На правах рукописи

Хоразмшоев Саидджобир Саиднасиллоевич

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ И ЗНАЧЕНИИ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е — 2 0 1 7

Работа выполнена в Таджикском техническом университете имени академика М.С.Осими

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:	доктор физико-математических наук, доцент, Азизов Музафар
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	**Алимов Алексей Ростиславович,** доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВПО Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, ведущий научный сотрудник;
	Саидусайнов Муким Саидусайнович, кандидат физико-математических наук, Таджикский национальный университет, доцент кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений
ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова

Защита состоится *«30» июня 2017 г.* в 8^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул.Айни, 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан "___" ____________ 2017 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02 **Ш.А.Хайруллоев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория приближения функций является одним из наиболее успешно развивающихся направлений современной математики, имеющим важное приложение в прикладных задачах вариационного содержания. При этом в качестве средства приближения используются алгебраические и тригонометрические полиномы, целые функции, сплайны, вейвлет-функции, конечные элементы и т.д.

В последнее время при решении задач наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 часто используют различные модификации классического модуля непрерывности. Так, например, различные обобщенные модули непрерывности рассматривались в работах Б.Сендова и В.Попова[1], В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой[2], К.В.Руновского[3], В.И.Иванова и О.И.Смирнова[4], А.Г.Бабенко, Н.И.Черных и В.Т.Шевальдина[5], С.Н.Васильева[6], С.Б.Вакарчука[7], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[8] и многих других.

Среди экстремальных задач теории приближения функций наиболее важной является задача отыскания точных констант в неравенстве типа Джексона-Стечкина. Под неравенствами Джексона–Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается через модуль непрерывности самой функции или некоторой её производной. В этом направлении важные результаты получены в работах Н.П.Корнейчука[8], Н.И.Черных[9] В.И.Бердышева[10],

[1]Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости – М.: Мир. 1988.

[2]Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. 2004. Т.76, №6. С.803-811.

[3]Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. 1994. Т.185, №8. С.81-102.

[4]Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p – Тула: ТулГУ. 1995. 192 с.

[5]Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевальдин В.Т. Неравенства Джексона—Стечкина в L^2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Матем. заметки. 1999. Т.66, №6. С.816-820.

[6]Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т.385, №1. С.11-14.

[7]Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

[8]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенстве типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибирский матем. журн. 2011. Т.52, №6. С.936-948.

[8]Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. 1982, Т.32, №3. С.669-674.

[9]Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

[10]Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.3-16.

В.В.Жука[11], Л.В.Тайкова[12], А.А.Лигуна[13], А.Г.Бабенко[14], С.Б.Вакарчука[15], М.Ш.Шабозова[16] и других математиков. Данная работа развивает исследования указанных авторов в этом направлении.

Цель работы

1. Получить точные неравенства типа Джексона–Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами и интегралами, содержащими усреднённым с весом обобщенными модулями непрерывности.

2. Вычислить точные значения различных поперечников классов функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности высших порядков

Методы исследования. Применяются методы решения экстремальных задач, теории функций и функционального анализа.

Научная новизна исследований

- Найдены новые точные неравенства типа Джексона–Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами с интегралами, содержащими усредненным с положительным весом обобщенными модулями непрерывности.

- Вычислены точные значения различных n-поперечников для классов функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности высших порядков r-тых производных функций.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории приближений при исследовании экстремальных задач для отыскании точных констант в других функциональных пространствах, например в пространстве $L_p, 1 \leq p \leq \infty$.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на семинарах отдела теории функций Института математики АН Республи-

[11] Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. 1967. Т.201. С.263-266.

[12] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

[13] Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1988. Т.43, №6. С.757-769.

[14] Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т.39, №5. С.651-664.

[15] Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-18.

[16] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

ки Таджикистан (Душанбе, 2009-2015 гг.), на семинарах кафедры высшей математики Таджикского технического университета им. акад. М. Осими (Душанбе, 2010-2015 гг.), на международной конференции «Сингулярные дифференциальные уравнения и сингулярный анализ», посвящённой 80-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 2008 г.), на международной конференции «Современные проблемы математического анализа и их приложений» (Душанбе, 23-24 июня 2010 г.), на международной конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (28-29 июня 2011 г.), на международной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций» (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.), на международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений» (Душанбе 17-18 июля 2013 г.), на международной научной конференции «Современные проблемы математики и её преподавания» (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), на международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.), на международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, список которых приведён в конце автореферата, из них 3 – в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы из 65 наименований и занимает 76 страниц машинописного текста, набранного на LaTeXе. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации

Во введении приведен краткий обзор работ, имеющих прямое отношение к теме диссертационной работы, дается краткая историческая характеристика изучаемой проблемы.

