1.17)$$

Из (2.1.17) и представления (2.1.12) очевидно, что узлы σ_k кусочно-квадратичной функции $\widetilde{\Phi}_2(s)$ произвольны, а коэффициенты a_k $(k = \overline{1, N})$, составляющие её многочлены $p_{rk}(t)$ $(k = \overline{1, N})$, или тоже произвольны, или связаны условиями непрерывности функции $\widetilde{\Phi}_2(s)$ и её производных. Из (2.1.12) коэффициенты p_k определяются однозначно равенствами:

$$p_k = \frac{1}{2}\Big[\widetilde{\Phi}_2'(\sigma_k - 0) - \widetilde{\Phi}_2'(\sigma_k + 0)\Big], \quad k = \overline{1, N}. \qquad (2.1.18)$$

Таким образом, отыскание наименьшего значения величины

$$\mathscr{R}_N := \inf_{p_k, \sigma_k} \left(\int_0^1 \left| \widetilde{\Phi}_2(s) \right|^q ds \right)^{1/q} \qquad (2.1.19)$$

сводится к минимизации нормы кусочно-квадратичной функций (2.1.17) в метрике пространства $L_q[0,L]$, коэффициенты p_k которых в представлении (2.1.12) удовлетворяют условию (2.1.18). Решение задачи (2.1.19) в более общей ситуации, когда в интеграле в правой части (2.1.19) вместо $\Phi_2(s)$ стоит произвольная кусочно-полиномиальная функция степени r $(r>2)$, приведено Н.П.Корнейчуком [11, с.138-140], из которого в случае $r=2$ запишем вид наилучших для наших случаев значений узлов и коэффициентов:

$$\sigma_k^* = \frac{2(k-1)+\sqrt{p_{2q}}}{2\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\,\big)}, \quad k=\overline{1,N}; \tag{2.1.20}$$

$$p_1^* = p_N^* = \frac{1+\sqrt{p_{2q}(1)}}{2\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\,\big)}; \tag{2.1.21}$$

$$p_k^* = \frac{1}{N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}}, \quad k=\overline{1,N-1}, \tag{2.1.22}$$

где $p_{2q}(t)$ – многочлен вида $t^2+\alpha t+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_q,\ (1/p+1/q=1,\ 1\le q\le\infty)$ на отрезке $[-1,1]$, причём минимум величине $\mathscr{R}_N$ доставляют числа (2.1.20) – (2.1.22). При этом

$$\mathscr{R}_N = \frac{p_{2q}(1)}{4\sqrt[q]{2q+1}\,\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)^2}. \tag{2.1.23}$$

Таким образом, мы доказали следующее общее утверждение.

Теорема 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида (1.1.1) наилучшей для класса функций $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ является квадратурная формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} A_k^* f(M_k^*) + R_N(f;\Gamma), \tag{2.1.24}$$

где $A_k^*=p_k^*L,\ M_k^* := M\big(x(\sigma_k^*L),y(\sigma_k^*L)\big),\ x=x(s),\ y=y(s)$ *– параметрические уравнения кривой* Γ, L *– её длина, узлы* σ_k^* *определены равенствами*

(2.1.20), а коэффициенты p_k^* равенствами (2.1.21) и (2.1.22). При этом для погрешности наилучшей формулы (2.1.24) на указанных классов функций и кривых справедлива точная оценка

$$\mathscr{E}_N(W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{2+1/q}p_{2q}(1)}{8\sqrt[q]{2q+1}\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)}, \tag{2.1.25}$$

$$(p^{-1}+q^{-1}=1,\ 1\le q\le\infty).$$

Из теоремы 2.1.1 вытекает ряд утверждений.

