Таджикский национальный университет

На правах рукописи

МАМАДКАРИМОВА МУХАББАТ САИДКАРИМОВНА

О НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, РАЗРЕШИМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители: доктор физико–математических наук,
академик АН РТ, профессор Илолов Мамадшо,
кандидат физико–математических наук
Джангибеков Гулходжа

Душанбе — 2016

Оглавление

Введение

Актуальность темы

Известно, что наиболее мощным методом доказательства существования решений основных задач математической физики является метод сингулярных интегральных уравнений.

Рассматриваемые в работе двумерные сингулярные интегральные уравнения относятся к классическим сингулярным операторам Михлина - Кальдерона - Зигмунда [1] – [6] для которых ранее методом сведения к краевым задачам для эллиптических дифференциальных уравнений (А.Джураев [7] – [13], В.С.Виноградов [14]), или же методом факторизации символической матрицы и построение алгебры, порожденной этими операторами (И.Б.Симоненко [15], [16], Р.В.Дудучава [17], [18], Н.Н.Комяк [19] – [24], Н.Л.Василевский [25] – [28], Г.Джангибеков [29] – [43], К.Х.Бойматов и Г.Джангибеков [44], [45]) найдены условия нётеровости в функциональных пространствах $L^p(D)(1 < p < \infty)$ и получены формулы для подсчета индекса. Важным этапом в развитии исследований этих сингулярных интегральных уравнений является вопрос построения регуляризаторов сингулярных операторов и построение явных формул для решения сингулярных уравнений.

Цель работы

1. Получить в явном виде двусторонние ограниченные регуляризаторы для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с

чётной характеристикой и операторов Бергмана по ограниченной области, а также по всей плоскости.

2. Построить в лебеговых пространствах с весом явное решение рассматриваемых классов сингулярных интегральных уравнений с постоянными коэффициентами в замкнутом виде.

Метод исследования

При обосновании полученных в диссертации результатов используются методы комплексного анализа, методы функционального анализа, включая теорию банаховых алгебр, метод факторизации операторов.

Научная новизна исследований

1. Построены двусторонние ограниченные регуляризаторы для четырёхкомпонентного сингулярного интегрального оператора по ограниченной области, а также по всей плоскости, и в случае постоянных коэффициентов в замкнутом виде найдено явное решение уравнение с такими операторами.

2. Построены двусторонние ограниченные регуляризаторы для четырёхкомпонентного интегрального оператора с ядрами Бергмана, и в случае постоянных коэффициентов в замкнутом виде найдено явное решение уравнения с такими операторами.

3. Для системы сингулярных интегральных операторов по ограниченной области а лебеговых пространствах с весом построены ограниченные регуляризаторы, и в случае постоянных матриц-коэффициентов найден обратный оператор

Практическая ценность

Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть применены при исследовании различных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на Международной научной конференции, посвящённой 80-летию академика АН РТ А.Д.Джураева (Душанбе, 07-08 декабря 2012г.), на Международной научной конференции, посвящённой 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июля 2013г.), на Международной научной конференции, посвящённой 20-летию Конституции РТ (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), а также на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений ТНУ.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [46] – [53]. В совместных работах [46],[47],[51] научному руководителю Г. Джангибекову принадлежат постановка задач и выбор метода доказательства.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы из 60 наименований и занимает 79 страниц текста, набранного на LaTeXe. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй с номером раздела, третьей указывает на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном главе.

Краткое содержание работы

В первой главе работы в лебеговом пространстве с весом L^p изучаются некоторые классы двумерных интегральных операторов по ограниченной области D, а также случай, когда сингулярный интеграл распространен по комплексной плоскости E. Для этих операторов посредством метода факторизации сингулярных операторов построены двухсторонние регуляризаторы указанных операторов, а в случае постоянных коэффициентов решения сингулярных уравнений построены в явном виде.

Во второй главе работы рассматриваются сингулярные интегральные операторы с матричными коэффициентами, интегральные операторы с ядром Бергмана. Для указанных операторов в лебеговых пространствах с весому построены двухсторонние регуляризаторы, а также в случае постоянных коэффициентов решения интегральных уравнений построенны в явном виде.

Перейдем к более конкретному изложению результатов работы.

Раздел 1 первой главы носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В разделе 2 в пространстве

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D),\ ||f||_{L_{\beta-2/p}} = ||F||_{L_p}\}$$

$(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ рассматривается следующий оператор

$$A \equiv a(z)I + b(z)S_m, \tag{1}$$

где I - тождественный оператор, оператор S_m действует по формуле

$$(S_m f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

m - натуральное число, ds_ζ - элемент плоской меры Лебега, $\theta = arg(\zeta - z)$, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, D -ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой; $a(z), b(z)-$ непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции.

