Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский технический университет им. М.Осими

На правах рукописи

Хоразмшоев Саидджобир Саиднасиллоевич

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ И ЗНАЧЕНИИ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент М.Азизов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 7

О Г Л А В Л Е Н И Е

В в е д е н и е 3

Глава I. Наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций в метрике пространства L_2 . . . 18

§1.1. Необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Общие факты 19

§1.2. Об одной экстремальной аппроксимационной характеристике . 22

§1.3. Обобщение предыдущих результатов 27

§1.4. Об обобщении некоторых результатов Н.И.Черных 32

Глава II. Поперечники классов функций в метрике пространства L_2 38

§2.1. Определение поперечников и классов функций 38

§2.2. Значение поперечников классов $W_m^{(r)}(h)$ и $W_m^{(r)}(\Phi)$ в пространстве L_2 43

§2.3. Точные значения n-поперечников классов функций $W_{m,p}^{(r)}(\Phi, h)$ 53

§2.4. Точные значения n-поперечников классов функций $\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h)$ и $\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$ 63

Заключение 70

Список литературы 71

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория приближения функций является одним из наиболее успешно развивающихся направлений современной математики, имеющим важное приложение в прикладных задачах вариационного содержания. При этом в качестве средства приближения используются алгебраические и тригонометрические полиномы, целые функции, сплайны, вейвлет-функции, конечные элементы и т.д.

В последнее время при решении задач наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 часто используют различные модификации классического модуля непрерывности. Во многих случаях это обусловлено специфическими условиями рассматриваемых задач, которого позволяют получать результаты, раскрывающие содержательную сущность исследуемых проблем. Так, например, различные обобщенные модули непрерывности рассматривались в работах Б.Сендова и В.Попова [35], В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [1], К.В.Руновского [32], В.И.Иванова и О.И.Смирнова [20], А.Г.Бабенко, Н.И.Черных, В.Т.Шевалдина [6], С.Н.Васильева [17], С.Б.Вакарчука [13], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [60] и многих других.

Экстремальные задачи теории приближений (точная константа в неравенствах типа Джексона в различных нормированных пространствах) привлекли внимание многих математиков. В этом направлении важные результаты получены в работах Н.П.Корнейчука [25], Н.И.Черных [54], В.И.Бердышева [7], В.В.Жука [19], А.А.Лигуна [29], А.Г.Бабенко [5], С.Б.Вакарчука [12], М.Ш.Шабозова [57] и других математиков. Данная работа развивает исследование указанных авторов в этом направлении.

Цель работы

Цель работы состоит в получение точные неравенства типа Джексона

– Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами и интегралами, содержащими усреднённым с весом обобщенными модулями непрерывности, а также вычисления точных значений различных поперечников классов функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности высших порядков

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Найдены новые точные неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами с интегралами, содержащими усредненным с положительным весом обобщенными модулями непрерывности.
- Вычислены точные значения различных n-поперечников для классов функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности высших порядков r-тых производных функций.

Основные методы исследования

В диссертации используются современные методы теории приближения оптимизационного содержания и методы решения экстремальных задач теории функций и функционального анализа.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в теории приближений при исследовании экстремальных задач для отыскании точных констант в других функциональных пространствах, например в пространстве $L_p, 1 \leq p \leq \infty$.

Апробация работы

Основные результаты диссертации обсуждались на семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан (Душанбе, 2009-2016 гг.), на семинарах кафедры высшей математики Таджикского технического университета им. академика М.Осими (Душанбе, 2010-2016 гг.), на международной конференции «Сингулярные дифференциальные уравнения и сингулярный анализ», посвященной 80-летию академика АН Республики Таджикистан Л.Г.Михайлова (Душанбе, 2008 г.), на международной конференции «Современные проблемы математического анализа и их приложений» (Душанбе, 23-24 июня 2010 г.), на международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (28-29 июня 2011 г.), на международной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций» (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.), на международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений» (Душанбе 17-18 июля 2013 г.), на международной научной конференции «Современные проблемы математики и её преподавания» (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), на международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.), на международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах [44–52]. Из них 3 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 6 статьи в трудах международных конференций. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы из 65 наименований и занимает 78 страниц машинописного текста, набранного на LaTeXе. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Приводим краткое содержание диссертации с указанием основных результатов. Во введении приводится краткая характеристика изучаемой проблемы и основные результаты работы.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – множество положительных чисел. Рассмотрим пространство $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ 2π-периодических суммируемых с квадратом в смысле Лебега действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{(r)}(r \in \mathbb{N})$ обозначим множество 2π-периодических функций $f(x) \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}(x) \in L_2$. Через $\mathcal{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$ (размерности $\leq 2n-1$):

$$\mathcal{T}_{2n-1} := \left\{T_{n-1}(x) : \, T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right\}.$$

Величину

$$E_n(f) := \inf \{\|f - T_{n-1}\| : \, T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\}$$

назовем наилучшим приближением функции $f(x)$ подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Равенством

$$\omega_m(f, t) = \sup \{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |h| \leq t\} =$$

$$= \sup \left\{\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(x + (m-k)h)\right\| : |h| \leq t\right\}$$

определим модуль непрерывности порядка m функции $f \in L_2$.

При решении некоторых экстремальных задач теории приближения в L_2 вместо обычного модуля непрерывности $\omega_m(f, t)$ для оценки наилучшего приближения 2π-периодических функций иногда используют так называемую обобщенную модуль непрерывности

$$\Omega_m(f,t)_p = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|_{L_2}^p dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/p},$$

где $t > 0$; $\overline{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$. Подобная усредненная характеристика гладкости функции в ходе исследования важных вопросов конструктивной теории функций в метрическом пространстве $L_p(0 < p < 1)$ рассматривалась К.В.Руновским [32] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым и П.Освальдом [36], где также доказано, что $\Omega_m(f,t)_p \asymp \omega_m(f,t)_p, \ 0 < p \le \infty$.

Во втором параграфе первой главы рассматривается следующая аппроксимационная экстремальная характеристика

$$M_{m,n,r}(h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} n^r \cdot E_n(f)}{\left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t \Omega_m^{2/m} \left(f^{(r)}, t \right) dt \right)^{m/2}}, \tag{0.0.1}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и $h > 0$ – произвольное число. Приводим основной результат этого параграфа.

Теорема 1.2.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и $h > 0$ – произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < h \le \pi/n$. Тогда*

$$M_{m,n,r}(h) = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}.$$

Для произвольной $0 < h \le \pi$ имеют место неравенства

$$(1 - sinc\, h)^{-m/2} \le \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} n^r \cdot E_n(f)}{\Omega_m \left(f^{(r)}, h/n \right)} \le \left\{ 1 - \left(\frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2}.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующее

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 справедливы соотношения*

$$M_{m,n,r}(\pi/n) = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \right)^{m/2},$$

$$\frac{1}{2^{m/2}} \le \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^r E_n(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)}, \pi/n\right)} \le \frac{1}{2^{m/2}}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^{m/2}.$$

В третьем параграфе первой главы рассматривается обобщение величины (0.0.1) в виде следующей аппроксимационной характеристики

$$\mathcal{X}_{m,n,r,p}(h) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2} n^r\cdot E_n(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)dt\right)^{1/p}},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p > 0$ и $h > 0$ – произвольное число.

Всюду далее полагаем $\operatorname{sinc} t := \dfrac{\sin t}{t}$. Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1.3.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}, 2/r < p < 2 (r \ge 2)$ *и* h *– произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < h \le \pi/n$. *Тогда имеют место равенства*

$$\mathcal{X}_{m,n,r,p}(h) = \left\{\frac{2}{h^2}\int_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}.$$

Из этой теоремы, в частности, при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ вытекает следующее

Следствие 1.3.1. *В утверждении теоремы 1.3.1 при любом* $0 < h \le \pi/n$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{X}_{m,n,r,2/m}(h) = \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2} := M_{m,n.r}(h).$$

В четвертом параграфе дадим обобщение неравенства типа Н.И.Черных [53, 54].

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 \le h \le \pi/n$, $0 < \nu \le rp - 1$, $1/r < p \le 2$, *и* $\varphi_n(t) = \sin\dfrac{n}{2}t + \dfrac{1}{2}\sin nt$. *Тогда для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *справедливо* *равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m+1/p}\cdot n^{r-1/p}\cdot E_n(f)}{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^\nu\,dt\right\}^{1/p}}=$$

$$=\left\{\int\limits_0^{nh/2}\sin^{mp+\nu}t(1+\cos t)^\nu dt\right\}^{-1/p}.$$

Из этой теоремы при $m=1,\ r=0,\ p=2,\ \nu=1$ в качестве следствия получаем следующий результат Х.Юссефа [63].

Следствие 1.4.1. *Для любой функции $f(x)\in L_2$, любого натурального n и $0<h\le\pi/n$ справедливо неравенство*

$$E_n^2(f)\le\frac{\int\limits_0^h \omega^2(f;t)\left(\sin\frac{\pi}{2h}t+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{h}t\right)dt}{2\int\limits_0^h(1-\cos nt)\left(\sin\frac{\pi}{2h}t+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{h}t\right)dt},$$

которое обращается в равенство для функции $f(x)=\cos nx$ при любых $0<h\le\pi/n$.

Вторая глава состоит из четырех параграфов, и в ней рассматривается задача определения точных значений различных n-поперечников классов 2π-периодических действительных функций, принадлежащих пространству L_2. Прежде чем сформулировать основные результаты второй главы, напомним необходимые обозначения и определения, приведенные в первом параграфе второй главы.

Пусть X – произвольное банахово пространство; S – единичный шар в нем; $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное множество в X; $L_n\subset X$-n – мерное линейное подпространство; $L^n\subset X$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}(X,L_n)$ – множество всех линейных ограниченных операторов, отображающих X в L_n; $\mathcal{L}^\perp(X,L_n)$ – подмножество проекторов в $\mathcal{L}(X,L_n)$.

Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством $L_n \subset X$ определяется величиной

$$E_n(\mathfrak{M})_X = E(\mathfrak{M}, L_n)_X \stackrel{def}{=} \sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_X : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\}. \qquad (0.0.2)$$

Величина

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \inf\{\sup\{\|f - A(f)\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : A \subset \mathcal{L}(X, \Lambda_n)\} \qquad (0.0.3)$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $\Lambda_n \subset X$. Линейный оператор $A^*(A^* \subset \mathcal{L}(X, \Lambda_n))$, если он существует и реализует в (0.0.3) точную нижнюю грань, является наилучшим для $\mathfrak{M}$ линейным методом приближения;

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X = \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X =$$

$$= \inf\{\sup\{\|f - \Lambda f\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : \Lambda \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, \Lambda_n)\} \qquad (0.0.4)$$

– наилучшее приближение множества $\mathfrak{M} \subset X$ проекторами в пространстве X. Очевидно, что для величин (0.0.2)-(0.0.4), согласно определению, выполняется соотношение

$$E_n(\mathfrak{M})_X \le \mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X \le \mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X. \qquad (0.0.5)$$

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : L_{n+1} \subset X\}, \qquad (0.0.6)$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} : L^n \subset X\}, \qquad (0.0.7)$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \stackrel{def}{=} \inf\{E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X : \Lambda_n \subset X\}, \qquad (0.0.8)$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X : \Lambda_n \subset X\}, \qquad (0.0.9)$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, \Lambda_n) : \Lambda_n \subset X\} \qquad (0.0.10)$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками.

Если существует подпространство L_{n+1}^*, на котором достигается точная верхняя грань в (0.0.6), и существуют подпространства Λ_n, на которых достигаются внешние точные нижние грани в (0.0.7) – (0.0.10), то такие подпространства называют экстремальными для соответствующих n-поперечников (0.0.6) – (0.0.10). Очевидно, что между величинами (0.0.6) – (0.0.10) выполняются соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq \begin{array}{c} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{array} \leq \delta_n(\mathfrak{M}, X) \leq \pi(\mathfrak{M}, X)$$

и если X – гильбертово пространство, то

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d^n(\mathfrak{M}, X) \leq d_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X) = \pi_n(\mathfrak{M}, X).$$

Введем классы функций, которые естественным образом появляются из результатов о наилучшем приближении 2π-периодических функций в параграфах 1.2-1.4 первой главы. Пусть $\Phi(t), t \geq 0$ – произвольная возрастающая непрерывная функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Исходя из результатов второго параграфа, для $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и любого $h > 0$ определим класс функций

$$W_m^{(r)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m} \left(f^{(r)}, t \right) dt \leq 1 \right\}.$$

Через $W_m^{(r)}(\Phi) := W_m^{(r)}(\Phi, h)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим класс функций, для которых при любом $h > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t\, \Omega_m^{2/m} \left(f^{(r)}, t \right) dt \leq \Phi(h).$$

Через $W_{m,p}^{(r)}(h)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t\, \Omega_m^p \left(f^{(r)}, t \right) dt \leq 1.$$

По аналогии с классом $W_m^{(r)}(\Phi)$, через $W_{m,p}^{(r)}(\Phi) := W_{m,p}^{(r)}(\Phi,h)$, $\quad m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$ – обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)dt \leq \Phi^p(h).$$

Через $\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h)$ – обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, которые для любых $m,n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$, $1/r < p \leq 2$ и произвольного h $(0 < h \leq \pi/n)$ удовлетворяют ограничению

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^\nu dt \leq 1, \quad \varphi_n(t) = \sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt,$$

а через $\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(\Phi) = \mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$ обозначим аналогичный класс функций $f \in L_2^{(r)}$, которые для тех же значений указанных параметров удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^\nu dt \leq \Phi^p(h).$$

Во втором параграфе второй главы вычислены значения n-поперечников 2π-периодических функций, принадлежащих классам $W_m^{(r)}(h)$ и $W_m^{(r)}(\Phi)$.