Следствие 2.1.1. *Пусть $f\in W_1^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$. В этом случае $q=\infty$ и многочлен наилучшего приближения в L_∞ есть многочлен Чебышёва первого рода*

$$T_2(t)=\frac{\cos(2\arccos t)}{2}:=t^2-\frac{1}{2},\quad p_{2\infty}(1)=T_2(1)=\frac{1}{2}.$$

Коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид

$$A_1=A_N=\frac{(\sqrt{2}+1)L}{2\big(1+\sqrt{2}(N-1)\big)};$$

$$A_k=\frac{\sqrt{2}L}{1+\sqrt{2}(N-1)},\quad k=\overline{2,N-1};$$

$$s_k=\frac{\big[1+2\sqrt{2}(k-1)\big]}{2\big[1+\sqrt{2}(N-1)\big]},\quad k=\overline{1,N}.$$

При этом погрешность наилучшей формулы на классах функций $W_1^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ равна

$$\mathscr{E}_N(W_1^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{\mathcal{K}L^2}{8\big[1+\sqrt{2}(N-1)\big]}.$$

Следствие 2.1.2. *Пусть $f\in W_2^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ и $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$. Тогда $q=2$ и многочлен $p_{22}(t)$ есть многочлен Лежандра*

$$\mathscr{L}_2(t)=\frac{3t^2-1}{3},\quad p_{22}(1)=\mathscr{L}_2(1)=\frac{2}{3},$$

а коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид

$$p_1 = p_N = \frac{\big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\big)L}{2\big[\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)\big]};$$

$$p_k = \frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)}, \quad k=\overline{2,N-1};$$

$$s_k = \frac{\big[\sqrt{2}+2\sqrt{3}(k-1)\big]L}{2\big[\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)\big]}, \quad k=\overline{1,N}.$$

При этом минимальная погрешность наилучшей квадратурной формулы равна

$$\mathscr{E}_N(W_2^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{5/2}}{4\sqrt{5}\big[\sqrt{2}+\sqrt{3}(N-1)\big]^2}.$$

Следствие 2.1.3. *Пусть* $f\in W_\infty^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ *и* $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$. *Тогда* $q=1$ *и многочлен* p_{21} *есть многочлен Чебышёва второго рода*

$$U_2(t) = \frac{\sin(3\arccos t)}{4\sqrt{1-t^2}} := t^2-\frac{1}{4}, \quad p_{21}(1)=\frac{3}{4}.$$

В этом случае коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид

$$p_1 = p_N = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})L}{2\big(\sqrt{3}+2(N-1)\big)};$$

$$p_k = \frac{2L}{\sqrt{3}+2(N-1)}, \quad k=\overline{2,N-1};$$

$$s_k = \frac{\big[\sqrt{3}+4(k-1)L\big]}{2\big[\sqrt{3}+2(N-1)\big]}, \quad k=\overline{1,N}.$$

При этом погрешность наилучшей формулы на классах функций $W_\infty^{(2)}(\mathcal{K};Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathscr{E}_N(W_\infty^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^3}{8\big[\sqrt{3}+2(N-1)\big]^2}.$$

В завершении этого параграфа отметим, что приведённая выше схема доказательства теоремы 2.1.1 для классов функций $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ позволяет также решить аналогичную экстремальную задачу и для классов функций $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le\infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

За исключением нескольких технических моментов и простых вычислений доказательство повторяется буквально и мы здесь ограничиваемся лишь формулировкой результата.

Теорема 2.1.2. *Среди всех квадратурных формул вида (1.1.3) наилучшей для классов функций $W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le p\le 2$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ является формула, у которой коэффициенты и узлы имеют вид*

$$p_k=\frac{2L}{2N+\sqrt{p_{2q}(1)}},\quad k=\overline{1,N-1};$$

$$p_N=\frac{\big(2+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)L}{2N+\sqrt{p_{2q}(1)}};$$

$$s_k=\frac{2kL}{2N+\sqrt{p_{2q}(1)}},\quad k=\overline{1,N}.$$

При этом для точной оценки погрешности наилучшей формулы на указанных классах функций $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q),\ 1\le q\le\infty$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ справедливо равенство

$$\mathscr{E}_N(W_{0,p}^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L))=\frac{\mathcal{K}L^{2+1/q}p_{2q}(1)}{2\sqrt[q]{2q+1}\big(2N+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)^2}.$$

Из этой теоремы также вытекает ряд следствий.

