

## О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию

Хоразмшоева Саидджобира Саиднасиллоевича

**"О наилучшем приближении и значении поперечников классов периодических дифференцируемых функций"**,

представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

### **1. Актуальность избранной темы**

В диссертационной работе исследуются вопросы приближения периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, вычисляются точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина, находятся точные значения различных  $n$ -поперечников классов функций, задаваемых как обычными, так и обобщёнными модулями непрерывности.

В решении различных экстремальных задач теории приближения функций существенные результаты были получены С. Н. Бернштейном, А. Н. Колмогоровым, А. Зигмундом, Ж. Фаваром, М. Г. Крейном, Н. И. Ахиезером, С. М. Никольским, С. Б. Стечкиным, В. К. Дзядыком, Н. П. Корнейчуком, В. М. Тихомировым и их учениками и последователями. При этом результаты окончательного характера были получены на классах периодических функций, связанных с отысканием точных констант в неравенствах Джексона С. Б. Стечкиным, Н. П. Корнейчуком, В. В. Арестовым, В. И. Бердышевым, Н. И. Черныхом, Л. В. Тайковым, А. А. Лигуном, В. А. Юдиным, В. И. Буренковым, В. И. Ивановым, В. В. Жуком, А. Г. Бабенко, Д. В. Горбачёвым, F. Schurer, F. W. Steutel, S. Rafalson, С. Б. Вакарчуком, М. Ш. Шабозовым и другими.

При решении экстремальных задач теории приближения функций часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности. В некоторых случаях это позволяет получать результаты, раскрывающие содержательную сущность исследуемых экстремальных задач. Так, например, при решении некоторых вопросов аппроксимации М. К. Потаповым и его учениками были предложены, вместо обычных модулей непрерывности, различные обобщённые модули непрерывности, которые лучше приспособлены для изучения связей между гладкостными свойствами функций и наилучшими приближениями этих функций в весовых функциональных пространствах, чем обычные модули гладкости.

Полученные в диссертационной работе результаты связаны с обобщённым модулем непрерывности, предложенным в работах К. В. Руновского, Н. Н. Пустовойтова. Большое внимание в диссертации уделяется отысканию значений  $n$ -поперечников. Актуальность этой тематики связана с применениями поперечников в задачах оптимального восстановления, возникающих, в частности, при кодировании и обработке сигналов. Диссертационная работа С. С. Хоразмшоева, несомненно, относится к важному и актуальному направлению приближения периодических функций.

### **2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации**

Все утверждение теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и неравенства полностью обоснованы.

### **3. Достоверность и новизна полученных результатов**

Полученные в диссертации результаты достоверны, являются новыми и существенно дополняют исследования Н. И. Черныха, С. Б. Вакарчука, В. И. Забутной и М. Ш. Шабозова, основные публикации которых по теме диссертации приведены автором в списке литературы. Примеча-

тельно, что применяемый метод оценок сверху всех рассматриваемых  $n$ -поперечников и оценок снизу с привлечением хорошо известного метода В.М. Тихомирова позволяет сразу найти точное значение всех  $n$ -поперечников.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Найдены новые точные неравенства типа Джексона–Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами с интегралами, содержащими усредненные с положительным весом модули непрерывности.
2. Вычислены точные значения различных  $n$ -поперечников классов функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности высших порядков  $r$ -х производных функций.

#### 4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов

Основные результаты диссертации носят теоретический характер и имеют важное значение для дальнейшего развития теории приближения функций. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся проблемами теории приближения функций, в том числе в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Институте математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан, в учебном процессе при чтении спецкурсов в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Уральском федеральном университете, Таджикском национальном университете, Хорогском государственном университете им. М. Назаршоева и других высших учебных заведениях.

#### 5. Оценка содержания диссертации, ее завершенность

Диссертация С. С. Хоразмшоева объемом 78 страниц состоит из введения, двух глав и списка цитированной литературы из 65 наименований.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные результаты, полученные автором.

В первой главе диссертации доказывается ряд точных неравенств типа Джексона – Стечкина между величиной наилучшего приближения тригонометрическими полиномами дифференцируемых функций  $f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]$  и  $L_p$  ( $0 < p \leq 2$ )-нормой, обобщенной и обычной модулей непрерывности  $m$ -го порядка ее старшей производной  $f^{(r)} \in L_2$  (теоремы 1.2.1, 1.3.1 и 1.4.1, следствий 1.2.1, 1.3.1 и 1.4.1). Из полученных в этих теоремах результатов, в частности, вытекают некоторые результаты Н. И. Черныха (Матем. заметки, 1967, т. 2, №5, с.513-522), М. Ш. Шабозова (Матем. заметки, 2010, т. 87, №4, с. 616-623), М. Ш. Шабозова и Г. А. Юсупова (Матем. заметки, 2011, т. 90, №5, с.764-775).