Следуя С.Б.Вакарчуку [12], через t_* обозначим величину аргумента $x \in (0,\infty)$ функции $\operatorname{sinc} x$, при которой она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $x = \operatorname{tg} x$ $(4,49 < t_* < 4,51)$. При этом полагаем

$$(1-\operatorname{sinc} x)_* := \left\{1-\operatorname{sinc} x,\ \text{если } 0 < x \leq t_*;\ 1-\operatorname{sinc} t_*,\ \text{если } x \geq t_*\right\}.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $m,n,r \in \mathbb{N}$, $h > 0$ и выполнено условие $nh \leq t_*$. Тогда имеют место равенства*

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h), L_2\right) = p_{2n}\left(W_m^{(r)}(h), L_2\right) =$$

$$= E_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-m/2},$$

где $p_k(\cdot)$ *– любой из поперечников: бернштейновский* $b_k(\cdot)$, *колмогоровский* $d_k(\cdot)$, *гельфандовский* $d^k(\cdot)$, *линейный* $\delta_k(\cdot)$, *проекционный* $\pi_k(\cdot)$, $E_n\left(W_m^{(r)}(h)\right) = \sup\left\{E_n(f) : f \in W_m^{(r)}(h)\right\}$ *– наилучшее приближение класса* $W_m^{(r)}(h) \subset L_2$ *подпространством тригонометрических полиномов* $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Теорема 2.2.2. *Если мажоранта* $\Phi(t)$ *при любом* $t \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \frac{2}{(nt)^2} \int\limits_0^{nt} \tau \left(1 - \operatorname{sinc} \tau\right)_* d\tau, \tag{0.0.11}$$

то для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *имеют место равенства*

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\right) = p_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\right) = E_n\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{m/2},$$

где $p_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$ *или* $\pi_k(\cdot)$. *Множество мажорант* $\{\Phi(t)\}$, *удовлетворяющих условию (0.0.11), не пусто.*

Следствие 2.2.2. *В условиях теоремы 2.2.2 справедливы равенства*

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi_*), L_2\right) = p_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi_*), L_2\right) = E_n\left(W_m^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2} \pi^{m + 4m/(\pi^2 - 4)} (\pi^2 - 4)^{-m/2} n^{-r - 4m/(\pi^2 - 4)},$$

где $p_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников, перечисленных выше.*

Следствие 2.2.3. *Если выполнены условия теоремы 2.2.2, то имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= \sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W_m^{(r)}(\Phi)\right\} = 2^{-m/2}n^r\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}.$$

Третий параграф второй главы посвящен вычислению точных значений n-поперечников 2π-периодических функций принадлежащих классу $W_{m,p}^{(r)}(h)$ и $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, где $m,r\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$ $\ h\in\mathbb{R}_+$.

Теорема 2.3.1 *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$ *и* $nh\le t_*$. *Тогда справедливы равенства*

$$p_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(h),L_2\right) = p_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(h),L_2\right) = E_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)}n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p},$$

где $p_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot)$, $\ d^k(\cdot)$, $\ d_k(\cdot)$, $\ \delta_k(\cdot)$ *или* $\pi_k(\cdot)$.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $m,n,r\in\mathbb{N}$; $0<p\le 2$. *Если для любых* $t\in\mathbb{R}_+$ *мажоранта* $\Phi(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge$$

$$\ge \left(\frac{\pi}{nt}\right)^2\int\limits_0^{nt}\tau\,(1-\operatorname{sinc}\tau)_*^{mp/2}\,d\tau\left\{\int\limits_0^{\pi}\tau\,(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp/2}\,d\tau\right\}^{-1}, \qquad (0.0.12)$$

то при любых $n\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$p_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right) = p_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right) = E_n\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_n\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)}\,n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $p_k(\cdot)$*–любой из* k*-поперечников: бернштейновский* $b_k(\cdot)$, *колмогоровский* $d_k(\cdot)$, *гельфандовский* $d^k(\cdot)$, *линейный* $\delta_k(\cdot)$, *проекционный* $\pi_k(\cdot)$. *При этом* *множество мажорант, удовлетворяющих условию (0.0.12), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, функция* $\Phi_{**}(t) = t^{\alpha/p}$, *где*

$$\alpha = \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt} - 2.$$

Из этой теоремы вытекают следующие

Следствие 2.3.2. *Справедливы равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W^{(r)}_{m,p}(h)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W^{(r)}_{m,p}(h)\right\} =$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)}\,n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p};$$

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)}\,n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Следствие 2.3.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.3.2. Тогда справедливы следующие равенства*

$$p_{2n-1}\left(W^{(r)}_{m,2/m}(\Phi), L_2\right) = p_{2n}\left(W^{(r)}_{m,2/m}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= E_n\left(W^{(r)}_{m,2/m}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(W^{(r)}_{m,2/m}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W^{(r)}_{m,2/m}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m/2)}n^{-r}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^{m/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Имеют место следующие утверждения и следствия из них.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ *и число* $h>0$ *удовлетворяет условию* $0<nh\le\pi$. *Тогда справедливы равенства*

$$\rho_{2n-1}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h), L_2\right) = \rho_{2n}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h), L_2\right) =$$

$$= E_n\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu} dt\right)^{-1/p} =$$

$$= 2^{-(m+1/p)}n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{nh/2} (\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}\, dt\right)^{-1/p},$$

где $\rho_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников Бернштейна* $b_k(\cdot)$, *Гельфанда* $d^k(\cdot)$, *Колмогорова* $d_k(\cdot)$, *линейного* $\delta_k(\cdot)$ *и проекционного* $\pi_k(\cdot)$.

Из теоремы 2.4.1 вытекает следующее

Следствие 2.4.1. *При выполнении условий теоремы 2.4.1 для любого* $n, \nu \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in \mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h)\right\} =$$

$$= \sup\left\{|b_n(f)| : f \in \mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h)\right\} =$$

$$= 2^{-(m+1/p)}n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{nh/2} (\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}\, dt\right)^{-1/p}.$$

Одним из основных результатов четвертого параграфа является

Теорема 2.4.2. *Пусть* $1/r < p \le 2$, $r \in \mathbb{N}$ *и мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \mathcal{J}_{m,n,p,\nu}^{-1}\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{cases} \mathcal{J}_{m,n,p,\nu}(h), & \text{если } \ 0 < h \le \pi/n \\ \mathcal{J}_{m,n,p,\nu}(\pi/n) + \dfrac{2}{n}\displaystyle\int\limits_{\pi}^{nh/2} \sin^{\nu} t\,(1+\cos t)^{\nu}\, dt, & \text{если } \ h \ge \pi/n, \end{cases} \tag{0.0.13}$$

где

$$\mathcal{J}_{m,n,p,\nu}(h) = \frac{2}{n} \int\limits_0^{nh/2} (\sin t)^{mp+\nu} (1+\cos t)^{\nu}\, dt.$$

Тогда для любых чисел $m, n, r \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\rho_{2n-1}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi), L_2\right) = \rho_{2n}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi), L_2\right) =$$

$$= E_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})} n^{-r+\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu} dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Условию (0.0.13) удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(h) = h^{\alpha}$, *где*

$$\alpha = \frac{\pi}{2p} \left(\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu} dt\right)^{-1}.$$

Заметим, что теорема 2.4.2 в качестве следствия при $p = 2,\ \nu = 0,\ m \in \mathbb{N}$ содержит результат Л.В.Тайкова [39], а при $1/r < p \leq 2,\ \nu = 0, m \in \mathbb{N}$ результат М.Ш.Шабозова [57].

ГЛАВА I

Наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций в метрике пространства L_2

Среди экстремальных задач теории аппроксимации функций одной из наиболее важных является задача вычисления точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина

$$E_n(f) \le \chi n^{-r} U_m\left(f^{(r)}, \tau/n\right);\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \tau > 0,$$

где U_m – некоторая характеристика гладкости функций $f \in L_2^{(r)}$ ($L_2^{(0)} \equiv L_2$), например модуль непрерывности ω_m или вводимый ниже обобщенный модуль непрерывности Ω_m, а χ – некоторая константа, зависящая от m, но независящая от r и от функции $f \in L_2^{(r)}$.

В случае $U_m = \omega_m$ эту задачу в разное время исследовали Н.И.Черных [53,54], Л.В.Тайков [37,39], А.А.Лигун [27,29], С.Б.Вакарчук [8], А.Г.Бабенко [5], М.Ш.Шабозов [57] и многие другие (см., например, [47] и приведённую там литературу), а в случае $U_m = \Omega_m$ – С.Б.Вакарчук [12], С.Б.Вакарчук и В.И.Забутная [16], М.С.Саидусайнов [34], Г.А.Юсупов [65].

С целью оптимизации констант, то есть получения наименьшей константы в неравенстве Джексона – Стечкина были введены в рассмотрение различные аппроксимационные экстремальные характеристики [8, 59]. Использование других гладкостных характеристик 2π-периодических функций, например тригонометрических модулей непрерывности в работе А.Г.Бабенко, Н.И.Черных и В.Т.Шевалдина [6], позволило получить новые содержательные результаты в теории аппроксимации функций, связанные с дальнейшим исследованием неравенства типа Джексона – Стечкина. В этой главе мы продолжим исследование указанных авторов в этом направлении.

§1.1. Необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Общие факты

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – множество положительных чисел. Через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ обозначим пространство 2π-периодических суммируемых с квадратом в смысле Лебега действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty,$$

а через $L_2^{(r)} (r \in \mathbb{N})$ – множество 2π-периодических функций $f(x) \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}(x) \in L_2$.

Пусть $\mathcal{T}_{2n-1}$ – подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\le n-1$ (размерности $\le 2n-1$):

$$\mathcal{T}_{2n-1} := \left\{ T_{n-1}(x) : \, T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}.$$

Из курса математического анализа хорошо известно, что для произвольной $f(x) \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1.1.1}$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_n(f) := \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : \, T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1} \} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right\}^{1/2}, \tag{1.1.2}$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье (1.1.1) функции $f(x) \in L_2$. Равенство (1.1.2) получается применением уравнения замкнутости Парсеваля. В дальнейшем, полагая $\rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, $k \geq n$, соотношение (1.1.2) запишем в более удобной форме

$$E_n(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right\}^{1/2}. \tag{1.1.3}$$

Через

$$\omega_m(f,t) = \sup\left\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |h| \leq t\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(x+(m-k)h)\right\| : |h| \leq t\right\} \tag{1.1.4}$$

обозначим модуль непрерывности порядка m функции $f \in L_2$. Используя равенство Парсеваля, легко доказать соотношение

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|^2 = \left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(\cdot + (m-k)h)\right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \left(2\sin\frac{kh}{2}\right)^{2m} = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 (1-\cos kh)^m.$$

Отсюда, согласно равенству (1.1.4), имеем:

$$\omega_m^2(f,t) = 2^m \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 (1-\cos kh)^m : |h| \leq t\right\}, \tag{1.1.5}$$

В некоторых задачах теории аппроксимации вместо модуля непрерывности (1.1.4) для оценки наилучших приближений 2π-периодических функций $f(x) \in L_2$ используют следующую усреднённую характеристику гладкости (см., например, работы [10, 14, 26, 55]:

$$\Omega_m(f,t) = \left\{\frac{1}{t^m}\int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\bar{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m\right\}^{1/2}, \tag{1.1.6}$$

где $t>0$; $\overline{h}=(h_1,h_2,\cdot\cdot\cdot,h_m)$, $\Delta^m_{\overline{h}}=\Delta^1_{h_1}\circ\cdot\cdot\cdot\circ\Delta^1_{h_m}$. Всюду далее полагаем $\operatorname{sinc} t := \sin t/t$.

Заметим, что в ходе исследования важных вопросов конструктивной теории функций в метрическом пространстве L_p $(0<p<1)$ усредненная характеристика гладкости функции, подобная (1.1.6), рассматривалась К.В.Руновским [32] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым и П.Освальдом [36]. Найдем приемлемый для применения вид обобщенного модуля непрерывности m-го порядка (1.1.6), которую используем в дальнейшем. Используя формулы Эйлера, представим ряд Фурье (1.1.1) функции $f(x)\in L_2$ в комплексной форме

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx},$$

где c_k и c_{-k} – взаимно сопряженные числа.