Следствие 2.1.4. *Пусть $p=1$ $(q=\infty)$. Тогда коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид*

$$p_k=\frac{2\sqrt{2}L}{2\sqrt{2}N+1},\quad k=\overline{1,N-1};$$

$$p_N = \frac{(2\sqrt{2}+1)L}{2\sqrt{2}N+1};$$

$$s_k = \frac{2\sqrt{2}kL}{2\sqrt{2}N+1}, \quad k = \overline{1,N}.$$

При этом

$$\mathscr{E}_N(W^{(2)}_{0,\infty}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\sqrt{2}\,\mathcal{K}L^2}{\left(2\sqrt{2}N+1\right)^2}.$$

Следствие 2.1.5. *Пусть* $p = 2$ $(q = 2)$. *Тогда коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид*

$$p_k = \frac{2\sqrt{3}L}{2\sqrt{3}N+\sqrt{2}}, \quad k = \overline{1,N-1};$$

$$p_N = \frac{2\sqrt{3}L}{2\sqrt{3}N+\sqrt{2}};$$

$$s_k = \frac{2\sqrt{3}kL}{2\sqrt{3}N+\sqrt{2}}, \quad k = \overline{1,N}.$$

При этом

$$\mathscr{E}_N(W^{(2)}_{0,2}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{5/2}}{\sqrt{5}\left(2\sqrt{3}N+\sqrt{2}\right)^2}.$$

Следствие 2.1.6. *Пусть* $p = \infty$ $(q = 1)$. *Тогда коэффициенты и узлы наилучшей формулы имеют вид*

$$p_k = \frac{4L}{4N+\sqrt{3}}, \quad k = \overline{1,N-1};$$

$$p_N = \frac{(4+\sqrt{3})L}{4N+\sqrt{3}};$$

$$s_k = \frac{4kL}{4N+\sqrt{3}}, \quad k = \overline{1,N}.$$

При этом

$$\mathscr{E}_N(W^{(2)}_{0,\infty}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^3}{2\left(2N+\sqrt{3}\right)^2}.$$

§2.2. Оценки погрешности усложнённых квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}_{\nabla}H^{\omega}[0,L]$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$

Напомним правило построения усложнённых квадратурных формул для приближённого вычисления обычного интеграла

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \tag{2.2.1}$$

от произвольной интегрируемой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0,1]$. С целью приближённого вычисления интеграла (2.2.1) отрезок $[0,1]$ делят на n равных частей точками $x_k = k/n$ $(k=\overline{0,n})$ и на каждом из интервалов (x_{k-1},x_k) $(k=\overline{1,n})$ применяют заранее выбранную квадратурную формулу с узлами

$$x_{k-1} \leq t_1 < t_2 < \cdots t_m \leq x_k$$

и коэффициентами p_i $(i=\overline{1,m})$. В результате получим усложнённую квадратурную формулу

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} L(x_{k-1},x_k;f) + R_n(f) = L_n(f) + R_n(f), \tag{2.2.2}$$

где

$$L(x_{k-1},x_k;f) = \sum_{i=1}^{m} p_i f(t_i).$$

Многие известные квадратурные формулы имеют именно такое происхождение. Так, например:

а) усложнённая квадратурная формула прямоугольников имеет вид:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + R_{n,\Pi}(f);$$

б) усложнённая квадратурная формула трапеций имеет вид:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2n}\left\{f(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1)\right\} + R_{n,\text{Т}}(f);$$

в) усложнённая квадратурная формула Симпсона имеет вид:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6n}\left\{f(0) + 4\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1)\right\} + R_{n,\text{С}}(f).$$

Пусть теперь требуется приближённо вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds \tag{2.2.3}$$

в предположении, что кривая Γ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(s),\ y = y(s),\ 0 \le s \le L.$$

Построим аналоги усложнённых квадратурных формул прямоугольников, трапеций и Симпсона для приближённого вычисления интеграла (2.2.3). Для этого отрезок $[0, L]$ делим на N равных частей точками

$$s_k = kh,\ h = L/N,\ k = \overline{0, N}$$

и на каждом интервале (s_{k-1}, s_k) применяем заранее выбранную квадратурную формулу с узлами

$$s_{k-1} \le \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m \le s_k, \quad k = \overline{1, N}$$

