На правах рукописи

Мамадкаримова Мухаббат Саидкаримовна

О НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, РАЗРЕШИМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

01.01.01 - Вещественный, комплексный
и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 6

Работа выполнена в Таджикском национальном университете

НАУЧНЫЕ РУКОВОДИТЕЛИ: доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор
Илолов Мамадшо

кандидат физико-математических наук,
Джангибеков Гулходжа

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Баскаков Анатолий Григорьевич**
доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет, профессор кафедры нелинейных колебаний;

Саидусайнов Муким Саидусайнович
кандидат физико-математических наук, Таджикский государственный университет коммерции, доцент кафедры высшей математики и естественно научных дисциплин

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова

Защита состоится *"27 января"2017 г.* в 12^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул.Айни, 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан "___" ____________ 2016 г.

Учёный секретарь диссертационного совета **Хайруллоев Ш.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Известно, что наиболее мощным методом доказательства существования решений основных задач математической физики является метод сингулярных интегральных уравнений.

Рассматриваемые в работе двумерные сингулярные интегральные уравнения относятся к классическим сингулярным операторам Михлина - Кальдерона - Зигмунда, для которых ранее методом сведения к краевым задачам для эллиптических дифференциальных уравнений (А.Джураев[1], В.С.Виноградов[2]), или же методом факторизации символической матрицы и построением алгебры, порождённой этими операторами (И.Б.Симоненко[3], Р.В.Дудучава[4], И.И.Комяк[5], Н.Л.Василевский[6], Г.Джангибеков[7], К.Х.Бойматов и Г.Джангибеков[8]) найдены условия нётеровости в функциональных пространствах $L^p(D)(1 < p < \infty)$ и получены формулы для подсчёта индекса. Важным этапом в развитии исследований этих сингулярных интегральных уравнений является вопрос построения регуляризаторов сингулярных операторов и построение явных формул для решения сингулярных уравнений.

Цель работы

1. Получить в явном виде двусторонние ограниченные регуляризаторы для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с чётной характеристикой и операторов Бергмана по ограниченной области, а также по всей плоскости.

2. Построить в лебеговых пространствах с весом явное решение рассматриваемых классов сингулярных интегральных уравнений с постоянными коэффициентами в замкнутом виде.

Метод исследования. При обосновании полученных в диссертации

[1] А.Джураев. Метод сингулярных интегральных уравнений.М. Наука,1987 г. 415 с.

[2] В.С.Виноградов. О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения//ДАН СССР.1978.-т.241.№2,-с.272-274.

[3] И.Б.Симоненко. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений.I.II.//Изв.АН СССР,сер.матем.1965, т.29,№3,4.с.567-580, с 757-782.

[4] R.Duduchava. On multidimensional singular integral operators.I.II.// J.of operator theory.1984.v.11,p.41-76,199-214.

[5] И.И.Комяк. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения//Докл.АН БССР.-1977,т.21,№2,с.1074-1077.

[6] Н.Л. Василевский. Об алгебре, порождённой двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами//ДАН СССР.-1983.-т.271, №5.с.1041-1044.

[7] Г.Джангибеков. Нётеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов//Известия ВУЗов матем.1991,№1, с.19-28

[8] К.Х.Бойматов и Г. Джангибеков. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук, 1988, т. 43, выпуск (261), с. 171-172.

результатов используются методы комплексного анализа, методы функционального анализа, включая теорию банаховых алгебр, метод факторизации операторов.

Научная новизна исследований

1. Построены двусторонние ограниченные регуляризаторы для четырёхкомпонентного сингулярного интегрального оператора по ограниченной области, а также по всей плоскости, и в случае постоянных коэффициентов в замкнутом виде найдено явное решение уравнение с такими операторами.

2. Построены двусторонние ограниченные регуляризаторы для четырёхкомпонентного интегрального оператора с ядрами Бергмана, и в случае постоянных коэффициентов в замкнутом виде найдено явное решение уравнения с такими операторами.

3. Для системы сингулярных интегральных операторов по ограниченной области а лебеговых пространствах с весом построены ограниченные регуляризаторы, и в случае постоянных матриц-коэффициентов найден обратный оператор.

Практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть применены при исследовании различных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на Международной научной конференции, посвящённой 80-летию академика АН РТ А.Д.Джураева (Душанбе, 07-08 декабря 2012г.), на Международной научной конференции, посвящённой 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июля 2013г.), на Международной научной конференции, посвящённой 20-летию Конституции РТ (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), а также на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений ТНУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-8]. В совместных работах [1,2,6] научному руководителю Г. Джангибекову принадлежат постановка задач и выбор метода доказательства.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы из 60 наименований и занимает 79 страниц машинописного текста, набранного на LaTeXe. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй с номером раздела, третьей указывает на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном разделе.

Содержание диссертации

В **первой главе** работы в лебеговом пространстве с весом L^p изучаются некоторые классы двумерных интегральных операторов по ограниченной области D, а также случай, когда сингулярный интеграл распространен по комплексной плоскости E. Для этих операторов посредством метода факторизации сингулярных операторов построены двухсторонние регуляризаторы указанных операторов, а в случае постоянных коэффициентов решения сингулярных уравнений построены в явном виде.

Во **второй главе** работы рассматриваются сингулярные интегральные операторы с матричными коэффициентами и интегральные операторы с ядром Бергмана. Для указанных операторов в лебеговых пространствах с весом построены двухсторонние регуляризаторы, а также в случае постоянных коэффициентов решения интегральных уравнений построены в явном виде.

Перейдем к более конкретному изложению результатов работы.

Раздел 1 первой главы носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В **разделе 2** в пространстве

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D),\ ||f||_{L_{\beta-2/p}} = ||F||_{L_p}\}$$

$(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ рассматривается следующий оператор

$$A \equiv a(z)I + b(z)S_m, \tag{1}$$

где I - тождественный оператор, оператор S_m действует по формуле

$$(S_m f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

m - натуральное число, ds_ζ - элемент плоской меры Лебега, $\theta = arg(\zeta - z)$, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, D -ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой; $a(z), b(z)-$ непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции.

Прежде всего отметим, что И.Н.Векуа[9] в связи с нахождением гомеоморфизма системы Бельтрами

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} - q(z)\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

впервые изучил следующее простейшее сингулярное интегральное уравнение

$$f(z) - q(z)(S^E f)(z) = g(z), \tag{2}$$

где $q(z)$ - заданная в комплексной плоскости E ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая неравенству $|q(z)| \leq q_0 < 1$ и

$$(S^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta, \quad z \in E.$$

На основе принципа сжатых отображений он показал, что уравнение (2) безусловно и однозначно разрешимо в пространстве $L^p(E)$, при p близким к двум. Впоследствии В.С.Виноградов[2], и И.И.Комяк[10] доказали справедливость утверждения о существовании ограниченного обратного оператора $(I - qS^E)^{-1}$, действующего в $L^p(E)$, при всех $p > 1$. Далее Г.Ф.Манджавидзе[11] в связи с применением уравнения (1) к граничным задачам со смещением ввёл в рассмотрение новое сингулярное интегральное уравнение:

$$f(z) + q(z)(S_q^E f)(z) = g(z), \tag{3}$$

где

$$(S_q^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z}))^2} ds_\zeta.$$

Указанный автор показал, что при условии непрерывности функции $q(z)$: $|q(z)| \leq q_0 < 1$, оператор $I + q(z)S_q^E$ является левым и правым регуляризатором оператора $I - q(z)S^E$ в пространствах Гёльдера $H_\alpha(0 < \alpha < 1)$ и в пространстве Лебега $L^p(E)(1 < p < \infty)$.

[9] И.Н.Векуа. Обобщённые аналитические функции. М.:Физматгиз, 1959, 672 с.

[10] И.И.Комяк. О разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений// ДАН СССР, 1980. т.250.№6, с.1307-1310.

[11] Г.Ф.Манджавидзе. Применение теории обобщённых аналитических функций к изучению задач сопряжения со смещением // В кн.: Дифференциальные интегральные уравнения. -Тбилиси.-1979, с. 165-1186.

Рассматривая в ограниченной области D с границей Ляпунова Γ оператор (1), отметим, что из результатов Г.Джангибекова[12] следует, что для нётеровости оператора A в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$|a(z)| > |b(z)| \tag{4}$$

для всех $z \in \bar{D}$, а при выполнении условия (4) оператор A имеет в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ограниченный обратный.