Поскольку функции $\{e^{ikx}\}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdot\cdot\cdot$, образуют на $[0,2\pi]$ ортогональную систему, используя равенство Парсеваля, запишем

$$\|\Delta^m_{\overline{h}}f(\cdot)\|^2=\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\Delta^m_{\overline{h}}e^{ik\cdot}\right\|^2=2^m\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2\prod_{\nu=1}^{m}(1-\cos kh_\nu). \tag{1.1.7}$$

Подставляя (1.1.7) в правую часть равенства (1.1.6) и вычислив m-кратный интеграл, имеем

$$\Omega_m^2(f,t)=2^m\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2\left(1-\operatorname{sinc} kt\right)^m. \tag{1.1.8}$$

С целью оптимизации констант в неравенстве типа Джексона – Стечкина

$$E_n(f)\le\mathcal{X}n^{-r}\Omega_m\left(f^{(r)},t/n\right);\ r\in\mathbb{Z}_+,\ t>0. \tag{1.1.9}$$

С.Б.Вакарчук [10] ввёл в рассмотрение величину

$$\mathcal{K}_{n,r,m}(t)\overset{def}{=}\sup\left\{\frac{n^rE_n(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)},t/n\right)}:\ f(x)\in L_2^{(r)},\ f^{(r)}(x)\ne const\right\},$$

и при любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<t\le\pi/2$ доказал справедливость равенства

$$K_{n,r,m}(t)=\left\{2\left(1-\operatorname{sinc} t\right)\right\}^{-m/2}. \tag{1.1.10}$$

§1.2. Об одной экстремальной аппроксимационной характеристике

В работе [53] Н.И.Черных заметил, что при отыскании точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина, вместо джексоновского функционала $\omega_m(f^{(r)}; h)$, $0 < h \leq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, иногда полезнее бывает функционал

$$\Phi_{m,r}(\varphi; h) = \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p} \left(\int_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

поскольку для произвольной суммируемой на отрезке $[0, h]$ функции $\varphi(t) > 0$ $(0 < t \leq h)$ выполняется неравенство

$$\Phi_{m,r}(f^{(r)}; \varphi; h) \leq \omega_m(f^{(r)}; h) \ (0 < h \leq \pi/n, \ n \in \mathbb{N}).$$

Исходя из этого, в этом параграфе с целью оптимизации констант в неравенстве Джексона – Стечкина (1.1.9) вводим в рассмотрение следующую аппроксимационную экстремальную характеристику

$$M_{m,n,r}(h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} n^r E_n(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right)dt\right)^{m/2}}, \tag{1.2.1}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq m$ и $h > 0$ – произвольное число. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.2.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и $h > 0$ – произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < h \leq \pi/n$. Тогда*

$$M_{m,n,r}(h) = \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.2.2}$$

Для произвольной $0 < h \leq \pi$ имеют место неравенства

$$(1 - sinc\, h)^{-m/2} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} n^r \cdot E_n(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)}, h/n\right)} \leq \left\{1 - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{h}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.2.3}$$

В частности, из (1.2.3) при $h = \pi$ имеем:

$$1 \le \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} n^r \cdot E_n(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)}, \pi/n\right)} \le \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)^{-m/2}. \tag{1.2.4}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что левая часть неравенств (1.2.3) и (1.2.4) реализуется для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$. Приступая к доказательству равенства (1.2.2), заметим, что если $f(x) \in L_2^{(r)}$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k)$$

– ряд Фурье функции $f(x)$, то, согласно (1.1.8),

$$\Omega_m^2\left(f^{(r)}, t\right) = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \left(1 - \operatorname{sinc} kt\right)^m, \tag{1.2.5}$$

где $\rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2 \, (\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)), k = 1, 2, \cdots$.

В силу неравенства Гельдера для сумм, при любом $m \in \mathbb{N}$, пользуясь соотношениями (1.2.5) и (1.1.3), будем иметь

$$E_n^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \operatorname{sinc} kt = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left(1 - \operatorname{sinc} kt\right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^{2-2/m} \rho_k^{2/m} \left(1 - \operatorname{sinc} kt\right) \le \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right)^{1-1/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left(1 - \operatorname{sinc} kt\right)^m\right)^{1/m} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right)^{1-1/m} \left(\frac{1}{2^m} \cdot 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{2r} \rho_k^2 \left(1 - \operatorname{sinc} kt\right)^m\right)^{1/m} =$$

$$= E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}} \left(2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \left(1 - \operatorname{sinc} kt\right)^m\right)^{1/m} =$$

$$= E_{n-1}^{2-2/m} \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}} \cdot \Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}; t\right).$$

Полученное неравенство запишем в виде

$$E_n^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \mathrm{sinc}\, kt + E_n^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}} \cdot \Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}; t\right). \qquad (1.2.6)$$

Умножая обе части неравенства (1.2.6) на $t > 0$ и интегрируя в пределах от $t = 0$ до $t = h$, получаем

$$\frac{h^2}{2} E_n^2(f) \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{1-\cos kh}{k^2} + (E_n(f))^{2-2/m} \frac{1}{2n^{2r/m}} \cdot \int_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}; t\right) dt. \qquad (1.2.7)$$

Замечая, что

$$\max_{k \ge n} \frac{1-\cos kh}{k^2} = \frac{1-\cos nh}{n^2},$$

неравенство (1.2.7) запишем в виде

$$\frac{1}{n^2}\left[(nh)^2 - 2(1-\cos nh)\right] \cdot (E_n(f))^{2/m} \le \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \int_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}; t\right) dt.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$E_n(f) \le n^{-(r-m)}\left[(nh)^2 - 2(1-\cos nh)\right]^{-m/2} \left(\int_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}; t\right) dt\right)^{m/2} =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2} \left(\frac{2}{h^2}\int_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}; t\right) dt\right)^{m/2}. \quad (1.2.8)$$

Используя определение величины (1.2.2), из (1.2.8) получаем оценку сверху

$$M_{m,n,r}(h) \le \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.2.9}$$

Для получения оценки снизу достаточно рассмотреть функцию $f_0(x) = \cos nx$, принадлежащую множеству $L_2^{(r)}$, воспользоваться определением величины (1.2.2.) и легко проверяемыми соотношениями

$$E_{n-1}(f_0) = 1,\ \Omega_m\left(f_0^{(r)}; t\right) = 2^{m/2} n^r \left(1 - \operatorname{sinc} nt\right)^{m/2},$$

$$\left(\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f_0^{(r)}; t\right)dt\right)^{m/2} = n^r h^m \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{m/2}. \tag{1.2.10}$$

Учитывая равенства (1.2.10), получаем с учетом определения величины (1.2.1), будем иметь

$$M_{m,n,r}(h) \ge \frac{2^{m/2} n^r E_n(f_0)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f_0^{(r)}, t\right)dt\right)^{m/2}} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.2.11}$$

Сравнивая неравенств (1.2.9) и (1.2.11), получаем требуемое равенство (1.2.2). Чтобы доказать неравенство (1.2.3), заметим, что для произвольной функции $f(x) \in L_2^{(r)}$ из неравенства (1.2.8) получаем

$$E_n(f) \le 2^{-m/2} n^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2} \Omega_m\left(f^{(r)}; h\right).$$

Отсюда получаем нужную оценку сверху в неравенстве (1.2.3):

$$\frac{2^{m/2} n^r E_n(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)}; h\right)} \leq \left\{1 - \left(\frac{2}{nh} \sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2},$$

или, что то же,

$$\frac{2^{m/2} n^r E_n(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)}; h/n\right)} \leq \left\{1 - \left(\frac{2}{h} \sin\frac{h}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{1.2.12}$$

Для рассмотренной выше экстремальной функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, согласно определению константы Джексона, получаем оценку снизу

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} n^r \cdot E_n(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)}, h/n\right)} \geq \frac{2^{m/2} n^r \cdot E_n(f_0)}{\Omega_m\left(f_0^{(r)}, h/n\right)} = (1 - \operatorname{sinc} h)^{-m/2}. \tag{1.2.13}$$

Двойное неравенство (1.2.3) вытекает из соотношений (1.2.12) и (1.2.13), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1. Из теоремы 1.2.1 вытекает

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 справедливы соотношения*

$$M_{m,n,r}(\pi/n) = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}\right)^{m/2},$$

$$\frac{1}{2^{m/2}} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{n^r \cdot E_n(f)}{\Omega_m\left(f^{(r)}, \pi/n\right)} \leq \frac{1}{2^{m/2}} \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}\right)^{m/2}.$$

§1.3. Обобщение предыдущих результатов

В предыдущем параграфе из хода доказательства теоремы 1.2.1 стало ясно, что введение экстремальной характеристики (1.2.1) обусловлено неравенством (1.2.7), откуда вытекала оценка сверху и дело свелось к получению аналогичной оценки снизу. Таким образом, задача свелась к тому, чтобы среди функций класса $L_2^{(r)}$ найти функцию, для которой оценка снизу совпадала бы с оценкой сверху. Естественно, возникает задача об обобщении полученных результатов. С этой целью вводим в рассмотрение следующие экстремальные аппроксимационные характеристики

$$\mathcal{X}_{m,n,r,p}(h) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2} n^r \cdot E_n(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.3.1}$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p>0$ и $h>0$ – произвольное число. Отметим, что аппроксимационные характеристики более общего вида для обычных модулей непрерывности m-го порядка (1.1.5) рассмотрены в работах М.Ш.Шабозова [56] и М.Ш.Шабозова, Г.А.Юсупова [59]. Используя обобщенный модуль непрерывности (1.1.8) и вычислив верхнюю грань по всем функциям $f\in L_2^{(r)}$, мы определим точное значение величины (1.3.1). Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 1.3.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p<2$ и h – произвольное число, удовлетворяющее условию $0<h\le\pi/n$. Тогда имеют место равенства*

$$\mathcal{X}_{m,n,r,p}(h) = \left\{\frac{2}{h^2}\int_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 1.2.1 мы доказали, что если функция $f\in L_2^{(r)}$ имеет формальный ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то

$$\Omega_m^2\left(f^{(r)}, t\right) = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \left(1 - \operatorname{sinc} kt\right)^m, \qquad (1.3.2)$$

где $\rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, $k \geq n$. Воспользуясь следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского (см., например, [30, с.104])

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \varphi(t)\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p \varphi(t) dt\right)^{2/p}\right)^{1/2},$$

$0 < p \leq 2$, $h > 0$, равенством (1.3.2) и схемой рассуждения, приведенной при доказательстве теоремы 1 работы М.Ш.Шабозова [56], получаем

$$\left(\frac{2}{h^2}\int_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right) dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq \left(\frac{2}{h^2}\int_0^h t\left[2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2 \left(1 - \operatorname{sinc} kt\right)^m\right]^{p/2} dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq 2^{m/2}\left(\int_0^h \left(\frac{2}{h^2}\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2 \left(1 - \operatorname{sinc} kt\right)^m t^{2/p}\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq 2^{m/2} n^r \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left(\frac{2k^{rp}}{h^2}\int_0^h t\left(1 - \operatorname{sinc} kt\right)^{mp/2} dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}. \qquad (1.3.3)$$

Таким образом, задача свелась к тому, что требуется доказать, что функция натурального аргумента

$$F(k) = k^{rp}\int_0^h t\left(1 - \operatorname{sinc} kt\right)^{mp/2} dt \qquad (1.3.4)$$

в области $Q_{k,n} = \{k : \ n \le k < \infty\}$ является монотонно возрастающей вследствие чего, имеет место соотношение

$$\inf_{n \le k < \infty} F(k) = F(n). \tag{1.3.5}$$

Рассмотрим непрерывный аналог равенство (1.3.4), полагая

$$F(y) = y^{rp} \int\limits_0^h t\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2}\,dt.$$

Дифференцируя по y последнее равенство и замечая, что

$$\frac{d}{dy}\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2} = \frac{t}{y} \cdot \frac{d}{dt}\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2}$$

и применяя теорему о среднем значении интеграла, получаем

$$F^{'}(y) = rpy^{rp-1} \int\limits_0^h t\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2}\,dt + y^{rp} \int\limits_0^h \frac{d}{dy}\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2}\,dt =$$

$$= rpy^{rp-1} \int\limits_0^h t\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2}\,dt + y^{rp-1} \int\limits_0^h t^2 \frac{d}{dt}\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2}\,dt =$$

$$= rpy^{rp-1} \int\limits_0^h t\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2}\,dt +$$

$$+ y^{rp-1} \left\{ (1 - \operatorname{sinc} ht)^{mp/2}\,h^2 - \int\limits_0^h \frac{d}{dt}\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2}\,d(t^2) \right\} =$$

$$= rpy^{rp-1} \int\limits_0^h t\,(1 - \operatorname{sinc} yt)^{mp/2}\,dt +$$

$$+ y^{rp-1} h^2 \left\{ (1 - \operatorname{sinc} ht)^{mp/2}\,h^2 - (1 - \operatorname{sinc} \xi y)^{mp/2} \right\} \ge 0,$$

где ξ – произвольное число, удовлетворяющее неравенство $0 < \xi \le h$. Таким образом, мы доказали, что $F'(y) \ge 0$ для $y \ge n$, а значит имеет место равенство (1.3.5).

Таким образом, из (1.3.3) следует, что в этом случае справедливо неравенство

$$\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)dt\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge 2^{m/2}n^r\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2}dt\right)^{1/p}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\right\}^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2}n^r\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2}dt\right)^{1/p} E_n(f),$$

или, что то же,

$$\frac{2^{m/2}n^rE_n(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)dt\right)^{1/p}} \le \left\{\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.3.6)$$

Так как неравенство (1.3.6) справедливо для любой функции $f(x) \in L_2^{(r)}$, то переходя к верхней грани по всем функциям, принадлежащим классу $L_2^{(r)}$, для которых $f^{(r)} \ne const$, получаем

$$\mathcal{X}_{m,n,r,p}(h) = \left\{\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.3.7)$$

Чтобы получить оценку снизу, достаточно заметить, что для функции $g_0(t) = \sin nt \in L_2^{(r)}$ имеют место равенства

$$E_n(g_0) = 1,\ \Omega_m\left(g_0^{(r)};t\right) = 2^{m/2}n^r\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{m/2},$$

и, согласно определению величины (1.3.1), получаем

$$\mathcal{X}_{m,n,r,p}(h) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2} n^r E_n(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)dt\right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{2^{m/2} n^r E_n(g_0)}{\left(\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h t\Omega_m^p\left(g_0^{(r)},t\right)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{\frac{2}{h^2}\int_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.3.8)$$

Утверждение теоремы 1.3.1 следует из сопоставления равенство (1.3.7) и (1.3.8). Из доказанной теоремы при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ вытекает

Следствие 1.3.1. *В утверждении теоремы 1.3.1 при любом* $0 < h \leq \pi/n$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{X}_{m,n,r,2/m}(h) = \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2} := M_{m,n.r}(h).$$

§1.4. Об обобщении некоторых результатов Н.И.Черных

В 1967 г., оценивая величину $E_n(f)$ через $\omega\left(f^{(r)},t\right)$ в пространстве L_2., Н.И.Черных [53] доказал следующую теорему:

Для любой функции $f(x)\in L_2^{(r)}(r\in\mathbb{Z}_+)$ *и любого* $n\in\mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$E_n(f)\le\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^r}\left\{\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2\left(f^{(r)},t\right)\sin ntdt\right\}^{1/2}. \qquad (1.4.1)$$

Равенство выполняется для функции $f_0(x)=\cos nx$.