и коэффициентами $q_i,\ i = \overline{1, m}$. В результате получим усложнённую квадратурную формулу

$$\int\limits_0^L f(x(s), y(s))ds = \sum_{k=1}^{N} L(s_{k-1}, s_k; f) + R_N(f, \Gamma), \tag{2.2.4}$$

где

$$L(s_{k-1}, s_k; f) = \sum_{k=1}^{m} q_i f(x(\xi_i), y(\xi_i)),$$

а $R_N(f, \Gamma)$ – погрешность формулы (2.2.4) на функцию $f(M)$, определённая в точках $M(x, y)$ на кривой Γ, длина которой равна L.

По аналогии с формулами а) – в) построим следующие усложнённые квадратурные формулы:

1) для прямоугольников

$$\int_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\right) + R_{N,\text{П}}(f, \Gamma); \quad (2.2.5)$$

2) для трапеций

$$\int_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{2N}\Bigg\{ f(x(0), y(0)) + f(x(L), y(L)) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_{N,\text{Т}}(f, \Gamma); \quad (2.2.6)$$

3) для Симпсона

$$\int_0^L f(x(s), y(s))ds = \frac{L}{6N}\Bigg\{ f(x(0), y(0)) + f(x(L), y(L)) +$$

$$+4\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right), y\left(\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_{N,\text{С}}(f, \Gamma). \quad (2.2.7)$$

Имеет место следующая

Теорема 2.2.1. *Для погрешности усложнённых квадратурных формул прямоугольников* (2.2.5), *трапеций* (2.2.6) *и Симпсона* (2.2.7) *на класса функций* $W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L]$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедливы оценки*

$$R_{N,\Pi}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt + \frac{\omega(1)}{32N^2}, \qquad (2.2.8)$$

$$R_{N,T}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt + \frac{3\omega(1)}{32N^2}, \qquad (2.2.9)$$

$$R_{N,C}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{36N}\int\limits_0^1 (2+t)\omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt. \qquad (2.2.10)$$

Доказательство. Все неравенства (2.2.8) – (2.2.10) доказываются по одной и той же схеме рассуждений с помощью представления погрешности формул (2.2.5) – (2.2.7), посредством формулы Тейлора с интегральным остатком. Две первые оценки (2.2.8) и (2.2.9) доказываются совсем просто, а потому мы приводим доказательство оценки (2.2.10).

Как и в предыдущих параграфах, введя операторное обозначение

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds},$$

для функции $f(x(s),y(s)) \in W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L]$ запишем

$$f(x(s),y(s)) = f(x(0),y(0)) + \int\limits_0^L \nabla f(x(t),y(t))(s-t)_+^0 dt, \qquad (2.2.11)$$

где $(s-t)_+^0 = \big[\max(0,s-t)\big]^0$.

Напомним, что $W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L]$ – класс функций $f(x(s),y(s))$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, для любых двух точек $s', s'' \in [0,L]$ удовлетворяющих неравенству

$$\Big|\nabla f(x(s),y(s))\big|_{s=s''} - \nabla f(x(s),y(s))\big|_{s=s'}\Big| \le \omega\big(|s''-s'|\big),$$

где $\omega(s)$ – заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная функция, удовлетворяющая соотношениям

$$0 \le \omega(t'') - \omega(t') \le \omega\big(|t'' - t'|\big), \quad 0 \le t' \le t'' \le L,\ \omega(0) = 0.$$

Используя формулу (2.2.11), например, остаток квадратурной формулы Симпсона (2.2.7) с учётом точности этой формулы на множестве линейных сплайнов, то есть при выполнении равенств (2.1.2), представим в виде

$$R_{N,\mathrm{C}}(f,\Gamma) = \int\limits_0^L \nabla f(x(t), y(t))\mathscr{K}_1(t)dt, \tag{2.2.12}$$

где

$$\mathscr{K}_1(s) = L - s - \frac{L}{6N}\Bigg\{4\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2k-1}{2N}L - s\right)_+^0 +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{kL}{N} - s\right)_+^0 + (L-s)\Bigg\}, \quad u_+^0 = \big[\max(0,u)\big]^0. \tag{2.2.13}$$