Прежде всего отметим, что И.Н.Векуа в монографии [54] в связи с нахождением гомеоморфизма системы Бельтрами

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} - q(z)\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

впервые изучил следующее простейшее сингулярное интегральное уравнение

$$f(z) - q(z)(S^E f)(z) = g(z), \tag{2}$$

где $q(z)$ - заданная в комплексной плоскости E ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая неравенству $|q(z)| \le q_0 < 1$ и

$$(S^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta, \quad z \in E.$$

На основе принципа сжатых отображений он показал, что уравнение (2) безусловно и однозначно разрешимо в пространстве $L^p(E)$, при p близким к двум. Впоследствии В.С.Виноградов [14] и Н.Н.Комяк [22] доказали справедливость утверждения о существовании ограниченного обратного оператора $(I - qS^E)^{-1}$, действующего в $L^p(E)$, при всех $p > 1$. Далее Г.Ф. Манджавидзе [56] в связи с применением уравнения (1) к граничным задачам со смещением ввел в рассмотрение новое сингулярное интегральное уравнение:

$$f(z) + q(z)(S_q^E f)(z) = g(z), \tag{3}$$

где

$$(S_q^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z}))^2} ds_\zeta.$$

Указанный автор показал, что при условии непрерывности функции $q(z)$: $|q(z)| \le q_0 < 1$, оператор $I + q(z)S_q^E$ является левым и правым регуляризатором оператора $I - q(z)S^E$ в пространствах Гёльдера $H_\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$ и в пространстве Лебега $L^p(E)(1 < p < \infty)$.

Рассматривая в ограниченной области D с границей Ляпунова Γ оператор (1), отметим, что из результатов [29] следует, что для нётеровости оператора A в $L^p_{\beta-2/p}(D)\,(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$|a(z)| > |b(z)| \tag{4}$$

для всех $z \in \bar{D}$, а при выполнении условия (4) оператор A имеет в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty)$ ограниченный обратный.

Прежде всего заметим, что из (4) следует, что $a(z) \neq 0$ в $\bar{D}$ и поэтому вместо оператора A будем рассматривать оператор

$$A_0 \equiv I - q(z)S_m, \tag{5}$$

где $q(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$, т.е. $|q(z)| < 1, z \in \bar{D}$.

Далее вводится следующий сингулярный интегральный оператор

$$(S_m q f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(|\zeta - z|)^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{[(\zeta - z)^m + (-1)^{m-1} q(z)(\bar{\zeta} - \bar{z})^m]^2}. \tag{6}$$

Характеристика $u(z,\theta) \quad (\theta = arg(\zeta - z))$ оператора S_{mq} имеет вид

$$u(z,\theta) = \frac{e^{-2im\theta}}{(1 + (-1)^{m-1} q(z) e^{-2im\theta})^2}.$$

Очевидно, что $u(z,\theta)$ является ограниченной функцией и, как нетрудно убедиться, удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{2\pi} u(z,\theta) d\theta = 0, \quad z \in \bar{D}.$$

Поэтому из результатов [4], следует,что оператор S_{mq} ограничен в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$. Отметим, что оператор S_{mq} является естественным обобщением оператора S_q из (3).

Показано, что имеют место:

Теорема 1.2.1. *Пусть в (2)* $|q(z)| < 1, \quad z \in \bar{D}$. *Тогда оператор*

$$R = I + q(z)S_{mq}$$

является левым и правым регуляризатором оператора

$$A_0 = I - q(z)S_m$$

в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $D = \{z : |z| < 1\}$ *и* $q(z) = const, |q| < 1$. *Тогда оператор*

$$A^{-1} = I + qS_{mq}$$

является правым и левым обратным оператором для оператора

$$A_0 = I - qS_m$$

в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$.

В разделе 3 настоящей работы рассматривается четырёхкомпонентный сингулярный интегральный оператор вида:

$$A \equiv aI + bK + cS + d\overline{S}K + \nu\overline{B} + \delta BK = g, \tag{7}$$

где I - единичный оператор,

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (Kf)(z) = \overline{f(z)},$$

$$(\overline{S}f)(z) = (KSKf)(z), \quad (Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)}{(1 - z\overline{\zeta})^2}ds_\zeta,$$

$$(\overline{B}f)(z) = (KBKf)(z),$$

ds_ζ - элемент площади, D - конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Г, первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, второй интеграл имеет особенность лишь на границе Γ, понимается в смысле Лебега и обычно называется оператором Бергмана.