Прежде всего заметим, что из (4) следует, что $a(z) \neq 0$ в $\bar{D}$ и поэтому вместо оператора A будем рассматривать оператор

$$A_0 \equiv I - q(z)S_m, \tag{5}$$

где $q(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$, т.е. $|q(z)| < 1, z \in \bar{D}$.

Далее вводится следующий сингулярный интегральный оператор

$$(S_{mq}f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(|\zeta - z|)^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{[(\zeta - z)^m + (-1)^{m-1} q(z)(\bar{\zeta} - \bar{z})^m]^2}. \tag{6}$$

Характеристика $u(z,\theta) \quad (\theta = arg(\zeta - z))$ оператора S_{mq} имеет вид

$$u(z,\theta) = \frac{e^{-2im\theta}}{(1 + (-1)^{m-1} q(z) e^{-2im\theta})^2}.$$

Очевидно, что $u(z,\theta)$ является ограниченной функцией и, как нетрудно убедиться, удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{2\pi} u(z,\theta) d\theta = 0, \quad z \in \bar{D}.$$

Поэтому из результатов А.Кальдерона и А.Зигмунда[13] следует, что оператор S_{mq} ограничен в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$. Отметим, что оператор S_{mq} является естественным обобщением оператора S_q из (3).

Показано, что имеют место:

Теорема 1.2.1.*Пусть в (4)* $|q(z)| < 1, \quad z \in \bar{D}$. *Тогда оператор*

$$R = I + q(z)S_{mq}$$

[12] Г. Джангибеков. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов//ДАН СССР, 1989, т.308, №5, с.1037-1047.

[13] A.Calderon, A.Zigmund. On singular integrals // American j.math.-1956.-78.-p.289-309.

является левым и правым регуляризатором оператора

$$A_0 = I - q(z)S_m$$

в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty.$

Теорема1.2.2.*Пусть* $D = \{z : |z| < 1\}$ *и* $q(z) = const, |q| < 1.$ *Тогда оператор*

$$A^{-1} = I + qS_{mq}$$

является правым и левым обратным оператором для оператора

$$A_0 = I - qS_m$$

в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty.$

В **разделе 3** настоящей работы рассматривается четырёхкомпонентный сингулярный интегральный оператор вида:

$$A \equiv aI + bK + cS + d\overline{S}K + \nu\overline{B} + \delta BK, \tag{7}$$

где I - единичный оператор,

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (Kf)(z) = \overline{f(z)},$$

$$(\overline{S}f)(z) = (KSKf)(z), \quad (Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(1 - z\overline{\zeta})^2}ds_\zeta,$$

$$(\overline{B}f)(z) = (KBKf)(z),$$

ds_ζ - элемент площади, D - конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Г, первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, второй интеграл имеет особенность лишь на границе Г, понимается в смысле Лебега и обычно называется оператором Бергмана.

Из работ И.Н.Векуа[9] и А.Д.Джураева[1], известно, что операторы типа (7) играют важную роль в теории обобщённых аналитических функций, а также тесно связаны с краевыми задачами для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. При различных дополнительных предположениях относительно коэффициентов оператор A изучался ранее в работах А.Джураева[1], Н.Н.Комяка[14], К.Х. Бойматова и Г. Джангибекова[8], Г. Джангибекова[12] и Н.Раджабова[15].

[14]И.И.Комяк. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Бергмана // Докл. АН БССР, 1979, т. 23, №1, с. 8-11.

[15]Н.Р.Раджабов. Обращение некоторых двумерных интегральных уравнений // Известия АН Тадж. ССР., отд.физ.тех. и хим. наук, №22 (15), 1962,с.8-10.

В частности, из работы Г.Джангибекова[12] для оператора A следует, что нётеровые операторы A разделяются на два гомотопических класса, которые эффективно описываются через коэффициенты оператора A, т.е. необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчёта индекса оператора A в лебеговых пространствах $L_{\beta-2/p}(D), (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ получены в эффективном виде.

Что касается явных формул для решения уравнения $Af = g$, то они получены лишь в простейших случаях $b = c = \nu = \delta = 0$, (А.Джураев[16], И.И.Комяк[17], а также Г. Джангибеков[18]).