Полагая $F'(t) = \nabla f(x(t), y(t))$, равенство (2.2.13) с учётом (2.2.12) после простых вычислений запишем в виде

$$R_{N,\mathrm{C}}(f,\Gamma) = -\int\limits_0^L F'(t)\mathrm{g}(t)dt, \tag{2.2.14}$$

где

$$\mathrm{g}(t) = \begin{cases} t - (6k+1)h, & (6kh \le t < 3(2k+1)h), \\ t - (6k+5)h, & (3(2k+1)h \le t < 6(k+1)h),\ k = \overline{0, n-1},\ h = 1/(6N). \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убедимся, что

$$\mathrm{g}(3(2k+1)h - u) = -\mathrm{g}_1(3(2k+1)h + u), \quad (k = \overline{0, N-1},\ 0 \le u \le 3h), \tag{2.2.15}$$

$$\mathrm{g}\left(\frac{k}{n} + u\right) = \mathrm{g}(u) \quad (k = \overline{1, N-1},\ 0 \le u \le 1/N).$$

Положим

$$\delta_k := \Big[6kh, (6k+2)h\Big), \ \gamma_k := \Big[(6k+2)h, (6k+4)h\Big) \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Тогда, учитывая отмеченные выше свойства функции $\mathrm{g}(t)$, будем иметь

$$\Big|R_{N,\mathrm{C}}(f,\Gamma)\Big| \le 2N \left| \int\limits_{\delta_k} F'(t)\mathrm{g}(t)dt \right| + N \left| \int\limits_{\gamma_k} F'(t)\mathrm{g}(t)dt \right|. \qquad (2.2.16)$$

Полагая для $6kh \le t \le (6k+1)h, \ t = 2(6k+1)h - u$ и учитывая свойство (2.1.12), запишем

$$\int\limits_{\delta_k} F'(t)\mathrm{g}(t)dt = \int\limits_{6kh}^{(6k+1)h} F'(t)\mathrm{g}(t)dt + \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} F'(t)\mathrm{g}(t)dt =$$

$$= -\int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+1)h} F'(2(6k+1)h-u)\mathrm{g}(2(6k+1)h-u)du + \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} F'(t)\mathrm{g}(t)dt =$$

$$= \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} F'(2(6k+1)h-u)\mathrm{g}(2(6k+1)h-u)du + \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} F'(t)\mathrm{g}(t)dt =$$

$$= \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} F'(2(6k+1)h-t)\mathrm{g}(t)dt + \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} F'(t)\mathrm{g}(t)dt =$$

$$= \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} \mathrm{g}(t)\Big[F'(t) - F'(2(6k+1)h-t)\Big]dt. \qquad (2.2.17)$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (2.2.17), будем иметь

$$\left| \int\limits_{\delta_k} F'(t)\mathrm{g}(t)dt \right| \le \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} \Big|\mathrm{g}(t)\Big|\Big|F'(t) - F'(2(6k+1)h-t)\Big|dt \le$$

$$\leq \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} \mathrm{g}(t)\,\omega\big[2(t-(6k+1)h)\big]dt = \int\limits_0^h \mathrm{g}\big[(6k+1)h+t\big](t)\,\omega(2t)dt =$$

$$= \int\limits_0^h t\omega(2t)dt = h^2\int\limits_0^1 t\omega(2th)dt = \frac{1}{(6N)^2}\int\limits_0^1 t\omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt. \qquad (2.2.18)$$

Приступим теперь к оценке второго интеграла в неравенстве (2.2.16) по промежутку $\gamma_k := \big[(6k+2)h, (6k+4)h\big)$

$$\int\limits_{\gamma_k} \mathrm{g}(t)F'(t)dt = \int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h} \mathrm{g}(t)F'(t)dt + \int\limits_{(6k+3)h}^{(6k+4)h} \mathrm{g}(t)F'(t)dt. \qquad (2.2.19)$$