В первом параграфе первой главы приведены основные понятия и определения, которые используются в дальнейшем.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$

– множество положительных чисел. Рассмотрим пространство $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ 2π-периодических суммируемых с квадратом в смысле Лебега действительных функций f с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{(r)}(r \in \mathbb{Z}_+;\ L_2^{(0)} \equiv L_2)$ обозначим множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$, а через $\mathcal{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$ (размерности $\leq 2n-1$). Символом

$$E_n(f) := \inf\left\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\}$$

обозначим наилучшее приближение функции f элементами подпространства $\mathcal{T}_{2n-1}$. Равенством

$$\omega_m(f,t) = \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+(m-k)h)\right\| : |h| \leq t\right\} \qquad (1)$$

определим модуль непрерывности порядка m функции $f \in L_2$.

При решении экстремальных задач аппроксимации функций действительного переменного часто вместо классического модуля непрерывности (1) используют различные ее модификации. Во многих случаях это продиктовано специфическими условиями рассматриваемых задач и позволяет получать результаты, раскрывающие содержательную сущность исследуемых проблем. Такие модификации были использованы М.К.Потаповым[17] и его учениками, В.И.Ивановым[18] и его учениками, В.А.Абиловым и Ф.В.Абиловой[2], С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной[19], М.Ш.Шабозовым и Г.А.Юсуповым[7], использовавшими вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ различные усредняющие операторы.

В данной диссертационной работе при решении некоторых экстремальных задач теории приближения в L_2 вместо обычного модуля непрерывности

[17]Потапов М.К. О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений // Вест. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. мех. 1998, №3. С.38-48.

[18]Иванов А.В., Иванов В.И. Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(R^d)$ со степенным весом // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т.16, №4. С.180-192.

[19]Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т.92, №4. С.497-514.

(1) для оценки наилучшего приближения 2π-периодических функций используем так называемый обобщенный модуль непрерывности следующего вида

$$\Omega_m(f,t)_p = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta^m_{\overline{h}} f(\cdot)\|^p_{L_2} dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/p}, \ 1 \le p \le \infty, \qquad (2)$$

где $t > 0$; $\overline{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_m)$, $\Delta^m_{\overline{h}} = \Delta^1_{h_1} \circ \cdots \circ \Delta^1_{h_m}$. Подобная усредненная характеристика гладкости функции в ходе исследования важных вопросов конструктивной теории функций в метрическом пространстве L_p $(0 < p < 1)$ рассматривалась К.В.Руновским[20] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым и П.Освальдом[21], где также доказано, что $\Omega_m(f,t)_p \asymp \omega_m(f,t)_p$, $0 < p < 1$, а при $1 \le p \le \infty$ указанное соотношение слабой эквивалентности доказано С.Б.Вакарчуком и А.Н.Щитовым[22].

Во втором параграфе первой главы вводится в рассмотрение следующая аппроксимационная экстремальная характеристика

$$M_{m,n,r}(h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} n^r E_n(f)}{\left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t \Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) dt \right)^{m/2}}, \qquad (3)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h > 0$ – произвольное число. Весовая функция $\varphi(t) = t$ с необходимостью появляется при оценке наилучшего приближения через усредненное значение гладкости характеристики (2) функции $f \in L_2^{(r)}$. Основным результатом второго параграфа первой главы является следующая

Теорема 1.2.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$ и $h > 0$ – произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < h \le \pi/n$. Тогда*

$$M_{m,n,r}(h) = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующее

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 справедливы соотношения*

$$M_{m,n,r}(\pi/n) = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \right)^{m/2},$$

---

[20] Руновский К.В. Прямая теорема о приближении "углом"в пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Матем. заметки, 1992. Т.52, №5. С.93-96

[21] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. 1975. Т.98(140), №3(11). С.395-415.