Известно [54], [8], что операторы типа (7) играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций, а также тесно связаны с краевыми задачами для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. При различных дополнительных предположениях относительно коэффициентов оператор A изучался ранее в работах А.Джураева [8], Н.Н.Комяка [22], К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова [44] и Г.Джангибекова [42],Н.Р.Раджабова [57]

В частности, из работы [42] для оператора A следует, что нётеровые операторы A разделяютя на два гомотопических класса, которые эффективно описываются через коэффициенты оператора A, т.е. необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчета индекса оператора A в лебеговых пространствах $L_{\beta-2/p}(D), (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ получены в эффективном виде.

Что касается явных формул для решения уравнения $Af = g$, то они получены лишь в простейших случаях $b = c = \nu = \delta = 0$, ([7],[23], а также [41]).

В этом разделе рассматривается вопрос нахождения регуляризаторов оператора A в явном виде и в случае постоянных коэффициентов нахождения решения уравнения $Af = g$ с оператором из (7) в замкнутом виде.

Введём следующие обозначения:

$$\triangle_1 = |a|^2 - |b|^2, \quad \triangle_2 = |d|^2 - |c|^2, \quad \lambda = \overline{a}c - b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$$\nu_1 = \overline{a}\nu - b\overline{\delta}, \quad \delta_1 = \overline{a}\delta - b\overline{\nu}, \quad \nu_2 = \overline{d}\nu - c\overline{\delta}, \quad \delta_2 = \overline{d}\delta - c\overline{\nu},$$

$$q_1 = \begin{cases} \frac{\triangle_2 - \triangle_1 + sign\triangle_1\sqrt{(\triangle_2-\triangle_1)^2 - 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } \lambda = 0 \end{cases}$$

$$q_2 = \begin{cases} \frac{\triangle_2 - \triangle_1 + sign\triangle_2 \sqrt{(\triangle_2-\triangle_1)^2 - 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \frac{\overline{\mu}}{\triangle_1 + q_1\overline{\lambda}}, \quad \beta_2 = \frac{\mu}{\triangle_2 + q_2\overline{\lambda}}.$$

Теорема 1.3.1. *Для нётеровости уравнения (7) в* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$ *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух (исключающих друг друга) условий:*

$$\begin{gathered} |\triangle_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для } \ \forall z \in \overline{D}, \\ \triangle_1(t) + \nu_1(t) - q_1(t)\beta_1(t)\overline{\delta_1(t)} \neq 0 \text{при } \ \forall t \in \Gamma, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} |\triangle_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для } \ \forall z \in \overline{D}, \\ \nu_2(t) + \beta_2(t)(\triangle_2(t) - q_2(t)\overline{\delta_2(t)}) \neq 0 \text{при } \ \forall t \in \Gamma. \end{gathered} \tag{9}$$

При этом, если выполнено (8), то индекс оператора A

$$æ = 2Ind_\Gamma\{\triangle_1(t) + \nu_1(t) - q_1(t)\beta_1(t)\overline{\delta_1(t)}\},$$

а если выполнено (9), то

$$æ = 2Ind_\Gamma\{\nu_2 + \beta_2(t)\triangle_2(t) - q_2(t)\overline{\delta_2(t)}\ \overline{\beta_2(t)}\}.$$

Следовательно оператор A имеет (правый и левый) регуляризаторы. Доказана следующая:

Теорема 1.3.2. *Пусть выполнено условие (8), тогда оператор A имеет в* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ *двухсторонний регуляризатор вида*

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \overline{\beta_1}\ \overline{S}K - \frac{\nu^* + |\beta_1|^2}{1+\nu_1^*}\overline{B}\Big)\times \\ \times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_1^n (S + \frac{\delta_1^*}{q_1}BK)^n\Big)\triangle_1^{-1}T_1 \end{aligned} \tag{10}$$

а если выполнено условие (9), то

$$R = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\overline{\beta_2}I - \overline{S}K - \frac{1+\beta_2}{1+\nu_2^*}\overline{B}\Big)\times \\ \times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_2^n (S + \frac{\delta_2^*}{q_2}BK)^n\Big)\triangle_2^{-1}T_2 \tag{11}$$

где здесь операторы T_1 и T_2 определяются по формулам

$$T_1 = \Big(\overline{a} + q_1\beta_1\overline{b}\Big)I - \Big(b + q_1\beta_1 a\Big)K,$$
$$T_2 = \Big(\overline{d} + q_2\beta_2\overline{c}\Big)I - \Big(c + q_2\beta_2 d\Big)K$$

и $\delta_j^*(z)$, $\nu_j^*(z)$ $(j = 1,2)$ такие непрерывные в $\overline{D}$ функции, которые на Γ имеют значения.