Обобщая теорему Н.И.Черных, Н.Айнуллоев в работе [4] доказывает следующую теорему:

Для любой функции $f(x)\in L_2^{(r)}(r\ge 1)$ *и любых натуральных* $n,m\in\mathbb{N}$ *и* $0<h\le\pi/n$ *справедливо неравенство*

$$E_n^2(f)\le\frac{\int\limits_0^h\omega_m^2\left(f^{(r)},t\right)\sin\dfrac{\pi}{h}tdt}{2^m n^{2r}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\sin\dfrac{\pi}{h}tdt}. \qquad (1.4.2)$$

Для функции $f_0(x)=\cos nx$ *неравенство (1.4.2) обращается в равенство при всех* $h\in(0,\pi/n]$.

В дальнейшем для произвольного модуля непрерывности $\omega_m(f,t)$ в той же работе Н.И.Черных, рассматривая неравенство вида (1.4.1) с весом $\varphi_n(t)=\sin\dfrac{n}{2}t+\dfrac{1}{2}\sin nt$, с верхнем пределом интегрирования $2\pi/n$, доказал следующую теорему:

Для любой функции $f(x)\in L_2$, *любых* $n,m\in\mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$E_n(f)<(C_{2m}^m)^{-1/2}\left\{\frac{n}{4}\int\limits_0^{2\pi/n}\omega_m^2(f,t)\varphi_n(t)dt\right\}^{1/2}, \qquad (1.4.3)$$

причем константа $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ *в этом неравенстве неулучшаема.*

Значение неравенства (1.4.3) состоит в том, что из него следует неравенство типа Джексона – Стечкина с явной константой $(C_{2m}^{m})^{-1/2}$ для любого $m \in \mathbb{N}$:

$$E_n(f) < (C_{2m}^{m})^{-1/2}\omega_m\left(f; \frac{2\pi}{n}\right).$$

При дополнительном ограничении о выпуклости вверх модуля непрерывности $\omega_m(f,t)$ Юссеф Хасан [63] доказал новое неулучшаемое неравенство

$$E_n(f) < (C_{2m}^{m})^{-1/2}\omega_m\left(f; \frac{3\pi}{4n}\right). \tag{1.4.4}$$

Заметим, что неравенство (1.4.4) из (1.4.3) выводится применением неравенства Иенсена о выпуклых функциях. При этом указанная константа $(C_{2m}^{m})^{-1/2}$ неулучшаема.

В настоящем параграфе мы дадим обобщение неравенства (1.4.3) и докажем новые точные неравенства типа неравенств Н.И.Черных.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 \le h \le \pi/n$, $0 < \nu \le rp - 1$, $1/r < p \le 2$, *и* $\varphi_n(t) = \sin\dfrac{n}{2}t + \dfrac{1}{2}\sin nt$. *Тогда для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m+1/p}\cdot n^{r-1/p}\cdot E_n(f)}{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^{\nu}\,dt\right\}^{1/p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^{nh/2} \sin^{mp+\nu} t(1+\cos t)^{\nu}dt\right\}^{-1/p}. \tag{1.4.5}$$

Доказательство. Снова применяя упрощённое неравенство Минковского (см. напр. [30, с.104])

$$\left(\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \varphi(t)\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^h |f_k(t)|^p \varphi(t) dt\right)^{2/p}\right)^{1/2},$$

верное для $0 < p \leq 2$ и любом $h > 0$, получаем

$$\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p \left(f^{(r)}, t\right) (\varphi_n(t))^{\nu} dt\right\}^{1/p} \geq$$

$$\geq 2^{m/2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left\{k^{rp} \int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2} (\varphi_n(t))^{\nu} dt\right\}^{2/p}\right)^{1/2}. \qquad (1.4.6)$$

Как и в предыдущем параграфе, нужно доказать, что если весовая функция $\varphi_n(t) = \sin\frac{n}{2}t + \frac{1}{2}\sin nt$, $0 < t \leq \pi/n$ на отрезке $[0, h]$ при некоторых $r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ и любых $t \in (0, \pi/n]$ удовлетворяет дифференциальное неравенство (см., напр. работу [60])

$$(rp-1)\varphi_n(t) - t\varphi_n'(t) \geq 0,$$

то для функции

$$F_1(y) = y^{rp} \int\limits_0^h (1-\cos yt)^{mp/2} (\varphi_n(t))^{\nu} dt$$

выполняется соотношение

$$\inf\{F_1(y) :\, y \geq n\} = F_1(n).$$

В самом деле, имеем

$$(rp-1)\varphi_n(t) - t\varphi_n'(t) =$$

$$= (rp-1)\left(\sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt\right)^{\nu} -$$

$$-t \cdot \frac{\nu n}{2}\left(\sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt\right)^{\nu-1} \cdot \left(\cos\frac{nt}{2} + \cos nt\right) = \left(\sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt\right)^{\nu-1} \times$$

$$\times\left[(rp-1)\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)-\frac{\nu n}{2}t\left(\cos\frac{nt}{2}+\cos nt\right)\right]=$$

$$=\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)^{\nu}\left[(rp-1)-\nu\frac{nt}{2}\cdot\frac{\cos\frac{nt}{2}+\cos nt}{\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt}\right]\geq$$

$$\geq[(rp-1)-\nu]\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)^{\nu}\geq 0$$

согласно условиям теоремы 1.4.1, и, следовательно,

$$\inf\{F_1(y):\,y\geq n\}=F_1(n)=$$

$$=n^{rp}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp/2}\cdot\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)^{\nu}dt,$$

а потому из (1.4.6) имеем:

$$\left\{\int\limits_0^h\omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^{\nu}\,dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq 2^m\cdot n^r\cdot E_n(f)\cdot\left(\int\limits_0^h\sin^{mp}\frac{nt}{2}\cdot\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)^{\nu}dt\right)^{1/p}=$$

$$=2^m\cdot n^r\cdot E_n(f)\cdot\left(\int\limits_0^h\sin^{mp+\nu}\frac{nt}{2}\cdot\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt\right)^{1/p}=$$

$$=2^{m+1/p}\cdot n^{r-1/p}\cdot E_n(f)\cdot\left(\int\limits_0^{nh/2}\sin^{mp+\nu}t\cdot(1+\cos t)^{\nu}dt\right)^{1/p}. \qquad (1.4.7)$$

Из неравенства (1.4.7) для любого $f \in L_2^{(r)}$получаем

$$\frac{2^{m+1/p}\cdot n^{r-1/p}\cdot E_n(f)}{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^\nu\,dt\right\}^{1/p}}\le$$

$$\le\left\{\int\limits_0^{nh/2}\sin^{mp+\nu}t\cdot(1+\cos t)^\nu dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.4.8)$$

Легко проверить, что для функции $f_0(x)=\cos nx\in L_2^{(r)}$ неравенство (1.4.8) обращается в равенство. В самом деле, так как

$$E_n(f_0)=1,\ \omega_m\left(f_0^{(r)},t\right)=2^m\cdot n^r\cdot\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m,\ 0<nt\le\pi,$$

то имеет место неравенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}}\frac{2^{m+1/p}\cdot n^{r-1/p}\cdot E_n(f)}{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^\nu\,dt\right\}^{1/p}}\ge$$

$$\ge\frac{2^{m+1/p}\cdot n^{r-1/p}\cdot E_n(f_0)}{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f_0^{(r)},t\right)\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)^\nu dt\right\}^{1/p}}=$$

$$=\left\{\int\limits_0^{nh/2}\sin^{mp+\nu}t(1+\cos t)^\nu dt\right\}^{-1/p},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1. Из доказанной теоремы при $m=1,\ r=0,\ p=2,\ \nu=1$ получаем следующий результат Х.Юссефа [63]:

Следствие 1.4.1. *Для любой функции $f(x) \in L_2$, любого натурального n и $0 < h \leq \pi/n$ справедливо неравенство*

$$E_n^2(f) \leq \frac{\int\limits_0^h \omega^2(f;t)\left(\sin\frac{\pi}{2h}t + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{h}t\right)dt}{2\int\limits_0^h (1-\cos nt)\left(\sin\frac{\pi}{2h}t + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{h}t\right)dt}, \tag{1.4.9}$$

которое обращается в равенство для функции $f(x) = \cos nx$ при всех $0 < h \leq \pi/n$.

Другим весьма важным следствием теоремы 1.4.1 является результат Н.И.Черных [53], который получается при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p = 2$, $\nu = 1$, $h = 2\pi/n$ и имеет вид (1.4.3):

$$E_n(f) < (C_{2m}^m)^{-1/2}\left\{\frac{n}{4}\int\limits_0^{2\pi/n}\omega_m^2(f,t)\varphi_n(t)dt\right\}^{1/2},$$

причем, как мы отметили выше, константа $(C_{2m}^m)^{-1/2}$ является неулучшаемой.

ГЛАВА II

Поперечники классов функций в метрике пространства L_2

§2.1. Определение поперечников и классов функций

Основной целью исследования настоящей главы является вычисление значения различных поперечников для классов функций, возникающих естественным образом из результатов, полученных в параграфах 1.2-1.4.

Прежде чем сформулировать результаты о поперечниках, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций из L_2 и пусть $\Lambda_n \subset L_2$ – некоторое подпространство из L_2 размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{M}) = \sup\{E_n(f) :\, f \in \mathfrak{M}\} =$$

$$= \sup\{\inf\{\|f - g\| :\, g \in \Lambda_n\} :\, f \in \mathfrak{M}\} \tag{2.1.1}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством $\Lambda_n \subset L_2$ и она характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства Λ_n в метрике пространства L_2. Если обозначить через $\mathcal{L}(L_2, \Lambda_n)$ множество всех линейных непрерывных операторов $A :\, L_2 \to \Lambda_n$, действующих из L_2 в произвольное заданное подпространство $\Lambda_n \in L_2$ размерности n, то возникает задача:
найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) = \inf\{\sup\{\|f - Af\| :\, f \in \mathfrak{M}\} :\, A \in \mathcal{L}(L_2, \Lambda_n)\} \tag{2.1.2}$$

и указать оператор $A^* \in \mathcal{L}(L_2, \Lambda_n)$, реализующий точную нижнюю грань:

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) = \sup\{\|f - A^*f\| :\, f \in \mathfrak{M}\}.$$

Если в $\mathcal{L}(L_2, \Lambda_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^{\perp}(L_2, \Lambda_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство Λ_n, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in \Lambda_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M}) = \inf\{\sup\{\|f - Af\| :\, f \in \mathfrak{M}\} :\, A \in \mathcal{L}^{\perp}(L_2, \Lambda_n)\}. \tag{2.1.3}$$

Напомним определения поперечников, значения которых будут вычислены в этой главе для некоторых конкретных классов $\mathfrak{M}$ функций.

Поперечником в смысле А.Н.Колмогорова [22] класса функций $\mathfrak{M}$ называется величина

$$d_n(\mathfrak{M}) = \inf\{E_n(\mathfrak{M}) : \Lambda_n \subset L_2\} =$$

$$= \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\| : \, g \in \Lambda_n\} : \, f \in \mathfrak{M}\} : \, \Lambda_n \subset L_2\}, \qquad (2.1.4)$$

где нижняя грань рассматривается сначала по всем функциям $g(x)$, принадлежащим n-мерному подпространству $\Lambda_n \subset L_2$, а затем по всем подпространствам заданной размерности n.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{M}) = \inf\{\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) : \, \Lambda_n \subset L_2\} =$$

$$\inf\{\inf\{\sup\{\|f - Af\| : \, f \in \mathfrak{M}\} : \, A \in \mathcal{L}(L_2, \Lambda_n)\} : \, \Lambda_n \subset L_2\}. \qquad (2.1.5)$$

называют линейным поперечником. Рассматривают также проекционный поперечник

$$\Pi_n(\mathfrak{M}) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - Af\| : \, f \in \mathfrak{M}\} : \, A \in \mathcal{L}^{\perp}(L_2, \Lambda_n)\} : \, \Lambda_n \subset L_2\}.$$

Величина

$$d^n(\mathfrak{M}) = \inf\{\sup\{\|f\| : \, f \in \mathfrak{M} \cap L_n\} : \, \Lambda^n \subset L_2\}, \qquad (2.1.6)$$

где $\inf$ берется по всем подпространствам Λ^n коразмерности n, называется n-поперечником по Гельфанду.

Пусть S – единичный шар в L_2. Величина

$$b_n(\mathfrak{M}) = \sup\{\sup\{\mathfrak{M} \cap \Lambda_{n+1} \supset \varepsilon s \cap \Lambda_{n+1} : \varepsilon > 0\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\} \qquad (2.1.7)$$

называется n-поперечником по Бернштейну. Отметим свойства монотонности поперечников, которые сразу вытекают из их определений:

Пусть $p_n(\cdot)$ – любой из вышеуказанных поперечников. Тогда имеют место следующие неравенства:

а) $p_n(\mathfrak{M}) \geq p_{n+1}(\mathfrak{M})$ – монотонность по n.