В этом разделе рассматривается вопрос нахождения регуляризаторов оператора A в явном виде и в случае постоянных коэффициентов нахождения решения уравнения $Af = g$ с оператором из (7) в замкнутом виде.

Введём следующие обозначения:

$$\triangle_1 = |a|^2 - |b|^2, \quad \triangle_2 = |d|^2 - |c|^2, \quad \lambda = \overline{a}c - b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$$\nu_1 = \overline{a}\nu - b\overline{\delta}, \quad \delta_1 = \overline{a}\delta - b\overline{\nu}, \quad \nu_2 = \overline{d}\nu - c\overline{\delta}, \quad \delta_2 = \overline{d}\delta - c\overline{\nu},$$

$$q_1 = \begin{cases} \frac{\triangle_2 - \triangle_1 + sign\triangle_1\sqrt{(\triangle_2-\triangle_1)^2 - 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } \lambda = 0 \end{cases}$$

$$q_2 = \begin{cases} \frac{\triangle_2 - \triangle_1 + sign\triangle_2\sqrt{(\triangle_2-\triangle_1)^2 - 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \frac{\overline{\mu}}{\triangle_1 + q_1\overline{\lambda}}, \qquad \beta_2 = \frac{\mu}{\triangle_2 + q_2\overline{\lambda}}.$$

Теорема 1.3.1.*Для нётеровости уравнения (7) в* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D), \quad 1 < p < \infty, \ 0 < \beta < 2$ *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух (исключающих друг друга) условий:*

$$\begin{gathered} |\triangle_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для} \ \ \forall z \in \overline{D}, \\ \triangle_1(t) + \nu_1(t) - q_1(t)\beta_1(t)\overline{\delta_1(t)} \neq 0 \qquad \forall t \in \Gamma, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} |\triangle_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для} \ \ \forall z \in \overline{D}, \\ \nu_2(t) + \beta_2(t)(\triangle_2(t) - q_2(t)\overline{\delta_2(t)}) \neq 0 \quad \text{при} \ \ \forall t \in \Gamma. \end{gathered} \tag{9}$$

[16]А.Д.Джураев. Докл. АН Тадж. ССР, 1971, т. 23, №4. с. 11-14.

[17]И.И.Комяк. Условия нётеровости и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области// Дифференциальные уравнения.-1980, т. 16, №2, с. 328-343.

[18]Г.Джангибеков. Формула обращения для одного двумерного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН Тадж. ССР, 1984, т. 27, №5, с. 243-248.

При этом, если выполнено (8), то индекс оператора A

$$\kappa = 2Ind_{\Gamma}\{\triangle_1(t) + \nu_1(t) - q_1(t)\beta_1(t)\overline{\delta_1(t)}\},$$

а если выполнено (9), то

$$\kappa = 2Ind_{\Gamma}\{\nu_2 + \beta_2(t)\triangle_2(t) - q_2(t)\overline{\delta_2(t)}\ \overline{\beta_2(t)}\}.$$

Следовательно оператор A имеет (правый и левый) регуляризаторы. Доказана следующая:

Теорема 1.3.2.*Пусть выполнено условие (8), тогда оператор A имеет в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ двухсторонний регуляризатор вида*

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \overline{\beta_1}\ \overline{S}K - \frac{\nu^* + |\beta_1|^2}{1+\nu_1^*}\overline{B}\Big)\times \\ \times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_1^n(S + \frac{\delta_1^*}{q_1}BK)^n\Big)\triangle_1^{-1}T_1 \end{aligned} \tag{10}$$

а если выполнено условие (9), то

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\overline{\beta_2}I - \overline{S}K - \frac{1+\beta_2}{1+\nu_2^*}\overline{B}\Big)\times \\ \times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_2^n(S + \frac{\delta_2^*}{q_2}BK)^n\Big)\triangle_2^{-1}T_2 \end{aligned} \tag{11}$$

где здесь операторы T_1 и T_2 определяются по формулам

$$T_1 = \Big(\overline{a} + q_1\beta_1\overline{b}\Big)I - \Big(b + q_1\beta_1 a\Big)K,$$
$$T_2 = \Big(\overline{d} + q_2\beta_2\overline{c}\Big)I - \Big(c + q_2\beta_2 d\Big)K$$