Но так как

$$\int\limits_{(6k+3)h}^{(6k+4)h} \mathrm{g}(t)F'(t)dt = \left| \begin{array}{ll} t = 2(6k+3)h-u, & dt=-du \\ t=(6k+3)h, & u=(6k+3)h, \\ t=(6k+4)h, & u=(6k+2)h \end{array} \right| =$$

$$= -\int\limits_{(6k+3)h}^{(6k+2)h} \mathrm{g}\big[2(6k+3)h-u\big]F'\big[2(6k+3)h-u\big]du =$$

$$= \int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h} \mathrm{g}\big[2(6k+3)h-u\big]F'\big[2(6k+3)h-u\big]du =$$

$$= \Big|\mathrm{g}\big[2(6k+3)h-u\big] = -\mathrm{g}\big[2(6k+3)h+u\big],\ (6k+2)h\leq u\leq (6k+3)h\Big| =$$

$$= -\int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h} \mathrm{g}\big[2(6k+3)h+u\big]F'\big[2(6k+3)h-u\big]du =$$

$$= -\int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h} \mathrm{g}(t)F'\big[2(6k+3)h-t\big]dt. \qquad (2.2.20)$$

то, из (2.2.19) и (2.2.20) имеем

$$\int\limits_{\gamma_k} \mathrm{g}(t)F'(t)dt = \int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h} \mathrm{g}(t)\Big[F^{'}(t) - F^{'}(2(6k+3)h - t)\Big]dt.$$

Оценивая полученное равенство по абсолютной величине, с учётом определения класса $W^{(1)}_{\nabla}H^{\omega}[0,L]$ получаем

$$\left|\int\limits_{\gamma_k} \mathrm{g}(t)F'(t)dt\right| \leq \int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h} \mathrm{g}(t)\omega\big[2(6k+3)h - t\big]dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{h} \omega(2t)(2h-t)dt = h^2\int\limits_{0}^{1} \omega(2th)(2-t)dt =$$

$$= \frac{1}{(6N)^2}\int\limits_{0}^{1} \omega\left(\frac{t}{3N}\right)(2-t)dt. \tag{2.2.21}$$

Подставляя оценки (2.2.18) и (2.2.21) в правую часть неравенства (2.2.16), будем иметь

$$\Big|R_{N,\mathrm{C}}(f,\Gamma)\Big| \leq 2N\left|\int\limits_{\delta_k} \mathrm{g}(t)F'(t)dt\right| + N\left|\int\limits_{\gamma_k} \mathrm{g}(t)F'(t)dt\right| \leq$$

$$\leq 2N\cdot\frac{1}{(6N)^2}\int\limits_{0}^{1} t\omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt + N\cdot\frac{1}{(6N)^2}\int\limits_{0}^{1}(2-t)\omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{36N}\int\limits_{0}^{1}(2+t)\omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1.

В заключении этого параграфа отметим, что оценки (2.2.8) – (2.2.10) справедливы при любом модуле непрерывности $\omega(t)$. Но, если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то, повторяя схему рассуждений, приведённую в статье С.А.Агаханова [1], можно получить следующие асимптотические точные оценки для класса функций $W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L]$ и класса кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$:

$$\frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt \le R_{N,\Pi}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt+\frac{\omega(1)}{32N^2},$$

$$\frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt \le R_{N,\mathrm{T}}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le \frac{1}{8N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{2N}\right)dt+\frac{3\omega(1)}{32N^2},$$

$$\frac{1}{18N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt \le R_{N,\mathrm{C}}\Big(W_{\nabla}^{(1)}H^{\omega}[0,L];\mathfrak{N}_Q(L)\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{18N}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{t}{3N}\right)dt + \frac{1}{72N}\,\omega\left(\frac{1}{3N}\right).$$