[22] Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций в пространствах s^p, $1 \le p < \infty$ // УМЖ. 2006. Т.58, №3. С.303-316.

$$\frac{1}{2^{m/2}} \le \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}} \frac{n^r\cdot E_n(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)},\pi/n\right)} \le \frac{1}{2^{m/2}}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^{m/2}.$$

В третьем параграфе рассматривается следующая более общая аппроксимационная характеристика

$$\mathcal{X}_{m,n,r,p}(h) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}} \frac{2^{m/2}n^r E_n(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)dt\right)^{1/p}}, \tag{4}$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p>0$ и $h>0$ – произвольное число. Заметим, что аппроксимационная характеристика (4) при $p=2/m$ содержит (3).

Всюду далее полагаем $\operatorname{sinc} t := \dfrac{\sin t}{t}$. Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $2/r<p<2(r\ge 2)$ и h – произвольное число, удовлетворяющее условию $0<h\le\pi/n$. Тогда имеют место равенства*

$$\mathcal{X}_{m,n,r,p}(h) = \left\{\frac{2}{h^2}\int_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}. \tag{5}$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает следующее

Следствие 1.3.1. *В утверждение теоремы 1.3.1 при $p=2/m$, $m\in\mathbb{N}$ $0<h\le\pi/n$ справедливы равенства*

$$\mathcal{X}_{m,n,r,2/m}(h) = \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2} := M_{m,n.r}(h).$$

В четвертом параграфе первой главы дано обобщение хорошо известного неравенства Н.И.Черных[23]. Имеет место следующая

Теорема 1.4.1. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $0\le h\le\pi/n$, $0<\nu\le rp-1$, $1/r<p\le 2$ и $\varphi_n(t)=\sin\dfrac{n}{2}t+\dfrac{1}{2}\sin nt$. Тогда для любого $\nu\in\mathbb{N}$ справедливо*

[23]Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т.2, №5. С.513-522.

равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m+1/p}\cdot n^{r-1/p}\cdot E_n(f)}{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^{\nu}\,dt\right\}^{1/p}}=$$

$$=\left\{\int\limits_0^{nh/2}\sin^{mp+\nu}t(1+\cos t)^{\nu}dt\right\}^{-1/p}.$$

Из этой теоремы при $m=1,\ p=2,\ \nu=1$ в качестве следствия получаем результат Х.Юссефа[24], а при $p=2,\ m\in\mathbb{N},\ \nu=0,\ h=\pi/n$ результат Л.В.Тайкова[25], при $1/r<p\le 2,\ r\in\mathbb{N},\ \ \nu=0,\ 0<h\le\pi/n$ – результат М.Ш.Шабозова[16]. Отметим также, что впервые теорема 1.4.1 при $p=2$, $r,m\in\mathbb{N},\ \nu=1,\ h=\pi/n$ была доказана Н.И.Черных[23].

Вторая глава состоит из четырех параграфов, и в ней рассматривается задача определения точных значений различных n-поперечников классов 2π-периодических действительных функций, принадлежащих пространству L_2.

Прежде чем сформулировать основные результаты второй главы, напомним необходимые обозначения и определения, приведенные в первом параграфе второй главы. Пусть X – произвольное банахово пространство; S – единичный шар в нем; $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное множество в X; $L_n\subset X$—n – мерное линейное подпространство; $L^n\subset X$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}(X,L_n)$ – множество всех линейных ограниченных операторов, отображающих X в L_n; $\mathcal{L}^{\perp}(X,L_n)$ – подмножество проекторов в $\mathcal{L}(X,L_n)$. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M}\subset X$ фиксированным подпространством $L_n\subset X$ определяется соотношением

$$E_n(\mathfrak{M})_X=E(\mathfrak{M},L_n)_X\overset{def}{=}\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_X: g\in\Lambda_n\right\}: f\in\mathfrak{M}\right\}. \qquad (6)$$

Величина

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X=\mathcal{E}(\mathfrak{M},\Lambda_n)_X\overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=}\inf\{\sup\{\|f-A(f)\|_X: f\in\mathfrak{M}\}: A\subset\mathcal{L}(X,\Lambda_n)\} \qquad (7)$$

[24]Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближении: Сб. научн. тр. – Калинин. 1998. С.100-114.

[25]Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т.25, №2. С.217-223.

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $\Lambda_n \subset X$.