и $\delta_j^*(z)$, $\nu_j^*(z)$ $(j = 1,2)$ такие непрерывные в $\overline{D}$ функции, которые на Γ имеют значения.

$$\begin{aligned} \delta_1^*(z) = \frac{\delta_1 - q_1\beta_1(\triangle_1 + \overline{\nu_1})}{\triangle_1 + \overline{\nu_1} - \overline{q_1}\ \overline{\beta_1}\delta_1}, \quad \delta_2(z) = \frac{\delta_2 - q_2(\beta_2\overline{\nu_2} + \triangle_2)}{\triangle_2\beta_2 + \overline{\nu_2} - \overline{q_2},\ \overline{\beta_2}\delta_2}, \\ \nu_1^*(z) = \frac{\nu_1 - q_1\beta_1\overline{\delta_1}}{\triangle_1}, \quad \nu_2^*(z) = \frac{\nu_2 - q_2\beta_2\overline{\delta_2}}{\triangle_2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 1.3.3.*Пусть коэффициенты уравнения (7) постоянны и выполнено условие*

$$|a(t) + \nu(t)| \neq |b(t) + \delta(t)|,\ t \in \Gamma. \tag{13}$$

Тогда при выполнении одного из условий (8) или (9) уравнение (7) имеет в пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(0<\beta<2,\ 1<p<\infty)$ *единственное решение*

$$f(z) = (A^{-1}g)(z),$$

где

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \overline{\beta_1}\ \overline{S}K - \frac{\nu_1^* + |\beta_1|^2}{1+\nu_1^*}\overline{B}\Big)\times$$
$$\times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_1^n (S + \frac{\delta_1^*}{q_1}BK)^n\Big)\triangle_1^{-1}T_1,$$

если выполнено (8) и

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\overline{\beta_2}I - \overline{S}K\ - \frac{1+\overline{\beta}_2\nu_2^*}{1+\nu_2^*}\overline{B}\Big)\times$$
$$\times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_2^n (S + \frac{\delta_1^*}{q_1}BK)^n\Big)\triangle_2^{-1}T_2,$$

если выполнено (9).

Если условие (13) нарушено, то однородное уравнение (7) имеет одно линейно-независимое решение

$$f(z) = \overline{a} + \overline{\nu} - b - \delta$$

а для разрешимости неоднородного уравнения (7) необходимо и достаточно выполнение одного условия

$$Re\iint\limits_{|z|<1} \omega g(z) ds_\zeta = 0,$$

где $\omega = \overline{a} + \overline{\nu} - \overline{b} - \overline{\delta}$ *- решение однородного сопряжённого (7) уравнения.*

В **разделе 4 главы 1** рассматривается оператор вида (7) по всей комплексной плоскости E, пополненной до E_1 одной бесконечно удалённой точкой, т.е. в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(E_1)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ рассматривается следующий оператор

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(S^E f)(z) + d(z)(\overline{S}^E\overline{f})(z), \tag{14}$$

где

$$(S_1^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E {}_1\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}ds_\zeta, \quad (\overline{S}_1^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E {}_1\frac{f(\zeta)}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}ds_\zeta, \quad z\in E, \tag{15}$$

коэффициенты a, b, c, d - непрерывны на E_1.

Следует отметить, что нётеровые свойства оператора A в лебеговых пространствах $L^p(E), p > 1$ изучены в работе Н.Н.Комяка[14]. Из указанной работы, а также из работы К.Х. Бойматова и Г.Джангибекова[8] следует, что для нётеровости оператора A в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(E)$ необходимо и достаточно, чтобы всюду в E_1 выполнялось одно из неравенств

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для любых} \quad z \in E_1, \tag{16}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для любых} \quad z \in E_1, \tag{17}$$

где

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \quad \Delta_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$
$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)}, \quad \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z),$$

при этом нётеровость оператора A совпадает с обратимостью оператора.

В этом разделе находятся регуляризаторы оператора A из (14), и при постоянных коэффициентах построен обратный оператор A^{-1}.