б) $p_n(\mathfrak{N}) \leq p_n(\mathfrak{M})$, если $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$.

Так как пространство L_2 является гильбертовым, то имеют место соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}) \leq d^n(\mathfrak{M}) \leq d_n(\mathfrak{M}) = \delta_n(\mathfrak{M}) = \Pi_n(\mathfrak{M}). \tag{2.1.8}$$

Первое неравенство $b_n(\mathfrak{M}) \leq d_n(\mathfrak{M})$ справедливо для любого банахова пространства, и его можно найти в монографии А.Пинкуса [30, с.19], а все остальное в книге В.М.Тихомирова [42, с.239].

При вычислении поперечников в любом банаховом пространстве X(и в частности, при $X = L_2$) весьма важным является следующая фундаментальная

Теорема В.М.Тихомирова [42]: *Пусть* $p_n(\mathfrak{M}, X)$ *– любой из перечисленных выше поперечников класса* $\mathfrak{M}$ *в пространстве* X *и пусть* $d_{2n-1}(\mathfrak{M}, X) \leq R$. *Если шар* $S_{2n+1} = \{x : \|x\|_X \leq R\}$ *размерности не меньше* $2n+1$ *содержится в классе* $\mathfrak{M}$, $S_{2n+1} \subset \mathfrak{M}$, *то при* $\mathbb{N} = 2n-1$ *и* $\mathbb{N} = 2n$, $b_{2n-1}(\mathfrak{M}, X) \geq b_{2n}(\mathfrak{M}, X) \geq b_{2n}(S_{2n+1}, X) \geq R$, *а потому* $p_{2n-1}(\mathfrak{M}, X) = p_{2n}(\mathfrak{M}, X) = R$.

Все полученные точные значения n-поперечников рассматриваемых классов функций в этой главе основываются на фундаментальной теореме Тихомирова, формулировка которой приведена выше.

Приводим теперь определение классов функций возникающих при решении задач в параграфах 1.2–1.4. Для $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любого $h > 0$ вводим в рассмотрение класс функций

$$W_m^{(r)}(h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{2}{h^2} \int_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) dt \leq 1 \right\}.$$

Пусть $\Phi(t)$, $t \geq 0$ – произвольная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W_m^{(r)}(\Phi) := W_m^{(r)}(\Phi, h)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $h > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{h^2} \int_0^h t\,\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right) dt \leq \Phi(h),$$

то есть

$$W_m^{(r)}(\Phi)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},t\right)dt\le\Phi(h)\right\}.$$

Аналогичным образом определим следующие классы функций:

Пусть $W_{m,p}^{(r)}(h),\ m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le 2$ – класс функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h\in\mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{p}\left(f^{(r)},t\right)dt\le 1.$$

Таким образом,

$$W_{m,p}^{(r)}(h)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{p}\left(f^{(r)},t\right)dt\le 1\right\}.$$

Точно так же, по аналогии с классом $W_m^{(r)}(\Phi)$, через $W_{m,p}^{(r)}(\Phi):=W_{m,p}^{(r)}(\Phi,h)$, $m\in\mathbb{N},\ \ r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$ – обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h\in\mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{p}\left(f^{(r)},t\right)dt\le\Phi^p(h),$$

где по-прежнему $\Phi(t)$, $t\ \ge\ 0$ – произвольная непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0)=0$.

Следуя работе С.Б.Вакарчука [13], через t_* обозначим величину аргумента $x\in\mathbb{R}_+$ функции $\varphi(x)=\operatorname{sinc}x$, при котором она достигает своего наименьшего значения:

$$\varphi(t_*)=\min\left\{\varphi(x):\ x\in\mathbb{R}_+\right\}=\operatorname{sinc}t_*.$$

Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $x=\operatorname{tg}x\,(4.49<t_*<4.51)$. При этом полагаем

$$(1-\operatorname{sinc}x)_*:=\left\{1-\operatorname{sinc}x,\quad\text{если}\ \ 0<x\leqslant t_*;\ \ 1-\operatorname{sinc}t_*,\quad\text{если}\ x\geqslant t_*\right\}.$$

Далее через $\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h)$ – обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, которые для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$ и произвольного h $(0 < h \leq \pi/n)$ удовлетворяют ограничению

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)(\varphi_n(t))^\nu dt \leq 1, \quad \varphi_n(t) = \sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt,$$

а через $\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(\Phi) = \mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$ обозначим аналогичный класс функций $f \in L_2^{(r)}$, которые для тех же значений указанных параметров удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)(\varphi_n(t))^\nu dt \leq \Phi^p(h).$$

Положим также

$$(\sin t)_*^m = \left\{(\sin t)^m, \text{ если } \ 0 \leq t \leq \pi/2; \ 1, \text{ если } \ t > \pi/2\right\}.$$

§2.2. Значение поперечников классов $W_m^{(r)}(h)$ и $W_m^{(r)}(\Phi)$ в пространстве L_2

В этом параграфе, базируясь на результаты первого параграфа первой главы (теорема 1.2.1), вычислим точное значение всех вышеперечисленных в начале второй главы поперечников классов функций $W_m^{(r)}(h)$ и $W_m^{(r)}(\Phi)$. При этом полагаем

$$(1-\operatorname{sinc} x)_* := \{1-\operatorname{sinc} x, \quad \text{если} \quad 0 < x \le t_*; \quad 1-\operatorname{sinc} t_*, \quad \text{если} \quad x \ge t_*\}.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $h > 0$ и выполнено условие $nh \le t_*$. Тогда имеют место равенства*

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h), L_2\right) = p_{2n}\left(W_m^{(r)}(h), L_2\right) =$$

$$= E_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}, \qquad (2.2.1)$$

где $p_k(\cdot)$ – любой из поперечников: бернштейновский $b_k(\cdot)$, колмогоровский $d_k(\cdot)$, гельфандовский $d^k(\cdot)$, линейный $\delta_k(\cdot)$, проекционный $\pi_k(\cdot)$, $E_n\left(W_m^{(r)}(h)\right) = \sup\left\{E_n(f) : f \in W_m^{(r)}(h)\right\}$ – наилучшее приближение класса $W_m^{(r)}(h) \subset L_2$ подпространством тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством (1.2.8):

$$E_n(f) \le$$

$$\le 2^{-m/2} n^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2} \left(\frac{2}{h^2}\int_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}; t\right) dt\right)^{m/2}.$$

Отсюда, используя определение класса $W_m^{(r)}(h)$, а также соотношения (2.1.8), запишем

$$\rho_{2n}\left(W_m^{(r)}(h),L_2\right)\le\rho_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h),L_2\right)\le d_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h),L_2\right)\le$$

$$\le E_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2}\le\mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2}\le\mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2}\le$$

$$\le 2^{-m/2}n^{-r}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \qquad (2.2.2)$$

Для нахождения оценок снизу n-поперечников класса $W_m^{(r)}(h)$ рассмотрим в множестве $\mathcal{T}_{2n+1}\cap L_2$ шар

$$\mathcal{B}_{2n+1}\overset{def}{=}\left\{T_n(x)\in\mathcal{T}_{2n+1}:\ \|T_n\|\le 2^{-m/2}n^{-r}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}\right\},$$

и покажем его принадлежность классу $W_m^{(r)}(h)$. Для этого убедимся, что для любого полинома $T_n(x)\in\mathcal{B}_{2n+1}$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{h^2}\int_0^h t\,\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},t\right)dt\le 1.$$

В работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [15] для произвольного тригонометрического полинома $T_n(x)\in\mathcal{B}_{2n+1}$ доказано неравенство

$$\Omega_m(T_n^{(r)},t)\le 2^{m/2}n^r\,(1-\operatorname{sinc}nt)_*^{m/2}\,\|T_n\|. \qquad (2.2.3)$$

Используя неравенство (2.2.3) для произвольного полинома $T_n(x)\in\mathcal{B}_{2n+1}$ при $nh\le t_*$ получим

$$\frac{2}{h^2}\int_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},t\right)dt\le 2n^{2r/m}\|T_n\|^{2/m}\frac{2}{h^2}\int_0^h t\,(1-\operatorname{sinc}nt)\,dt=$$

$$=2n^{2r/m}2^{-1}n^{-2r/m}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1}\frac{2}{h^2}\int_0^h t\,(1-\operatorname{sinc}nt)_*\,dt=$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1} \frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\,(1-\operatorname{sinc} t)\,dt =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1} \frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} (t-\sin t)\,dt =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1} \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\} = 1. \qquad (2.2.4)$$

Учитывая определение класса $W_m^{(r)}(h)$ и неравенство (2.2.4), убедимся в справедливости включения $\mathcal{B}_{2n+1} \in W_m^{(r)}(h)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника, приходим к оценке снизу

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(h), L_2\right) \geq p_{2n}\left(W_m^{(r)}(h), L_2\right) \geq$$

$$\geq p_{2n}(\mathcal{B}_{2n+1}, L_2) \geq 2^{-m/2} n^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \qquad (2.2.5)$$

Теперь требуемые равенства (2.2.1) следуют из сравнения между собой неравенств (2.2.2) и (2.2.5), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1.

Из доказанной теоремы вытекает интересное

Следствие 2.2.1. *Если выполнены условия теоремы 2.2.1, то имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f \in W_m^{(r)}(h)\right\} =$$

$$= \sup\left\{|b_n(f)|:\ f \in W_m^{(r)}(h)\right\} =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2},$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ соответственно косинус—и синус—коэффициенты Фурье функции $f \in L_2^{(r)}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, приведем доказательство для коэффициентов $a_n(f)$. Учитывая ортогональность частичной суммы $S_n(f,x)$ ряда Фурье функции $\cos nx$, запишем

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[f(x)-S_n(f,x)]\cos nxdx \qquad (2.2.6)$$

и, используя неравенство Коши-Буняковского, а также неравенство

$$E_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)\le 2^{-m/2}n^{-r}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2},$$

из (2.2.6) получим

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W_m^{(r)}(h)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W_m^{(r)}(h)\right\}\le$$

$$\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 nxdx\right)^{1/2}\sup\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)-S_n(f;x)|^2dx\right)^{1/2}:\ f\in W_m^{(r)}(h)\right\}=$$

$$=\sup\left\{\|f-S_n(f)\|:\ f\in W_m^{(r)}(h)\right\}=$$

$$=E_n\left(W_m^{(r)}(h)\right)_{L_2}=2^{-m/2}n^{-r}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \qquad (2.2.7)$$

Для нахождения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_1(x)=2^{-m/2}n^{-r}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}\cos nx.$$

Непосредственным вычислением убедимся, что функция $f_1(x)$ принадлежит классу $W_m^{(r)}(h)$ и так как

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\, f\in W_m^{(r)}(h)\right\}\geq |a_n(f_1)|=$$

$$=2^{-m/2}n^{-r}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 nxdx=$$

$$=2^{-m/2}n^{-r}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{2.2.8}$$

Утверждение следствия 2.2.1 вытекает из сопоставлений неравенств (2.2.7) и (2.2.8), чем и завершаем доказательство.

Непрерывную возрастающую на полусегменте $[0,\infty)$ функцию Φ такую, что $\Phi(0)=0$, будем называть мажорантой.

Теорема 2.2.2. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любом $t\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)}\geq\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\frac{2}{(nt)^2}\int\limits_0^{nt}\tau\left(1-\operatorname{sinc}\tau\right)_* d\tau, \tag{2.2.9}$$

то для любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi),L_2\right)=p_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi),L_2\right)=$$

$$=E_n\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}=\mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}=\mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-m/2}n^{-r}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}, \tag{2.2.10}$$

где $p_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$ или

$\pi_k(\cdot)$. *Множество мажорант* $\{\Phi(t)\}$, *удовлетворяющих условию (2.2.9), не пусто.*

Доказательство. Полагая в неравенстве (1.2.8) $h = \pi/n$, для произвольной функции $f(x) \in W_m^{(r)}(\Phi)$ будем иметь

$$E_n(f) \le 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}. \tag{2.2.11}$$

Из неравенства (2.2.11), с учетом соотношения (2.1.8), между перечисленными выше n-поперечниками получим оценку сверху

$$p_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le$$

$$\le d_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le E_n\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} \le$$

$$\le \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} \le \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} \le$$

$$\le 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}. \tag{2.2.12}$$

Для получения соответствующей оценки снизу бернштейновского n-поперечника введем в рассмотрение $(2n+1)$-мерной шар $\widetilde{\mathcal{B}}_{2n+1}$ в множестве $\mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$ и покажем, что этот шар принадлежит классу $W_m^{(r)}(\Phi)$:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{2n+1} = \left\{T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1} :\, \|T_n\| \le 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}\right\}.$$

Для этого нам нужно доказать, что для любого полинома $T_n(x) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{2n+1}$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)}, t\right)dt\right)^{m/2} \le \Phi(h),\ h \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2.13}$$

Воспользуясь неравенством (2.2.3), верного для произвольной $T_n(x) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{2n+1}$, будем иметь

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}\left(T_n^{(r)},t\right)dt \le 2n^{2r/m}\|T_n\|^{2/m}\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,(1-\operatorname{sinc} nt)_*\,dt \le$$

$$\le 2n^{2r/m}2^{-1}n^{-2r/m}\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\,(1-\operatorname{sinc} t)_*\,dt =$$

$$\le \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{2}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\,(1-\operatorname{sinc} t)_*\,dt \le \Phi(h). \tag{2.2.14}$$

Из неравенства (2.2.14) следует включение $\widetilde{\mathcal{B}}_{2n+1} \in W_m^{(r)}(\Phi)$. Используя соотношения (2.1.8) между n-поперечниками и определение бернштейновского n-поперечника, запишем соответствующую оценку снизу

$$p_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi),L_2\right) \ge b_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi),L_2\right) \ge$$

$$\ge b_{2n}\left(\widetilde{\mathcal{B}}_{2n+1},L_2\right) \ge 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}. \tag{2.2.15}$$

Равенства (2.2.10) вытекают из сопоставления неравенств (2.2.12) и (2.2.15).