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X = \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X = \\ = \inf\{\sup\{\|f - \Lambda f\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : \Lambda \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, \Lambda_n)\} \tag{8}$$

– наилучшее приближение множества $\mathfrak{M} \subset X$ проекторами в пространстве X. Очевидно, что для величин (6) – (8), согласно определению, выполняется соотношение

$$E_n(\mathfrak{M})_X \leq \mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X \leq \mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X. \tag{9}$$

Величины (см., например, В.М.Тихомиров[26], A.Pinkus[27])

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : L_{n+1} \subset X\}, \tag{10}$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} : L^n \subset X\}, \tag{11}$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \overset{def}{=} \inf\{E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X : \Lambda_n \subset X\}, \tag{12}$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X : \Lambda_n \subset X\}, \tag{13}$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, \Lambda_n) : \Lambda_n \subset X\} \tag{14}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками. Между величинами (10) – (14) выполняются неравенства

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq \begin{array}{c} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{array} \leq \delta_n(\mathfrak{M}, X) \leq \pi(\mathfrak{M}, X)$$

и, если X – гильбертово пространство, то

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d^n(\mathfrak{M}, X) \leq d_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X) = \pi_n(\mathfrak{M}, X).$$

Введем классы функций, которые естественным образом появляются из результатов о наилучшем приближении 2π-периодических функций в параграфах 1.2 – 1.4 первой главы. Пусть $\Phi(t), t \geq 0$ – произвольная возрастающая непрерывная функция, такая, что $\Phi(0) = 0$.

Через $W_{m,p}^{(r)}(h), \quad m \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \ 0 < p \leq 2$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t\, \Omega_m^p \left(f^{(r)}, t\right) dt \leq 1,$$

[26]Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. 1976. 304 с.

[27]Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. 1985. 291 p.

а через $W_{m,p}^{(r)}(\Phi) := W_{m,p}^{(r)}(\Phi, h)$, $m, r \in \mathbb{N}$, $2/r < p \leq 2$ – обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)dt \leq \Phi^p(h).$$

Через $\mathcal{F}_{m,p,\nu}^{(r)}(h)$ – обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, которые для любых $\nu, m, n \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$ и произвольного h $(0 < h \leq \pi/n]$ удовлетворяют ограничению

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)(\varphi_n(t))^\nu dt \leq 1, \quad \varphi_n(t) = \sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt,$$

а через $\mathcal{F}_{m,p,\nu}^{(r)}(\Phi) = \mathcal{F}_{m,p,\nu}^{(r)}(h, \Phi)$ обозначим аналогичный класс функций $f \in L_2^{(r)}$, которые для тех же значений указанных параметров удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)(\varphi_n(t))^\nu dt \leq \Phi^p(h).$$

Отметим, что эти классы являются обобщением классов, рассмотренных М.Ш.Шабозовым[16], и превращаются в них при $\nu = 0$. Во втором параграфе второй главы вычислены значения n-поперечников 2π-периодических функций, принадлежащих классу $W_m^{(r)}(h)$ и $W_m^{(r)}(\Phi)$.

Через t_* обозначим величину аргумента $x \in (0, \infty)$ функции $\operatorname{sinc} x$, при которой она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $x = \operatorname{tg} x$ $(4,49 < t_* < 4,51)$. При этом полагаем

$$(1 - \operatorname{sinc} x)_* := \left\{1 - \operatorname{sinc} x, \text{ если } 0 < x \leq t_*;\ 1 - \operatorname{sinc} t_*, \text{ если } x \geq t_*\right\}.$$

Основными результатами второго параграфа являются следующие утверждения:

Теорема 2.2.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $h > 0$ и выполнено условие $nh \leq t_*$. Тогда имеют место равенства*

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h), L_2\right) = p_{2n}\left(W_m^{(r)}(h), L_2\right) =$$

$$= E_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2},$$

где $p_k(\cdot)$ – любой из поперечников: бернштейновский $b_k(\cdot)$, колмогоровский $d_k(\cdot)$, гельфандовский $d^k(\cdot)$, линейный $\delta_k(\cdot)$, проекционный $\pi_k(\cdot)$.

Непрерывную возрастающую на полусегменте $[0, \infty)$ функцию Φ такую, что $\Phi(0) = 0$, будем называть мажорантой.

Теорема 2.2.2. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \frac{2}{(nt)^2} \int_0^{nt} \tau \left(1 - \operatorname{sinc} \tau\right)_* d\tau, \tag{15}$$

то для любых $m, n, r \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\right) = p_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\right) = E_n\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{m/2},$$

где $p_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$ или $\pi_k(\cdot)$. Множество мажорант $\{\Phi(t)\}$, удовлетворяющих условию (15), не пусто. Эту условию удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(t) = t^{\alpha}$, где $\alpha = \dfrac{8}{\pi^2 - 4}$ $(1,31 < \alpha < 1,45)$.