Список литературы

1. Агаханов С.А. О точности некоторых квадратурных и кубатурных формул // Сибир. матем. журнал. 1965. T.VI, №1. C.3-15.
2. Бусарова Т.Н., Борисенко А.А. Наилучшие квадратурные формулы с весом для класса функций ограниченной вариации // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Сборник научных трудов. Днепропетровский государственный университет. Днепропетровск. 1982. С.13-19.
3. Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. — Саратов: Из-во Саратовского университета. 1983. 210 с.
4. Вакарчук С.Б. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. 1986. Т.38, №5. С.643-645.
5. Гиршович Ю.М. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале // Изв. АН Эст.ССР, сер.физ.-мат.наук. 1975. Т.24, №1. С.121-123.
6. Кузмина А.Л. Об одной наилучшей квадратурной формуле для интегралов с ядрами Коши // Изв. вузов. Математика. 1980, №5. С.28-31.
7. Мирпоччоев Ф.М. О приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. 2012. Т.55, №5. С.359-365.
8. Мирпоччоев Ф.М. К вопросу об оценках квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности // ДАН РТ. 2012. Т.55, №6. С.448-454.
9. Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи мат. наук. 1950. Т.5, №2. С.165-177.
10. Никольский С.М. Квадратурные формулы // Изв. АН СССР. Серия матем. 1952. Т.6. С.181-196.

11. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука. 1988. 256 с.

12. Онегов Л.А. Некоторые квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Изв. вузов. Математика. 1978, №4(191). С.64-78.

13. Онегов Л.А. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью // Изв. вузов. Математика. 1981, №9. С.76-79.

14. Парвонаева З.А. Оптимизация весовых квадратурных формул для классов функций малой гладкости // ДАН РТ. 2008. Т.51, №2. С.87-96.

15. Sard A. Best approximation integration formulas, best approximate formulas // American J. of Math. 1949. LXXI. P.80-91.

16. Sard A., Meyers F. Best approximate integration formulas // J. Math. and Phys. 1950. XXIX. P.118-123.

17. Сангмамадов Д.С. Наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода // ДАН РТ. 2011. Т.54, №9. С.709-714.

18. Сангмамадов Д.С. К вопросу об оценках квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода некоторых классов функции // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. 2011, №3(144). С.7-13.

19. Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып.2. Ч.1. С.50-57.

20. Файзмамадова Л.Г. О численном интегрировании криволинейных интегралов первого рода // ДАН РТ. 2012. Т.55, №7. С.533-539.

21. Файзмамадова Л.Г. Об одной наилучшей квадратурной формуле для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. 2012. Т.55, №9. С.701-706.

22. Файзмамадова Л.Г. Об одной оптимальной квадратурной формуле для вычисления криволинейного интеграла первого рода // «*Современные проблемы математического анализа и теории функций*» – Материалы международной научной конференции, посвященной 60-летию академика АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозова (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.). С.165-167.

23. Файзмамадова Л.Г. Об оптимальных квадратурных формулах для приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. 2013. Т.56, №4. С.265-271.

24. Файзмамадова Л.Г. Наилучшая квадратурная формула для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (г. Худжанд, 28-29 июня 2014). С.93-95.

25. Файзмамадова Л.Г. Об одной оптимальной квадратурной формуле приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функции $W^{(1)}_{0,p}(K,Q)$ // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (г. Душанбе, 27-28 апреля 2015). С.49-51.

26. Файзмамадова Л.Г. Об одной наилучшей квадратурной формуле для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016). С.252-254.

27. Шабозов М.Ш. Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью // Укр. матем. журнал. 1995. Т.47, №9. С.1300-1305.

28. Шабозов М.Ш., Каландаршоев С.С. Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости // ДАН РТ. 1998. Т.41, №10. С.69-75.

29. Шабозов М.Ш., Сабоиев Р.С., Хамдамов Ш.Дж. Оптимизация некоторых весовых квадратурных формул в пространстве $L_1[a, b]$ // ДАН РТ. 2009. Т.52, №1. С.5-9.

30. Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. 2010. Т.53, №6. С.415-419.

31. Шабозов М.Ш., Сангмамадов Д.С. О наилучших квадратурных формулах приближённого вычисления криволинейных интегралов первого типа // ДАН РТ. 2012. Т.55, №11. С.847-852.

32. Шабозов М.Ш., Файзмамадова Л.Г. Наилучшая формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2012. №2(147). С.7-15

33. Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. 2014. Т.96, №7. С.637-640.

34. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. 2015. Сер.1. Т.2(60), Вып.4. С.72-85.

35. Юсупов Г.А., Шабозова А.А. Точные оценки приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. 2013. Т.56, №7. С.509-514.