Вторая глава диссертационной работы посвящена отысканию точных значений различных  $n$ -поперечников, у которых усреднённое с весом значение  $L_p$  ( $0 < p \leq 2$ )-нормы обычных и обобщенных модулей непрерывности  $m$ -го порядка ограничена единицей, либо ограничена заданной мажорантой  $\Phi(t)$ , удовлетворяющей некоторым ограничениям (теоремы 2.2.1 – 2.2.3, 2.3.1, 2.3.2, 2.4.1, 2.4.2; следствия 2.2.2, 2.3.2, 2.4.1). Эти теоремы содержат, в частности, ранее доказанные результаты Х. Юссефа (Сборник научных трудов – Калинин, 1998, С. 100-114), Л.В. Тайкова (Матем. заметки, 1979, т. 25, №2, с. 217-223), М.Ш. Шабозова (Матем. заметки, 2010, т. 87, №4, с. 616-623).

Отметим, что найденные точные значения различных  $n$ -поперечников классов функций затем применяются в решении экстремальной задачи вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций, рассматриваемых в диссертации.

Диссертационная работа С.С. Хоразмшоева является самостоятельной, завершенной научной квалификационной работой.

## 6. Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования

К достоинству диссертации можно отнести следующие полученные в ней основные результаты:

1. Доказаны новые точные неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие наилучшие приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами с интегралами, содержащими усредненные с положительным весом как обычные, так и обобщенные модули непрерывности  $m$ -го порядка.
2. Вычислены точные значения различных  $n$ -поперечников классов функций, определяемых обычными и обобщенными модулями непрерывности высших порядков  $r$ -тых производных функций.

В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако имеется ряд замечаний. Вот некоторые из них:

1. Так, например, в формуле (2.2.5) на стр. 45 8-я строка сверху вместо обозначение « $p_{2n}(B_{2n+1}, L_2)$ » должно быть « $b_{2n}(B_{2n+1}, L_2)$ ».
2. Надо отметить, что условие на мажоранту в теореме 2.4.2 является довольно ограничительным. Приведенная степенная функция, которая удовлетворяет этому условию, надо полагать, сама по себе является довольно сложной. Однако существует несколько аргументов в пользу полученного результата. Во-первых, отыскание точных результатов поперечников, как правило, является нелегкой задачей и любой результат в этом направлении является ценным. Во-вторых, такого рода задачи рассматривали многие известные ученые и не всегда удавалось получить общий результат. В-третьих, дальнейшее исследование сформулированных задач в конце концов может привести к менее ограничительным условиям на мажоранты.
3. Для полноты изложения в работе стоило бы упомянуть ряд совсем недавних результатов К. В. Руновского и Н. В. Омельченко (матем. сб., 208:2 (2017), 70–87; матем. заметки, 100:3 (2016), 421–432; матем. заметки, 99:4 (2016), 574–587).
4. Работа содержит ряд грамматических и орфографических ошибок (см., например, стр. 22, 43, 70). В автореферате опечатки и неточности не обнаружены.

Указанные замечания не являются существенными и не влияют на значимость результатов.

## 7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации

Автореферат соответствует требованиям ВАК МОН РФ, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

## 8. Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011

Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11.-2011. В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ГОСТ в полной мере.

## 9. Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным "Положением о присуждении ученых степеней" по пунктам 10, 11 и 14

Диссертация Хоразмшоева С.С. соответствует критериям, установленным "Положением о присуждении ученых степеней" по пунктам 10, 11 и 14.

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и положения в теории аппроксимации функций, выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствует о личном вкладе автора диссертации в теорию приближения функций. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении разного рода экстремальных задач теории приближения функций.

(П.11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в 9 научных работах, три из которых входят в перечень ВАК МОН РФ.

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются.

Диссертация Хоразмшоева Саидджобира Саиднасиллоевича на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории приближения функций, и полностью соответствует требованиям П. 9 Положения о присуждения ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Автор работы Хоразмшоев Саидджобир Саиднасиллоевич заслуживает присвоения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент  
доктор физико-математических наук,  
по специальности 01.01.01 – вещественный,  
комплексный и функциональный анализ,  
ведущий научный сотрудник лаборатории  
вычислительных методов  
механико-математического факультета,  
ФГБОУ ВПО Московского государственного  
университета имени М.В. Ломоносова

  
А.Р. Алимов  
01.06.2017 г.

Адрес: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы,  
МГУ, д.1, Главное здание, механико-математический факультет  
Телефон: +7 (495) 939 56 32  
E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Подпись А. Р. Алимова удостоверяю

И.о. декана механико-математического  
факультета МГУ имени М. В. Ломоносова  
профессор

