О Т З Ы В

научного руководителя на диссертацию Файзмамадовой Лолазор Гадомамадовне „Оптимальные квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых", представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Задача отыскания оптимальных (наилучших) квадратурных формул в постановке С.М.Никольского для регулярных интегралов в смысле Римана хорошо известна по его монографии „Квадратурные формулы" – М., 1988, где изложены наиболее важные результаты, полученные в этой области. Представляет интерес найти оптимальные квадратурные формулы в смысле С.М.Николькского и А.Сарда для других типов интегралов. Так, оптимальные весовые квадратурные формулы, когда весовая функция на концах интегрирования имеет слабые особенности, найдены, например, в работах И.В.Бойкова, Л.А.Онегова, М.Ш.Шабозова. В качестве второго примера можно указать на исследования С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, Ф.М.Мирпоччоева и Д.С.Сангмамадова о нахождение оптимальных квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов. Эта теория находится на стадии разработки и является многообещающей. Отметим, что сформулированная задача нахождения оптимальных квадратурных формул на классах функций и кривых по сравнению с аналогичной задачей для регулярных интегралов является более сложной и даже отличается постановкой.

В диссертационной работе Л.Г.Файзмамадовой рассматривается экстремальная задача отыскания оптимальных (наилучших) квадратурных формул в смысле А.Сарда и С.М.Никольского для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и классах кривых. Во введении излагается история вопроса, постановка задач, а также формулируются основные результаты. Дадим краткую характеристику результатов по главам, придерживаясь обозначений, принятых в диссертационной работе.

В первом параграфе первой главы приведена постановка задач и определение классов функций $\{f(x(s), y(s))\}$, задаваемых и непрерывных на конкретных классах кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$, для которых решена задача отыскания наилучших квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов в смысле С.М.Никольского.

Одним из основных результатов первой главы является

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} A_k f(M_k) + R_N(f;\Gamma) \tag{1}$$

наилучшей для классов функций $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$ $(1 \le p \le \infty)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f(M_k^*) + R_N(f;\Gamma), \tag{2}$$

где $M_k^* := M\left(x\left(\frac{2kL}{2N+1}\right), y\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)$, $x = x(s)$, $y = y(s)$ *— параметрические уравнения кривой* Γ, L *— её длина. Для минимальной оценки погрешности формулы* (2) *на классах функций* $W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *имеет место точная оценка*

$$\mathscr{E}_N(W^{(1)}_{0,p}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{1+1/q}}{\sqrt[q]{q+1}(2N+1)},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1\le q\le\infty.$$

В этой же главе рассматривается задача нахождения оптимальных весовых квадратурных формул, когда полная вариация подынтегральной функции $\{f(x(s), y(s))\}$ на отрезке $[0, L]$ ограничена числом M. В частности, когда $q(x(s), y(s)) = s^\alpha$, $\alpha > -1$ наилучшая формула имеет вид

$$\int\limits_0^L s^\alpha f(x(s), y(s))ds =$$

$$= \frac{L^{\alpha+1}}{(\alpha+1)N}\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L\right), y\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} L\right)\right) + R_N(f;s^\alpha).$$

При этом для погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе $V(L,M)$ справедлива оценка

$$\mathscr{E}_N(V(L,M),\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{ML^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)N}.$$

Во второй главе диссертации, в частности, рассматривается задача отыскания наилучших квадратурных формул вида (1) для классов функций $\{f(x(s),y(s))\}$ с ограниченной в пространстве L_p $(1\le p\le\infty)$ нормой второго градиента

$$\left\|\nabla^2 f(x(\cdot),y(\cdot))\right\|_{L_p} \le \mathcal{K},\ 1\le p\le\infty$$

вдоль произвольной кривой $\Gamma\subset\mathfrak{N}_Q(L)$, длина которой равна L. Доказана

Теорема 2.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (1) *наилучшей для класса функций* $W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q)$, $1\le p\le\infty$ *и класса кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является квадратурная формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=1}^{N} A_k^* f(M_k^*) + R_N(f;\Gamma), \tag{3}$$

где $A_k^* = p_k^* L$, $M_k^* := M\big(x(\sigma_k^* L), y(\sigma_k^* L)\big)$, $x=x(s)$, $y=y(s)$ — *параметрические уравнения кривой* Γ, L — *её длина, коэффициенты* p_k^* *и узлы* σ_k^* *определены равенствами*

$$p_1^* = p_N^* = \frac{1+\sqrt{p_{2q}(1)}}{2\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)};\quad p_k^* = \frac{1}{N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}},\quad k=\overline{1,N-1},$$

$$\sigma_k^* = \frac{2(k-1)+\sqrt{p_{2q}}}{2\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)},\quad k=\overline{1,N}.$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (3) *при* $q\in[1,\infty]$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ *на указанных классах функций и кривых справедлива точная оценка*

$$\mathscr{E}_N(W_p^{(2)}(\mathcal{K};Q);\mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K}L^{2+1/q}p_{2q}(1)}{8\sqrt[q]{2q+1}\big(N-1+\sqrt{p_{2q}(1)}\big)}.$$

В последнем параграфе второй главы рассматривается задача нахождение оптимальных по порядку квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов для усложненных квадратурных формул, подобных формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Результаты диссертационной работы являются новыми и получены диссертантом самостоятельно. Оценивая в целом результаты работы Л.Г.Файзмамадовой, следует отметить, что они вносят серьёзный вклад в теорию оптимальных квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода.

Считаю, что диссертация Л.Г.Файзмамадовой „Оптимальные квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Российской Федерации к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель
академик АН Республики Таджикистан,
доктор физико-математических наук,
профессор
(специальность 01.01.01 — Вещественный,
комплексный и функциональный анализ)

Шабозов
Мирганд Шабозович

Место работы: 734063, г.Душанбе, ул. Айни, 299/4,
Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан.
Тел.: (+992) 93-500-86-52.
e-mail: shabozov@mail.ru

17.03.2017

Подпись М.Ш. Шабозова подтверждаю.
Ученый секретарь Института математики
им. А.Джураева АН Республики Таджикистан,
кандидат физ.-мат. наук, доцент И. Шокамолов