Следствие 2.2.2. *В условиях теоремы 2.2.2 справедливы равенства*

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi_*), L_2\right) = p_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi_*), L_2\right) = E_n\left(W_m^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2} \pi^{m + 8/(\pi^2 - 4)} (\pi^2 - 4)^{-m/2} n^{-r - 8/(\pi^2 - 4)},$$

где $p_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников, перечисленных выше.

Следствие 2.2.3. *Если выполнены условия теоремы 2.2.2, то имеют место следующие равенства*

$$\sup\left\{ |a_n(f)| : \ f \in W_m^{(r)}(\Phi) \right\} =$$

$$= \sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W_m^{(r)}(\Phi)\right\} = 2^{-m/2}n^r\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}.$$

Третий параграф второй главы посвящен вычислению точных значений n-поперечников 2π-периодических функций, принадлежащих классу $W_{m,p}^{(r)}(h)$ и $W_{m,p}^{(r)}(\Phi,h)$, где $m,r\in\mathbb{N}$, $0<p\leq 2$, $h\in\mathbb{R}_+$. Следующие утверждения являются основными результата третьего параграфа.

Теорема 2.3.1 *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq 2$ *и* $nh\leq t_*$. *Тогда справедливы равенства*

$$p_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(h),L_2\right) = p_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(h),L_2\right) = E_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2-1/p}n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p},$$

где $p_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$ *или* $\pi_k(\cdot)$.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $m,n,r\in\mathbb{N}$; $0<p\leq 2$. *Если для любых* $t\in\mathbb{R}_+$ *мажоранта* $\Phi(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p(\pi/n)}\geq$$

$$\geq\left(\frac{\pi}{nt}\right)^2\int_0^{nt}\tau\,(1-\operatorname{sinc}\tau)_*^{mp/2}\,d\tau\left\{\int_0^{\pi}\tau\,(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp/2}\,d\tau\right\}^{-1}, \qquad (16)$$

то при любых $n\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$p_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right) = p_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right) = E_n\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_n\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)}\,n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $p_k(\cdot)$*–любой из* k*-поперечников: бернштейновский* $b_k(\cdot)$, *колмогоровский* $d_k(\cdot)$, *гельфандовский* $d^k(\cdot)$, *линейный* $\delta_k(\cdot)$, *проекционный* $\pi_k(\cdot)$. *При этом* *множество мажорант, удовлетворяющих условию (16), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, функция* $\Phi_{**}(t) = t^{\alpha/p}$, *где*

$$\alpha = \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt} - 2.$$

В теории приближений хорошо известно, что впервые Лебегом[29] в терминах модуля непрерывности $\omega(t)$ для функций $f \in C[0, 2\pi]$ были получены оценки коэффициентов Фурье. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций рассматривались в работах многих математиков. Для изучаемых нами классов функций также вычислены точные верхние грани коэффициентов Фурье $a_n(f)$ и $b_n(f)$. Из теоремы 2.3.1 и 2.3.2 вытекает

Следствие 2.3.2. *Справедливы равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| :\ f \in W_{m,p}^{(r)}(h)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| :\ f \in W_{m,p}^{(r)}(h)\right\} =$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)}\,n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p};$$

$$\sup\left\{|a_n(f)| :\ f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| :\ f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)}\,n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

В заключительном четвертом параграфе второй главы вычислены точные значения n-поперечников классов периодических функций $\mathcal{F}_{m,p,\nu}^{(r)}(h)$ и $\mathcal{F}_{m,p,\nu}^{(r)}(h,\Phi)$, где $\nu, m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2 (r \ge 1)$ и $0 < h \le \pi/n$. Положим

$$(\sin u)_*^m = \{\sin^m u,\ 0 \le u \le \pi/2;\ 1,\ \text{если}\ \ u \ge \pi/2\}.$$

Одним из основных утверждений четвертого параграфа является следующая

Теорема 2.4.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, *и число* $h > 0$ *удовлетворяет условию* $0 < nh \le \pi$. *Тогда справедливы равенства*

$$\rho_{2n-1}\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right) = \rho_{2n}\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right) =$$

[29] Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. S. V. F. 1910. V.38. P.184-210.

$$= E_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}^{\perp}_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt\right)^{-1/p} =$$

$$= 2^{-(m+1/p)}n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{nh/2}(\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}\,dt\right)^{-1/p},$$

где $\rho_k(\cdot)$ *– любой из* k*–поперечников Бернштейна* $b_k(\cdot)$, *Гельфанда* $d^k(\cdot)$, *Колмогорова* $d_k(\cdot)$, *линейного* $\delta_k(\cdot)$ *и проекционного* $\pi_k(\cdot)$.