Теорема 1.4.2.*Пусть выполнено условие (16), тогда оператор A из (14) имеет в* $L^p_{\beta-2/p}(E)$ *двусторонний регуляризатор вида*

$$R = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \beta_1\ \overline{S}^E K\Big)\Big(I + q_1 S^E_{q_1}\Big)\Delta_1^{-1}T_1, \tag{18}$$

а если выполнено условие (17), то

$$R = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\beta_2 I - \overline{S}^E K\Big)\Big(I + q_2 S^E_{q_2}\Big)\Delta_2^{-1}T_2, \tag{19}$$

где операторы $S^E_{q_1}$ *и* $S^E_{q_2}$ *определяются по формуле (3) и*

$$T_1 = \Big(\overline{a} + q_1\beta_1\overline{b}\Big)I - \Big(b + q_1\beta_1 a\Big)K,$$
$$T_2 = \Big(\overline{d} + q_2\beta_2\overline{c}\Big)I - \Big(c + q_2\beta_2 d\Big)K,$$

а функции $\beta_1, \beta_2, q_1, q_2$ *определены в предыдущем разделе.*

Теорема1.4.3.*Пусть коэффициенты уравнения (14) постоянны, тогда при выполнении одного из условий (16) или (17) уравнение (14) имеет в пространствах* $L^p_{\beta-2/p}(E), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ *единственное решение:*

$$f(z) = (A^{-1}g)(z),$$

где

$$A^{-1}=\frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I-\beta_1\ \overline{S}^E K\Big)\Big(I+q_1S^E_{q_1}\Big)\Delta_1^{-1}T_1,$$

если выполнено условие (16), и

$$A^{-1}=\frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\beta_2 I-\overline{S}^E K\Big)\Big(I+q_2S^E_{q_2}\Big)\Delta_2^{-1}T_2,$$

если выполнено (17).

В **разделе 1 главы 2** настоящей работы в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим следующее интегральное уравнение с операторами Бергмана

$$\begin{aligned}(Af)(z)\equiv a(z)f(z)+\frac{c(z)}{\pi}\iint\limits_D\frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2}+\frac{d(z)}{\pi}\iint\limits_D\frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2}+\\ +\frac{e(z)}{\pi}\iint\limits_D\frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2}+\frac{q(z)}{\pi}\iint\limits_D\frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2}=g(z),\quad z\in\overline{D},\end{aligned}\tag{20}$$

в котором $a(z), c(z), d(z), e(z), q(z)$ - заданные в замкнутом круге $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные непрерывные функции. Комплекснозначные непрерывные функции $g(z)$ и $f(z)$ соответственно задаются и ищутся в весовом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D)=\{f(z):|z|^{\beta-2/p}f(z)=F(z)\in L^p(D),||f||_{L^p_{\beta-2/p}(D)}=||F||_{L^p(D)}\},$$

где $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$.

Вопрос нётеровости и индекс оператора A в лебеговом пространстве $L^p(D)$ изучались ранее в работах А.Джураева[19], Н.Н.Комяка[14], Н.Л.Василевского[6], Г.Джангибекова[7]. Из результатов работы Г.Джангибекова[7] следует, что для нётеровости оператора A в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a(z)\neq 0,\ z\in\overline{D}\ \text{и}\ \Delta(t)=(a(t)+c(t))(\overline{a(t)}+\overline{d(t)})-e(t)\overline{q(t)}\neq 0,\ t\in\Gamma,\tag{21}$$

при этом индекс оператора A равен $\varkappa = 2Ind_\Gamma\Delta(t)$.

В разделе 1 главы 2 диссертации в весовых пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, найден двухсторонний регуляризатор оператора A,

[19]А.Д.Джураев. О некоторых двумерных интегральных уравнениях по ограниченной области // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. -Тбилиси. 1979,. 89-94.

а в случае постоянных коэффициентов уравнение (20) решено в замкнутом виде.

Введем в $\overline{D}$ вспомогательную функцию $a_1 = \dfrac{1}{a}$ и такие непрерывные в $\overline{D}$ функции c_1, d_1, e_1, q_1, что на границе Γ области $\overline{D}$ соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{e\overline{q} - (\overline{a} + \overline{d})c}{a\Delta}, \quad e_1 = -\frac{e}{\Delta}, \\ d_1 &= \frac{\overline{e}q - (\overline{a} + \overline{c})d}{a\overline{\Delta}}, \quad q_1 = -\frac{q}{\overline{\Delta}}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\Delta = (a + c)(\overline{a} + \overline{d}) - e\overline{q}$. Показано, что имеют место:

Теорема 2.1.1.*Пусть выполнены условия (21). Тогда оператор*

$$R = a_1(z)I + c_1(z)B + d_1(z)\overline{B} + e_1(z)BK + q_1(z)\overline{B}K$$

является двухсторонним регуляризатором оператора A из (20) в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$, где $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$,

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2}, \quad (\overline{B}f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2}.$$

Теорема 2.1.2.*Пусть коэффициенты оператора A из (20) постоянны и удовлетворяют условиям (21) и кроме того*

$$\Delta_1 = |a + c + d|^2 - |e + q|^2 \neq 0,$$

тогда однородное уравнение $Af = 0$ в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ нетривиальных решений не имеет, а неоднородное $Af = g$ безусловно разрешимо и его решение даётся формулой

$$\begin{aligned} f(z) =& a_1 g(z) + \frac{c_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{d_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{e_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{q_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{\alpha}{\pi}\iint\limits_D g(\zeta)ds_\zeta + \frac{\tau}{\pi}\iint\limits_D \overline{g(\zeta)}ds_\zeta \equiv (A^{-1}g)(z), \quad z \in \overline{D}, \end{aligned} \tag{23}$$

где константы a_1, c_1, d_1, e_1, q_1 определяются по формулам (22) и

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(e + q)[\overline{cq_1} + \overline{d}\overline{e_1} + \overline{e}c_1 + \overline{q}d_1] - (\overline{a} + \overline{c} + \overline{d})[cd_1 + dc_1 + e\overline{e_1} + q\overline{q_1}]}{\Delta_1}, \\ \tau &= \frac{(e + q)[\overline{c}\overline{d_1} + \overline{d}\overline{c_1} + \overline{e}e_1 + \overline{q}q_1] - (\overline{a} + \overline{c} + \overline{d})[cq_1 + de_1 + e\overline{c_1} + q\overline{d_1}]}{\Delta_1}. \end{aligned} \tag{24}$$

Если же $\Delta_1 = 0$, то однородное уравнение $Af = 0$ имеет точно одно линейно независимое нетривиальное решение

$$f_0(z) = \overline{a} + \overline{c} + \overline{d} - e - q,$$

а для разрешимости неоднородного $Af = g$ необходимо и достаточно выполнение одного условия

$$Re \iint\limits_D \omega g(\zeta) ds_\zeta = 0,$$

где $\omega = \overline{a} + \overline{c} + \overline{d} - \overline{e} - \overline{q}$ решение однородного сопряжённого к (20) уравнения. При его выполнении неоднородное уравнение имеет решение:

$$\begin{aligned} f(z) =& a_1 g(z) + \frac{c_1}{\pi} \iint\limits_D \frac{g(\zeta) ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{d_1}{\pi} \iint\limits_D \frac{g(\zeta) ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{e_1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)} ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{q_1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)} ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + M f_0, \quad z \in \overline{D}, \end{aligned} \tag{25}$$

где M - произвольная вещественная постоянная.

В конце раздела 1 главы 2 полученные выше результаты обобщены на уравнение

$$\begin{aligned} (A_1 f)(z) \equiv a(z) f(z) + b(z)\overline{f(z)} + \frac{c(z)}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \\ + \frac{d(z)}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + \frac{e(z)}{\pi} \iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)} ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \\ + \frac{q(z)}{\pi} \iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)} ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} = g(z), \quad z \in \overline{D}, \end{aligned} \tag{26}$$

где заданная функция $b(z)$ также, как и остальные коэффициенты из (24), непрерывна в $\overline{D}$.

В **разделе 2 главы 2** рассматривается система двумерных сингулярных интегральных уравнений следующего вида:

$$a(z) f(z) + b(z)(S\overline{f})(z) + c(z)(Bf)(z) = g(z), \tag{27}$$

где

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta,$$

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(1 - z\overline{\zeta})^2} ds_\zeta, \ (Kf)(z) = f(z),$$

$a(z), b(z), c(z)$ - заданные в ограниченной области D с границей Γ непрерывные квадратные матрицы порядка n, $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))$, $g(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots g_n(z))$ соответственно комплекснозначные искомые и заданные вектор-функции класса $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D)$:

$$L_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : \, |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \, ||f||_{L_{\beta-2/p}} = ||F||_{L_p}\},$$

$(1 < p < \infty, \, 0 < \beta < 2)$.