Докажем, что функция $\Phi_*(t) = t^\alpha$, где $\alpha = \dfrac{8}{\pi^2-4}$ $(1,31 < \alpha < 1,45)$, удовлетворяет условию (2.2.9) теоремы 2.2.2. В самом деле, подставляя $\Phi_*(t)$ в неравенство (2.2.9), получим

$$\left(\frac{nt}{\pi}\right)^\alpha \ge \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\frac{2}{(nt)^2}\int\limits_0^{nt}\tau\,(1-\operatorname{sinc}\tau)_*\,d\tau,$$

или, что то же,

$$\left(\frac{nt}{\pi}\right)^{\alpha+2} \ge \frac{2}{\pi^2-4}\int\limits_0^{nt}\tau\,(1-\operatorname{sinc}\tau)_*\,d\tau. \tag{2.2.16}$$

Полагая $nt = \mu\pi, \ \ 0 \le \mu < +\infty$, неравенство (2.2.16) запишем в виде

$$\mu^{\alpha+2} \ge \frac{2}{\pi^2 - 4} \int\limits_0^{\mu\pi} \tau \left(1 - \operatorname{sinc} \tau\right)_* d\tau. \tag{2.2.17}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+2} - \frac{2}{\pi^2 - 4} \int\limits_0^{\mu\pi} \tau \left(1 - \operatorname{sinc} \tau\right)_* d\tau, \ 0 \le \mu < +\infty. \tag{2.2.18}$$

Покажем, что при любых $\mu \in [0, +\infty)$ всегда $\varphi(\mu) \ge 0$. Рассуждения проведем для трех случаев:

а) $0 \le \mu \le 1$; б) $1 \le \mu \le t_*/\pi$; в) $t_*/\pi \le \mu < +\infty$.

Пусть сначала $0 \le \mu \le 1$. Учитывая определения функции $(1 - \operatorname{sinc} x)_*$ и вычисляя интеграл в правой части (2.2.18), функцию $\varphi(\mu)$ представим в виде

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+2} - \frac{2}{\pi^2 - 4} \int\limits_0^{\mu\pi} (\tau - \sin \tau) d\tau =$$

$$= \mu^{\alpha+2} - \frac{2}{\pi^2 - 4} \left\{ \frac{(\mu t)^2}{2} - 2 \sin^2 \frac{\mu\pi}{2} \right\} =$$

$$= \mu^{\alpha+2} - \frac{(\mu t)^2}{\pi^2 - 4} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{\mu\pi} \sin \frac{\mu\pi}{2} \right)^2 \right\}. \tag{2.2.19}$$

Написав функцию (2.2.19) в виде

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+2} - \frac{1}{\pi^2 - 4} \left\{ \mu^2 \pi^2 - 2(1 - \cos \mu\pi) \right\}$$

и продифференцировав её, получаем

$$\varphi^{'}(\mu) = (\alpha + 2)\mu^{\alpha+1} - \frac{1}{\pi^2 - 4} \left\{ 2\pi^2 \mu - 2\pi \sin \mu\pi \right\} =$$

$$= (\alpha+2)\mu^{\alpha+1} - \frac{2\pi^2}{\pi^2-4}\mu + \frac{2\pi}{\pi^2-4}\sin\mu\pi =$$

$$= (\alpha+2)\mu(\mu^{\alpha}-1) + \frac{2\pi}{\pi^2-4}\sin\mu\pi \ge 0 \qquad (2.2.20)$$

для всех значениях $\mu \in [0,1]$.

Пусть теперь $1 \le \mu \le t_*/\pi$. Непосредственным вычислением из (2.2.20) очевидно, что $\varphi^{'}(\mu) > 0$ для всех $\mu \in [1, t_*/\pi]$. Этим неравенство (2.2.17) для случаев а) и б) доказано.

Рассмотрим случай $t_*/\pi \le \mu < +\infty$. Используя снова определение функции $(1-\operatorname{sinc} x)_*$, запишем

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+2} - \frac{1}{\pi^2-4}\left[t_*^2 - \left(2\sin\frac{t_*}{2}\right)^2 + (1-\operatorname{sinc} t_*)\left((\mu\pi)^2 - t_*^2\right)\right].$$

Дифференцируя эту функцию при всех $\mu \in [t_*/\pi, +\infty]$, имеем:

$$\varphi^{'}(\mu) = \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\mu\left(2\mu^{\alpha+1} - 1 + \operatorname{sinc} t_*\right) > 0,$$

чем и завершаем доказательство неравенства (2.2.17). Этим теорема 2.2.2 полностью доказана.

Следствие 2.2.2. *В условиях теоремы 2.2.2 справедливы равенства*

$$p_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(\Phi_*), L_2\right) = p_{2n}\left(W_m^{(r)}(\Phi_*), L_2\right) = E_n\left(W_m^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} =$$

$$= \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_m^{(r)}(\Phi_*)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2}\pi^{m+4m/(\pi^2-4)}(\pi^2-4)^{-m/2}n^{-r-4m/(\pi^2-4)},$$

где $p_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников, перечисленных выше.

Следствие 2.2.3. *Если выполнены условия теоремы 2.2.2, то имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W_m^{(r)}(\Phi)\right\}=$$
$$=\sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W_m^{(r)}(\Phi)\right\}=2^{-m/2}n^{-r}\left\{\frac{n^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{m/2}.$$

Доказательство следствия 2.2.3 повторяет схему доказательства следствия 2.2.1, а потому мы его опускаем.

§2.3. Точные значения n-поперечников классов функций $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$

Пусть $W_{m,p}^{(r)}(h)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$ – класс функций $f \in L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)dt \leq 1,$$

и аналогично $W_{m,p}^{(r)}(\Phi) := W_{m,p}^{(r)}(\Phi, h)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$ – класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)dt \leq \Phi^p(h),$$

где $\Phi(t)$, $t \geq 0$ – произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. В наших последующих рассуждениях основную роль будет играть функция

$$(1 - \operatorname{sinc} x)_* := \{1 - \operatorname{sinc} x, \quad \text{если} \quad 0 < x < t_*; \quad 1 - \operatorname{sinc} t_*, \quad \text{если} \quad x \geq t_*\},$$

где t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $x = \operatorname{tg} x$ $(4,49 < t_* < 4,51)$. Этой функцией мы воспользовались при выводе основных результатов предыдущего параграфа.

Теорема 2.3.1 *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1/r < p \leq 2$ *и* $nh \leq t_*$. *Тогда справедливы равенства*

$$p_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right) = p_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right) =$$

$$= E_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2-1/p} n^{-r}\left\{\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\,(1 - \operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}, \qquad (2.3.1)$$

где $p_k(\cdot)$ *– любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $\delta_k(\cdot)$ *или* $\pi_k(\cdot)$.

Доказательство. Оценку сверху для проекционного n-поперечника получаем из неравенства (1.3.6) с учётом определения класса функций $W_{m,p}^{(r)}(h)$:

$$\pi_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right) \leq \pi_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right) \leq$$

$$\leq E_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h), L_2\right) \leq \mathcal{E}_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} \leq \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_{m,p}^{(r)}(h)\right)_{L_2} \leq$$

$$\leq 2^{-m/2-1/p} n^{-r} \left\{\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h t\,(1-\operatorname{sinc} nt)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p} =$$

$$= 2^{-m/2-1/p} n^{-r} \left\{\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}. \qquad (2.3.2)$$

С целью получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника, введем в рассмотрение $(2n+1)$-мерный шар полиномов $S_{2n+1} \in \mathcal{T}_{2n+1} \cap L_2$:

$$S_{2n+1} = \left\{T_n(x):\ \|T_n\| \leq 2^{-m/2-1/p} n^{-r} \left\{\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_{m,p}^{(r)}(h)$. Снова воспользуясь неравенством (2.2.3), будем иметь

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\left(T_n^{(r)}, t\right) dt \leq$$

$$\leq 2^{mp/2+1}\cdot n^{rp}\cdot 2^{-mp/2}\cdot n^{-rp}\cdot \frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\,(1-\operatorname{sinc} nt)_*^{mp/2}\,dt\|T_n\|^p \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{nh} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt \left\{\int\limits_0^{nh} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1} = 1,$$

откуда следует, что $S_{2n+1} \subset W^{(r)}_{m,p}(h)$. По определению бернштейновского n-поперечника получаем оценку снизу

$$b_{2n-1}\left(W^{(r)}_{m,p}(h), L_2\right) \geq b_{2n}\left(W^{(r)}_{m,p}(h), L_2\right) \geq b_{2n}\left(S_{2n+1}, L_2\right) =$$

$$= 2^{-m/2-1/p} n^{-r} \left\{ \frac{1}{(nh)^2} \int\limits_0^{nh} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt \right\}^{-1/p}. \qquad (2.3.3)$$

Утверждение теоремы 2.3.1 вытекает из сопоставления неравенств (2.3.2) и (2.3.3). Докажем более общее утверждение.

Теорема 2.3.2. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$; $1/r < p \leq 2$ и $0 < h \leq \pi/n$. Если для любых $t \in \mathbb{R}_+$ мажоранта $\Phi(t)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p(\pi/n)} \geq \left(\frac{\pi}{nt}\right)^2 \int\limits_0^{nt} \tau\,(1-\operatorname{sinc}\tau)_*^{mp/2}\,d\tau \left\{ \int\limits_0^{\pi} \tau\,(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp/2}\,d\tau \right\}^{-1}, \qquad (2.3.4)$$

то при любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$p_{2n}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi, h), L_2\right) = p_{2n-1}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi, h), L_2\right) =$$

$$= E_n\left(W^{(r)}_{m,p}((\Phi, h))\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi, h)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi, h)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2-1/p} n^{-r} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad (2.3.5)$$

где $p_k(\cdot)$ – любой из k-поперечников: бернштейновский $b_k(\cdot)$, колмогоровский $d_k(\cdot)$, гельфандовский $d^k(\cdot)$, линейный $\delta_k(\cdot)$, проекционный $\pi_k(\cdot)$. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (2.3.4), не пусто.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме 2.3.1, с учетом определения класса $W_{m,p}^{(r)}(\Phi,h)$, для произвольной $f(x)\in W_{m,p}^{(r)}(\Phi,h)$ при $h=\pi/n$ из неравенства

$$E_n(f)\le$$

$$\le 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\left\{\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/p}=$$

$$=2^{-(m/2+1/p)}n^{-r}\left\{\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\left\{\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/p}$$

получаем:

$$E_n(f)\le 2^{-(m/2+1/p)}n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

откуда вследствие соотношений (2.1.8) запишем

$$p_{2n}\left(W_{m,p}(\Phi),L_2\right)\le p_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right)\le$$

$$\le 2^{-(m/2+1/p)}n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.3.6}$$

Далее, с целью получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника, введем в рассмотрение шар полиномов

$$\widetilde{S}_{2n+1}=\left\{T_n(x)\in\mathcal{T}_{2n+1}:\right.$$

$$\left.\|T_n\|\le 2^{-m/2-1/p}n^{-r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и докажем, что $\widetilde{S}_{2n+1} \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$. Из неравенства (2.2.3) с учетом условия (2.3.4) имеем:

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\left(T_n^{(r)},t\right)dt \le$$

$$\le 2^{mp/2}\cdot n^{rp}\cdot\|T_n\|^p\cdot\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)_*^{mp/2}dt \le$$

$$\le 2^{mp/2+1}\cdot n^{rp}\cdot 2^{-mp/2-1}\cdot n^{-rp}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{mp/2}dt\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)_*^{mp/2}dt\right)\Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=\Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{\pi}{nh}\right)^2\int\limits_0^{nh} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)_*^{mp/2}dt\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^\pi t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{mp/2}dt\right)^{-1}\le\Phi^p\left(h\right).$$

Этим доказано, что шар $\widetilde{S}_{2n+1}$ принадлежит классу $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, а потому согласно определению n-поперечника Бернштейна получаем оценку всех вышеперечисленных поперечников снизу

$$p_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right)\ge p_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right)\ge$$

$$\ge b_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\right)\ge b_{2n}\left(\widetilde{S}_{2n+1},L_2\right)=$$

$$=2^{-m/2-1/p}n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{nh} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad (2.3.7)$$

где $p_k(\cdot)$ – по-прежнему любой из вышеперечисленных k-поперечников. Равенства (2.3.5) вытекают из оценки сверху (2.3.6) и оценки снизу (2.3.7).

Покажем, что функция $\Phi_{**}(t) = t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha = \pi^2 \Big/ \int_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt - 2, \tag{2.3.8}$$

удовлетворяет ограничению (2.3.4). Так как

$$\frac{\pi^2}{mp} \le \int_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt < \frac{\pi^2}{2},$$

то для границы значений число $\alpha := \alpha(m,p)$ имеем:

$$0 < \alpha < mp. \tag{2.3.9}$$

Подставляя функцию $\Phi_{**}(t)$ в неравенство (2.3.4), имеем:

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha+2} \ge \int_0^{nh} t\,(1-\operatorname{sinc} t)_*^{mp/2}\,dt \cdot \left(\int_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right)^{-1}, \tag{2.3.10}$$

справедливость которого требуется еще доказать.