Из теоремы 2.4.1 вытекает следующее

Следствие 2.4.1. *При выполнении условий теоремы 2.4.1 для любого* $n,\nu\in\mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\, f\in\mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)|:\, f\in\mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h)\right\} =$$

$$= 2^{-(m+1/p)}n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{nh/2}(\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}\,dt\right)^{-1/p}.$$

Наиболее существенным результатом четвертого параграфа является

Теорема 2.4.2. *Пусть* $1/r<p\le 2$, $r\in\mathbb{N}$ *и мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \mathcal{J}^{-1}_{m,n,p,\nu}\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{cases}\mathcal{J}_{m,n,p,\nu}(h), & \text{если }\ 0<h\le\pi/n\\ \mathcal{J}_{m,n,p,\nu}(\pi/n)+\dfrac{2}{n}\displaystyle\int\limits_{\pi}^{nh/2}\sin^{\nu}t\,(1+\cos t)^{\nu}\,dt, & \text{если }\ h\ge\pi/n,\end{cases}\tag{17}$$

где

$$\mathcal{J}_{m,n,p,\nu}(h) = \frac{2}{n}\int\limits_0^{nh/2}(\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}\,dt.$$

Тогда для любых чисел $m,n,r\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\rho_{2n-1}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi),L_2\right) = \rho_{2n}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi),L_2\right) =$$

$$= E_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}^{\perp}_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})}n^{-r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Условию (17) удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(h) = h^{\alpha}$, где

$$\alpha = \frac{\pi}{2p}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}dt\right)^{-1},$$

$$\Big((2^{\nu}p)^{-1} \le \alpha \le m + (\nu+1)p^{-1}\Big).$$

Заметим, что теорема 2.4.2 в качестве следствия при $p = 2$, $\nu = 0$, $m \in \mathbb{N}$ содержит результат Л.В.Тайкова[26], а при $1/r < p \le 2$, $\nu = 0$, $m \in \mathbb{N}$ результат М.Ш.Шабозова[16].

СПИСОК РАБОТ АВТОРА, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях, входящих в перечень ВАК Российской Федерации:

1. Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближение периодических функций и значение поперечников множеств в L_2 / Хоразмшоев С.С // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №2. – С.90-95.
2. Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближении периодических функций и значении поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 / Хоразмшоев С.С // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №4. – С.270-278.
3. Хоразмшоев С.С. Точное неравенство Джексона-Стечкина и значения поперечников классов функций в L_2 / Хоразмшоев С.С // ДАН РТ. – 2015. – Т.58. – №4. – С.279-284.

В других изданиях:

4. Хоразмшоев С.С. Наилучшее приближение периодических функций и значение поперечников классов функций в L_2 / Хоразмшоев С.С // Материалы Республиканской научной конференции «Задачи математического анализа, теории функций, дифференциального уравнения и её приложения», посвящённой 80-летию Душанбинского Педагогического Университета. Душанбе – 2011. – С.100-103.

5. Хоразмшоев С.С. О значении поперечников классов периодических функций в пространстве L_2 // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций» (Таджикистан, Душанбе, 29-30 июня 2012). – С.182-184.

6. Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближении периодических функций в пространстве L_2 / Хоразмшоев С.С // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений» (Таджикистан, Душанбе, 17-18 июля 2013). – С.145-147.

7. Хоразмшоев С.С. Аппроксимация периодических функций и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 / Хоразмшоев С.С // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и ее преподавания», посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Таджикистан, Худжанд, 28-29 июня 2014). – С.104-106.

8. Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближении периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ / Хоразмшоев С.С // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Таджикистан, Душанбе, 27-28 апреля 2015). – С.56-57.

9. Хоразмшоев С.С. О значении поперечников классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 / Хоразмшоев С.С // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г.). – С.191-194.