Вопрос нётеровости и индекс системы (27) в лебеговых пространствах $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D)$: $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ изучены в работе К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова[20]. Из результатов указанной работы следует, что для нётеровости системы интегральных уравнений (27) в пространствах $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D)$: $(1 < p < \infty, \, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы блочная матрица

$$M(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z \\ \overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}$$

и матрица $a(z) + c(z)$ были неособенными, то есть $detM(z) \neq 0$, для всех $z \in \overline{D}$ и $det(a(t) + c(t)) \neq 0$, для всех $t \in \Gamma$, при этом если указанные условия выполнены, то система (27) в указанных пространствах имеет единственное решение.

В разделе 2 главы 2 предполагается, что $D = \{z : |z| < 1\}$ и матрицы a, b, c постоянные. Ставится задача нахождения решения уравнения (27) в замкнутом виде. Отметим, что в скалярном случае формула обращения для (27) известна из работ А.Джураева [18],И.И.Комяка[21],Г.Джангибекова[18], Н.Раджабова[15].

Теорема 2.2.1.*Пусть a, M и $a + c$ – неособые матрицы и g – произвольная функция из пространства $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D)$, $(1 < p < \infty, \, 0 < \beta < 2)$. Тогда сингулярное интегральное уравнение (27) в указанных пространствах имеет единственное решение*

$$f = (a - b\overline{a}^{-1}\overline{b})[g - b\overline{a}^{-1}S\overline{g} - (c + b\overline{a}^{-1}\overline{b})(a + c)^{-1}Bg].$$

[20]К.Х.Бойматов, Г. Джангибеков. О некоторых сингулярных интегральных операторах с матричными коэффициентами // ДАН России, 1999, т. 369.№3, с. 299-302.

[21]И.И.Комяк. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

Теорема 2.2.2. *Если матрицы $b, a+c$ и M – неособенные, то тогда сингулярное интегральное уравнение (27) имеет в пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ единственное решение*

$$f=(\bar{b}-\bar{a}b^{-1}a)^{-1}[-\bar{a}b^{-1}g+S\bar{g}+(\bar{b}+\bar{a}b^{-1}c)(a+c)^{-1}Bg].$$

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

1. Мамадкаримова, М. Явное решение одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений [текст] /Г. Джангибеков, М. Мамадкаримова // ДАН РТ, 2010, —Т.53. —№1. —С.5-12.
2. Мамадкаримова, М. О формулах обращения для систем двумерных сингулярных интегральных уравнений [текст] / Г. Джангибеков, М. Мамадкаримова // ДАН РТ, 2012. —Т. 55. —№5. —С. 366-376.
3. Мамадкаримова, М. Явное решение некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Бергмана [текст] /М. Мамадкаримова// Вестник ТНУ, 2015. —Т. 55. —№5. —С.366-376.

В других изданиях:

4. Мамадкаримова, М. Явное решение некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений на плоскости [текст] /М. Мамадкаримова// Современные проблемы теории функции и дифференциальных уравнений. Материалы межд. научной конф.посвящённой 85-летию акад. АН РТ Л.Г.Михайлова. Душанбе 2013. —С. 43-47.
5. Мамадкаримова, М. О формуле обращения для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов [текст] /М. Мамадкаримова// Современные проблемы математики и её преподавание. Материалы межд.научной конф.посвящённой 20-летию Конституции РТ. Худжанд 2 (29) 2014.—С.150-152.
6. Мамадкаримова, М. Явное решение одного класса шестикомпонентных двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченный области [текст] /Г. Джангибеков, М. Мамадкаримова // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений. Материалы межд.научной

конф.посвящённой 80-летию члена -корреспондента АН РТ, доктора физико -математических наук, профессора В.Я.Стеценко Душанбе 2015. —С. 94-96.

7. Мамадкаримова, М. Явное решение некоторых двумерных интегральных уравнений с ядром Бергмана [текст] /М. Мамадкаримова// Материалы научной конф. Математика и информационные технологии, посвящённой 15-летию независимости РТ. Душанбе 2006. —С. 39-40.

8. Мамадкаримова, М. Об одной формуле обращения [текст] /М. Мамадкаримова // Вестник Хорогского университета. 1999. —№1. —С. 26-29.