Полагая $nh = \pi\mu$, $0 \le \mu < \infty$, $\alpha+2 = \beta$, перепишем неравенство (2.3.10) в эквивалентном виде

$$\mu^\beta \ge \int_0^{\mu\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)_*^{mp/2}\,dt \left(\int_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right)^{-1}. \tag{2.3.11}$$

С учетом равенства (2.3.8) неравенство (2.3.11) примет вид

$$\frac{\pi^2}{\alpha}\mu^\beta \ge \int_0^{\mu\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)_*^{mp/2}\,dt,$$

где $0 \le \mu < \infty$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(\mu) := \frac{\pi^2}{\alpha}\mu^\beta - \int_0^{\mu\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)_*^{mp/2}\,dt. \tag{2.3.12}$$

Рассуждения проведем для трех случаев:

а) $0 \le \mu < 1$;   б) $1 \le \mu < t_*/\pi$;   в) $t_*/\pi \le \mu < \infty$.

В случае а) сначала покажем, что в бесконечно малой окрестности нуля функция $\psi(\mu)$ является положительной. В самом деле из (2.3.12) с учетом определения функции $(1-\operatorname{sinc} t)_*$ получаем

$$\psi(\mu) := \frac{\pi^2}{\alpha}\mu^\beta - \int\limits_0^{\mu\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt =$$

$$= \mu^\beta\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^{mp+2}}{(3!)^{mp}(mp+2)}\cdot \mu^{mp+2-\beta}\right). \tag{2.3.13}$$

Следовательно, при $\mu \to 0_+$ из (2.3.13) и (2.3.9) сразу следует, что $\psi(\mu) > 0$. Из (2.3.12) и (2.3.8) вытекает, что $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Покажем, что на интервале $(0,1)$ функция (2.3.12) является знакопостоянной. Предполагая от противного, полагаем, что существует точка $\xi \in (0,1)$, в которой функция $\psi(\mu)$ меняет знак. В силу теоремы Ролля производная первого порядка функции ψ, то есть

$$\psi^{'}(\mu) = \pi^2\mu\left[\mu^{\beta-2} - (1-\operatorname{sinc}\mu\pi)^{mp/2}\right] := \pi^2\mu\gamma(\mu), \tag{2.3.14}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Кроме того, из (2.3.14) очевидно, что $\psi^{'}(0) = \psi^{'}(1) = 0$. Таким образом, функция $\psi^{'}(\mu)$ на отрезке $(0,1)$ имеет не менее четырех нулей и, в частности, из (2.3.14) следует, что функция

$$\gamma(\mu) = \mu^{\beta-2} - (1-\operatorname{sinc}\mu\pi)^{mp/2} \tag{2.3.15}$$

имеет на интервале $(0,1)$ не менее трех нулей. Но функция (2.3.14)(в силу (2.3.9) и неравенства $1/m < p \le 2$, $m \in \mathbb{N}$) является разностью двух функций, одна из которых выпукла вниз, а другая выпукла вверх. Из геометрических соображений очевидно, что на интервале $(0,1)$ функция $\beta(\mu)$ не может иметь более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость равенство (2.3.13) на отрезке $0 \le \mu \le 1$.

Пусть теперь $1 < \mu \le t_*/\pi$ или что то же $\pi < \mu\pi \le t_*$. В этом случае, как следует из равенств (2.3.14) и (2.3.15), при любом $\mu \in (1, t_*/\pi)$ всегда $\psi^{'}(\mu) > 0$, и таким образом неравенство (2.3.13) и в этом случае выполняется.

Рассмотрим наконец случай $t_*/\pi < \mu < \infty$. В этом случае, используя определение функции $(1-\operatorname{sinc} x)_*^{mp/2}$, равенство (2.1.14) запишем в виде

$$\psi(\mu) := \frac{\pi^2}{\alpha}\mu^\beta - \int\limits_0^{t_*} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}(\mu^2\pi^2 - t_*^2)\,(1-\operatorname{sinc} t_*)^{mp/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\psi^{'}(\mu) = \pi^2\mu\left[\mu^{\beta-2} - (1-\operatorname{sinc} t_*)^{mp/2}\right]. \tag{2.3.16}$$

Так как в силу (2.3.9)

$$\psi^{'}\left(\frac{t_*}{\pi}\right) = \pi t_*\left[\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{\beta-2} - (1-\operatorname{sinc} t_*)^{mp/2}\right] > 0,$$

то из (2.3.14) следует, что $\psi^{'}(\mu) > 0$ для любого $\mu \in [t_*/\mu, \infty)$. Это означает, что на рассматриваемом промежутке равенства (2.3.13) также имеет место. Теорема 2.3.2 полностью доказана. Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 2.3.2. *В условиях теоремы 2.3.2 справедливы равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f\in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= \sup\left\{|b_n(f)|:\ f\in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\} =$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)}n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Доказательство. Без умаления общности, доказательство проведем для коэффициентов $a_n(f)$. Воспользуемся очевидным равенством

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[f(x) - S_{n-1}(f,x)]\cos nx dx \tag{2.3.17}$$

и, используя неравенство Коши-Буняковского, а также оценку

$$E_n\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right) = n^{-r+2/p}\left\{\int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

полученную в теореме 2.3.2 из (2.3.17), получим оценку сверху

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f(x)\in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\}\le$$

$$\le\sup\left\{\|f-S_{n-1}(f)\|:\ f\in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\}\le$$

$$\le E_n\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}\le\mathcal{E}_n\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}\le\mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$= n^{-r+2/p}\left\{\int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.3.18)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_1(x) = n^{-r+2/p}\left\{\int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos nx.$$

Легко проверить, что $f_1(x)$ принадлежит шару $\widetilde{S}_{2n+1}$, а потому является элементом класса $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, а потому имеем:

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\ f(x)\in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right\}\ge|a_n(f_1)|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1(x)\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{n^{-r+2/p}\left\{\int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos nx\right\}\cos nxdx=$$

$$= n^{-r+2/p}\left(\int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 nxdx=$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)} n^{-r} \left(\frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi} t \, (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp/2} \, dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.3.19)$$

Сравнивая оценки сверху (2.3.18) и снизу (2.3.19), получаем

$$\sup\left\{ |a_n(f)| : \, f(x) \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi) \right\} =$$

$$= 2^{-(m/2+1/p)} n^{-r} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi} t \, (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp/2} \, dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Следствие 2.3.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.3.2. Тогда справедливы следующие равенства*

$$p_{2n-1}\left(W_{m,2/m}^{(r)}(\Phi), L_2\right) = p_{2n}\left(W_{m,2/m}^{(r)}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= E_n\left(W_{m,2/m}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n\left(W_{m,2/m}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} = \mathcal{E}_n^{\perp}\left(W_{m,2/m}^{(r)}(\Phi)\right)_{L_2} =$$

$$= 2^{-(m/2)} n^{-r} \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}\right)^{m/2} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

§2.4. Точные значения n-поперечников классов функций $\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h)$ и $\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$

В параграфе 2.1 мы определили следующие классы функций. $\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h)$ – класс функций $f\in L_2^{(r)}$, которые для любых $m,n\in\mathbb{N},\ 1/r<p\leq 2,\ r\in\mathbb{N}$ и произвольного $h\in(0,\pi/n]$ удовлетворяют ограничению

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^{\nu}dt\leq 1,$$

где $\nu\geq 0,\quad \varphi_n(t)=\sin\dfrac{nt}{2}+\dfrac{1}{2}\sin nt.$

$\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(\Phi):=\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$ – аналогичный класс функций $f\in L_2^{(r)}$, которые для любых $m,n,r\in\mathbb{N},\quad 1/r<p\leq 2$ и произвольного $h\in(0,\pi/n]$ удовлетворяют ограничению

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)(\varphi_n(t))^{\nu}dt\leq \Phi^p(h),\ \nu\geq 0,$$

где $\Phi(t)$ – произвольная непрерывная возрастающая при $t\geq 0$ функция такая, что $\Phi(0)=0$. Положим также

$$\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^m=\begin{cases}\left(\sin\dfrac{nt}{2}\right)^m, & \text{если}\ \ 0\leq t\leq\pi/n;\\ 1, & \text{если}\ \ t>\pi/n\end{cases}.$$

Имеют место следующие утверждения и следствия из них.

Теорема 2.4.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N},\quad r\in\mathbb{Z}_+$ и число $h>0$ удовлетворяет условию $0<nh\leq\pi$. Тогда справедливы равенства*

$$\rho_{2n-1}\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h),L_2\right)=\rho_{2n}\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h),L_2\right)=$$

$$=E_n\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h),L_2\right)_{L_2}=\mathcal{E}_n\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h),L_2\right)_{L_2}=\mathcal{E}_n^{\perp}\left(\mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h),L_2\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt\right)^{-1/p},$$

где $\rho_k(\cdot)$*–любой из* k*–поперечников Бернштейна* $b_k(\cdot)$*, Гельфанда* $d^k(\cdot)$*, Колмогорова* $d_k(\cdot)$*, линейного* $\delta_k(\cdot)$ *и проекционного* $\pi_k(\cdot)$.

Из теоремы 2.4.1 вытекает

Следствие 2.4.1. *При выполнении условий теоремы 2.4.1 для любого* $n, \nu \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|:\, f \in \mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)|:\, f \in \mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h)\right\} =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu} dt\right)^{-1/p},$$

где $a_n(f)$ *и* $b_n(f)$ *соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции* $f \in L_2$.

Доказательство теоремы 2.4.1 и следствия 2.4.1 повторяет схему рассуждений аналогичных теорем из предыдущего параграфа, поэтому мы здесь эти доказательств не приводим. Впрочем, эти доказательства можно вывести из доказательства более общего нижеследующего утверждения. Ради простоты, введем обозначение

$$\mathcal{J}_{m,n,p,\nu} = \int\limits_0^{\pi/n} \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu} dt.$$

Теорема 2.4.2. *Пусть* $1/r < p \le 2$, $r \in \mathbb{N}$ *и мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge$$

$$\ge \mathcal{J}^{-1}_{m,n,p,\nu}\begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu} dt, & \text{если}\ \ 0 < h \le \pi/n \\ \displaystyle\mathcal{J}_{m,n,p,\nu} + \int\limits_{\pi/n}^h \sin^{\nu}\frac{nt}{2}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu} dt, & \text{если}\ \ h \ge \pi/n. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Тогда для любых чисел $m,n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\rho_{2n-1}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi),L_2\right)=\rho_{2n}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi),L_2\right)=$$

$$=E_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2}=\mathcal{E}_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2}=\mathcal{E}^{\perp}_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$=2^{-(m+\frac{1}{p})}n^{-r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.4.2)$$

Доказательство. Из неравенства (1.4.8) с учетом определения класса $\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)$ при $h=\pi/n$ для проекционного n-поперечника получаем

$$\pi_{2n}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi),L_2\right)\le\pi_{2n-1}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi),L_2\right)\le$$

$$\le E_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2}\le\mathcal{E}_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2}\le\mathcal{E}^{\perp}_n\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi)\right)_{L_2}=$$

$$\le 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=2^{-\left(m+\frac{1}{p}\right)}n^{-r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.4.3)$$

С целью получения оценки снизу введем в рассмотрение шар полиномов $(2n+1)$-го порядка степени n:

$$S_{2n+1}=\Bigg\{T_n\in\Im_{2n+1}:$$

$$\|T_n\|\le 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\Bigg\}$$

и докажем включение $S_{2n+1} \subset \mathcal{F}_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$. В работе Л.В.Тайкова [39] доказано, что для произвольного полинома $T_n \in \Im_{2n+1}$ имеет место неравенство

$$\omega_m\left(T_n^{(r)},t\right) \le 2^m n^r \left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^m \|T_n\|.$$

Полученное неравенство возведем в степень p $(1/r < p \le 2,\ \ r \in \mathbb{N})$, умножим на функцию $\left(\sin\dfrac{nt}{2}+\dfrac{1}{2}\sin nt\right)^\nu$, $n,\nu \in \mathbb{N}$ и проинтегрируем в промежутке $[0,h]$ $(0 < h \le \pi/n)$ и с учетом первого из неравенств (2.4.1), будем иметь

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(T_n^{(r)},t\right)\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)^\nu dt \le$$

$$\le \int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)^\nu dt\cdot 2^{mp}\cdot n^{rp}\|T_n\|^p \le$$

$$\le \Phi^p(\pi/n)\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^\nu dt\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^\nu dt\right)^{-1} \le \Phi^p(h). \qquad (2.4.4)$$

Если же $h \ge \pi/n$, то с учетом определения функции $\left(\sin\dfrac{nt}{2}\right)_*^m$ и второго неравенства в условии (2.4.1) имеем:

$$\int\limits_0^h \omega_m^p\left(T_n^{(r)},t\right)\left(\sin\frac{nt}{2}+\frac{1}{2}\sin nt\right)^\nu dt \le$$

$$\le \Phi^p(\pi/n)\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^{mp}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^\nu\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^\nu dt\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^\nu dt\right)^{-1} =$$

$$= \Phi^p(\pi/n)\left\{\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\pi/n}^{h}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt\right\}\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt\right)^{-1}=$$

$$= \Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right)\left\{\mathcal{J}_{m,n,p,\nu}+\int\limits_{\pi/n}^{h}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt\right\}\mathcal{J}^{-1}_{m,n,p,\nu}\le$$

$$\le \Phi^p(h). \tag{2.4.5}$$

Таким образом, из неравенств (2.4.4) и (2.4.5) следует, что $S_{2n+1}\subset\mathcal{F}^{(r)}_{m,p}(h,\Phi)$. Учитывая определение бернштейновского n-поперечника, с учетом доказанного включения запишем

$$b_{2n-1}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi),L_2\right)\ge b_{2n}\left(\mathcal{F}^{(r)}_{m,p,\nu}(h,\Phi),L_2\right)\ge b_{2n}(S_{2n+1},L_2)\ge$$

$$\ge 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\frac{nt}{2}\right)^{\nu}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=2^{-(m+\frac{1}{p})}n^{-r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.4.6}$$

Утверждение теоремы 2.4.2 следует из сопоставления неравенств (2.4.3) и (2.4.6) с учетом соотношения (2.1.8) между всеми вышеперечисленными n-поперечниками. Легко заметить, что условию (2.4.1) удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(h)=h^{\alpha}$, где

$$\alpha=\frac{\pi}{2p}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp+\nu}(1+\cos t)^{\nu}dt\right)^{-1}. \tag{2.4.7}$$

Прежде всего докажем, что для числа $\alpha = \alpha(m,p,\nu)$ справедливы следующие границы значений

$$\frac{1}{2^{\nu}p} \le \alpha \le \frac{1}{p}(mp+\nu+1). \qquad (2.4.8)$$

В самом деле, с одной стороны, имеем:

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp+\nu}\,(1+\cos t)^{\nu} dt \le$$

$$\le 2^{\nu} \int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp+\nu}\, dt \le 2^{\nu}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\cdot 2^{\nu-1}, \qquad (2.4.9)$$

а с другой стороны,

$$\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp+\nu}\,(1+\cos t)^{\nu} dt \ge \int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{mp+\nu} dt \ge$$

$$\ge \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi}t\right)^{mp+\nu} dt = \frac{\pi}{2(mp+\nu+1)}. \qquad (2.4.10)$$

Неравенство (2.4.8) с учетом неравенств (2.4.9) и (2.4.10) вытекает из равенства (2.4.7). Положив теперь функцию $\Phi_*(h) = h^{\alpha}$ в неравенство (2.4.1), получим следующее неравенство

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha p} \ge$$

$$\ge \begin{cases} \mathcal{J}^{-1}_{m,n,p,\nu}\cdot \int\limits_0^h \left(\sin\dfrac{nt}{2}\right)^{mp+\nu}\left(1+\cos\dfrac{nt}{2}\right)^{\nu} dt, \text{ если } 0 < h \le \pi/n, \\ 1+\mathcal{J}^{-1}_{m,n,p,\nu}\cdot \int\limits_{\pi/n}^h \sin^{\nu}\dfrac{nt}{2}\left(1+\cos\dfrac{nt}{2}\right)^{\nu} dt, \quad \text{ если } h \ge \pi/n, \end{cases}$$

$$(2.4.11)$$

которое еще предстоит доказать.

Пусть сначала $0 < h \leq \pi/n$. Полагая $nh = \mu\pi$, первое неравенство (2.4.11) перепишем в виде

$$\mu^{\alpha p} \geq \frac{\int\limits_0^{\mu\pi/2} (\sin u)^{mp+\nu}(1+\cos u)^{\nu} du}{\int\limits_0^{\pi/2} (\sin u)^{mp+\nu}(1+\cos u)^{\nu} du}, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \tag{2.4.12}$$

Чтобы установить неравенство (2.4.12), введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) \overset{def}{=} \mu^{\alpha p} - \mathcal{J}_{m,p,\nu}^{-1} \cdot \int\limits_0^{\mu\pi/2} (\sin u)^{mp+\nu}(1+\cos u)^{\nu} du, \, 0 \leq \mu \leq 1, \tag{2.4.13}$$

где, ради краткости, обозначено $\mathcal{J}_{m,p,\nu} = \int\limits_0^{\pi/2} (\sin u)^{mp+\nu}(1 + \cos u)^{\nu} du$. Учитывая равенство (2.4.3), при $\mu \to 0+0$ получаем, что в окрестности нуля функция $\varphi(\mu)$ представляется в виде

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha p} \left(1 - \mathcal{J}_{m,p,\nu}^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{mp+\nu+1} \cdot O(\mu^{mp+\nu+1-\alpha p})\right). \tag{2.4.14}$$

Из (2.4.14) следует, что существует отрезок $[0, \xi]$, где $0 < \xi < 1$, на котором функция $\varphi(\mu)$ неотрицательна. Методом рассуждений работы М.Ш.Шабозова и С.Б.Вакарчука [58], буквальны повторением, легко установить, что функция $\varphi(\mu)$, определенная неравенство (2.4.12). для всех значений $\mu \in [0, \infty)$ является положительной. Этим неравенство (2.4.11) доказано, чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.2.

В завершении этого параграфа заметим, что доказанная теорема 2.4.2 в качестве следствия при $p = 2$, $\nu = 0$, $m \in \mathbb{N}$ содержит результат Л.В.Тайкова [39], а при $1/r < p \leq 2$, $\nu = 0, m \in \mathbb{N}$ результат М.Ш.Шабозова [57].

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Найдены новые точные неравенства типа Джексона–Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами с интегралами, содержащими усредненным с положительным весом обобщенными модулями непрерывности.

2. Вычислены точные значения различных n-поперечников для классов функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности высших порядков r-тых производных функций.

Результаты полученные в диссертации имеют теоретическое значение и могут быть использованы в теории приближений при исследовании экстремальных задач для отыскании точных констант в других функциональных пространствах, например в пространстве $L_p, 1 \leq p \leq \infty$.

Список литературы

[1] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ / Абилов В.А., Абилова Ф.В // Матем. заметки. 2004. Т.76, №6. С.803-811.

[2] Айнуллоев Н. Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 / Айнуллоев Н // Докл. АН ТаджССР. 1985. Т.28, №6. С.309-313.

[3] Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 / Айнуллоев Н // Докл. АН ТаджССР. 1984. Т.27, №8. С.415-418.

[4] Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 / Айнуллоев Н // В сб.: Применение функционального анализа в теории приближений, 1986. С.3-10.

[5] Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 / Бабенко А.Г // Матем. заметки. 1986. Т.39, №5. С.651-664.

[6] Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона-Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности / Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т // Матем. заметки. 1999. Т.65, №6. С.928-932.

[7] Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p / Бердышев В.И // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.3-16.

[8] Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 / Вакарчук С.Б // Матем. заметки. 1999. Т.66, №4. С.494-499.

[9] Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников / Вакарчук С.Б // Матем. заметки. 2001. Т.70, №3. С.334-345.

[10] Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях 2π-периодических функций и точных значениях n-поперечников функциональных классов в пространстве L_2 / Вакарчук С.Б // Укр. мат. журн. 2002. Т.54, №12. С.1603-1615.

[11] Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций / Вакарчук С.Б., Щитов А.Н // Укр. мат. журн. 2004. Т.56, №11. С.1458-1466.

[12] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 / Вакарчук С.Б // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

[13] Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 / Вакарчук С.Б // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-18.

[14] Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities / Vakarchuk S.B., Zabutna V.I // East Journal on Approximations. 2008. V.14, №4. P.411-421.

[15] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов / Вакарчук С.Б., Забутная В.И // Матем. заметки. 2009. Т.86, №3. С.328-336.

[16] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 / Вакарчук С.Б., Забутная В.И // Матем. заметки. 2012. Т.92, №4. С.497-514.

[17] Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами / Васильев С.Н // Докл. РАН. 2002. Т.385, №1. С.11-14.

[18] Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона / Есмаганбетов М.Г // Матем. заметки. 1999. Т.65, №6. С.816-820.

[19] Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций / Жук В.В // ДАН СССР. 1967. Т.201. С.263-266.

[20] Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p / Иванов В.И., Смирнов О.И // – Тула: ТулГУ. 1995. 192 с.

[21] Иванов А.В., Иванов В.И. Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(R^d)$ со степенным весом / Иванов А.В., Иванов В.И // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т.16, №4. С.180-192.

[22] Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen / Kolmogoroff A.N // Ann. of Math. 1936. V.37. P.107-110.

[23] Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций / Корнейчук Н.П // Докл. АН СССР. 1962. Т.145, №3. С.514-515.

[24] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения / Корнейчук Н.П //– М.: Наука 1987. 424 с.

[25] Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций / Корнейчук Н.П // Матем. заметки. 1982. Т.32, №3. С.669-674.

[26] Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz / Lebesgue H // Bull. S. V. F. 1910. V.38. P.184-210.

[27] Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 / Лигун А.А // Матем. заметки. 1978, №6. С.785-792.

[28] Лигун А.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона / Лигун А.А // Матем. заметки. 1985. Т.38, №2. С.248-256.

[29] Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 / Лигун А.А // Матем. заметки. 1988. Т.43, №6. С.757-769.

[30] Pinkus. A. n-Widths in Approximation Theory / Pinkus. A // – Berlin: Springer-Verlag. 1985. 291 p.

[31] Потапов М.К. О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений / Потапов М.К // Вест. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. мех. 1998, №3. С.38-48.

[32] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ / Руновский К.В // Матем. сборник. 1984. Т.185, №8. С.81-102.

[33] Руновский К.В. Прямая теорема о приближении "углом"в пространстве L_p, $0 < p < 1$ / Руновский К.В // Матем. заметки. 1992. Т.52, №5. С.93-96.

[34] Саидусайнов М.С. О точных значениях n-поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ / Саидусайнов М.С // ДАН РТ. 2010. Т.53, №6. С.420-423.

[35] Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости / Сендов Б., Попов В // – М.: Мир. 1988.

[36] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ / Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П // Матем. сборник. 1975. Т.98(140), №3(11). С.395-415.

[37] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 / Тайков Л.В // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

[38] Тайков Л.В. Наилучшее приближение дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 / Тайков Л.В // Матем. заметки. 1977. Т.22, №4. С.535-542.

[39] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 / Тайков Л.В // Матем. заметки. 1979. Т.25, №2. С.217-223.

[40] Тайков Л.В. Наилучшие приближения в $L_2(0, 2\pi)$ классов периодических функций с производными ограниченной вариации / Тайков Л.В // Матем. заметки. 1980. Т.28, №2. С.239-242.

[41] Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений / Тихомиров В.М // Усп. матем. наук. 1960. Т.15. Вып.3. С.81-120.

[42] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / Тихомиров В.М // – М.: Изд-во МГУ. 1976. 304 с.

[43] Foucart S., Kryakin Yu. and Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric / Foucart S., Kryakin Yu. and Shadrin A // Constr. Approx. 1999. Vol.65, №6. PP.157-179.

[44] Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближение периодических функций и значение поперечников множеств в L_2 / Хоразмшоев С.С // ДАН РТ. 2011. Т.54, №2. С.90-95.

[45] Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближении периодических функций и значении поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 / Хоразмшоев С.С // ДАН РТ. 2011. Т.54, №4. С.270-278.

[46] Хоразмшоев С.С. Наилучшее приближение периодических функций и значение поперечников классов функций в L_2 / Хоразмшоев С.С // Задачи математического анализа, теории функций, дифференциального

уравнения и ее приложения. Материалы респ. научн.конф. посв. 80-летию Душанбинского педагогического университета. 2011. С.100-103.

[47] Хоразмшоев С.С. О значении поперечников классов периодических функций в пространстве L_2 / Хоразмшоев С.С // Современные проблемы математического анализа и теории функций. Материалы межд. науч. конф., посв. 60-летию академика АН РТ Шабозова М.Ш. Душанбе 29-30 июня 2012 г. С.182-184.

[48] Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближение периодических функций в пространстве L_2 / Хоразмшоев С.С // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений 17-18 июля 2013. – Душанбе: Дониш. С.145-147.

[49] Хоразмшоев С.С. Аппроксимация периодических функций и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 / Хоразмшоев С.С // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан. 28-29 июня 2014. Худжанд: Меъроч. С.104-106.

[50] Хоразмшоев С.С. Точное неравенство Джексона – Стечкина и значения поперечников классов функций в L_2 / Хоразмшоев С.С // ДАН РТ. 2015. Т.58, №4. С.279-284.

[51] Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближении периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ / Хоразмшоев С.С // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений"– Душанбе, 27-28 апреля 2015. С.56-57.

[52] Хоразмшоев С.С. О значении поперечников классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 / Хоразмшоев С.С // Труды международной летней математической Школы-Конференции

С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г.). С.191-194.

[53] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 / Черных Н.И // Матем. заметки. 1967. Т.2, №5. С.513-522.

[54] Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 / Черных Н.И // Труды МИАН СССР. 1967. Т.88. С.71-74.

[55] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков / Шалаев В.В // Укр. матем. журнал. 1991. Т.43, №1. С.125-129.

[56] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О поперечниках классов периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ / Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш // ДАН РТ. 2006. Т.49, №2. С.111-115.

[57] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ / Шабозов М.Ш // Матем. заметки. 2010. Т.87, №4. С.616-623.

[58] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 / Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б // Analysis Mathematica. 2012. V.38. P.147-159.

[59] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 / Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А // ДАН России. 2010. Т.435, №2. С.178-181.

[60] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников / Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

[61] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенстве типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 / Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А // Сибирский матем. журн. 2011. Т.52, №6. С.936-948.

[62] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of certain classes of periodic functions in L_2 / Shabozov M.Sh., Yusupov G.A // J. of Approximation Theory. 2012. V.164. P.869-878.

[63] Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2/ Юссеф Х // Применение функционального анализа в теории приближении, Сб. научн. тр. – Калинин. 1998. С.100-114.

[64] Юсупов Г.А. О точных значениях поперечников некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ / Юсупов Г.А // ДАН РТ. 2008. Т.51, №12. С.810-817.

[65] Юсупов Г.А. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина и поперечники функциональных классов в L_2 / Юсупов Г.А // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып.2. С.124-135.