$$\delta_1^*(z) = \frac{\delta_1 - q_1\beta_1(\triangle_1 + \overline{\nu_1})}{\triangle_1 + \overline{\nu_1} - \overline{q_1}\ \overline{\beta_1}\delta_1}, \quad \delta_2(z) = \frac{\delta_2 - q_2(\beta_2\overline{\nu_2} + \triangle_2)}{\triangle_2\beta_2 + \overline{\nu_2} - \overline{q_2},\ \overline{\beta_2}\delta_2}, \\ \nu_1^*(z) = \frac{\nu_1 - q_1\beta_1\overline{\delta_1}}{\triangle_1}, \quad \nu_2^*(z) = \frac{\nu_2 - q_2\beta_2\overline{\delta_2}}{\triangle_2}. \tag{12}$$

Теорема 1.3.3. *Пусть коэффициенты уравнения (7) постоянны и выполнено условие*

$$|a(t) + \nu(t)| \neq |b(t) + \delta(t)|,\ t \in \Gamma. \tag{13}$$

Тогда при выполнении одного из условий (8) или (9) уравнение (7) имеет в пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty.$ единственное решение

$$f(z) = (A^{-1}g)(z),$$

где

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \overline{\beta_1}\ \overline{S}K - \frac{\nu_1^* + |\beta_1|^2}{1+\nu_1^*}\overline{B}\Big)\times \\ \times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_1^n (S + \frac{\delta_1^*}{q_1}BK)^n\Big)\triangle_1^{-1}T_1,$$

если выполнено (8) и

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\overline{\beta_2}I - \overline{S}K \ - \frac{1+\overline{\beta}_2\nu_2^*}{1+\nu_2^*}\overline{B}\Big)\times$$
$$\times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_2^n(S + \frac{\delta_1^*}{q_1}BK)^n\Big)\triangle_2^{-1}T_2,$$

если выполнено (9).

Если условие (13) нарушено, то однородное уравнение (7) имеет одно линейно-независимое решение

$$f(z) = \overline{a} + \overline{\nu} - b - \delta,$$

а для разрешимости неоднородного уравнения (7) необходимо и достаточно выполнение одного условия

$$Re\iint\limits_{|z|<1} \omega g(z) ds_\zeta = 0,$$

где $\omega = \overline{a} + \overline{\nu} - \overline{b} - \overline{\delta}$ *- решение однородного, сопряжённого с уравнения(7).*

В разделе 4 главы 1 рассматривается оператор вида (7) по всей комплексной плоскости E, пополненной до E_1 одной бесконечно удалённой точкой, т.е. в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(E)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ рассматривается следующий оператор

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(S^E f)(z) + d(z)(\overline{S}^E\overline{f})(z), \tag{14}$$

где

$$(S^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta, \quad (\overline{S}^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} ds_\zeta, \quad z \in E, \tag{15}$$

коэффициенты a, b, c, d - непрерывны на E_1.

Следует отметить, что нётеровые свойства оператора A в лебеговых пространствах $L^p(E), p > 1$ изучены в работе Н.Н.Комяка [22]. Из указанной работы, а также из [44] следует, что для нётеровости оператора A в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(E)$ необходимо и достаточно, чтобы всюду в E_1 выполнялось одно из неравенств

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для любых} \quad z \in E_1, \tag{16}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для любых} \quad z \in E_1, \tag{17}$$

где

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \quad \Delta_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$
$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)}, \quad \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z),$$

при этом нётеровость оператора A совпадает с обратимостью оператора.

В этом разделе находятся регуляризаторы оператора A из (14), и при постоянных коэффициентах построен обратный оператор A^{-1}.

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнено условие (16), тогда оператор A из (14) имеет в $L^p_{\beta-2/p}(E)$ двусторонний регуляризатор вида*

$$R = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \beta_1\,\overline{S}^E K\Big)\Big(I + q_1 S^E_{q_1}\Big)\Delta_1^{-1}T_1, \tag{18}$$

а если выполнено условие (17), то

$$R = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\beta_2 I - \overline{S}^E K\Big)\Big(I + q_2 S^E_{q_2}\Big)\Delta_2^{-1}T_2, \tag{19}$$

где операторы $S^E_{q_1}$ и $S^E_{q_2}$ определяются по формуле (3) и

$$T_1 = \Big(\overline{a} + q_1\beta_1\overline{b}\Big)I - \Big(b + q_1\beta_1 a\Big)K,$$
$$T_2 = \Big(\overline{d} + q_2\beta_2\overline{c}\Big)I - \Big(c + q_2\beta_2 d\Big)K,$$

а функции $\beta_1, \beta_2, q_1, q_2$ определены в предыдущем разделе.

Теорема 1.4.3. *Пусть коэффициенты уравнения (14) постоянны, тогда при выполнении одного из условий (16) или (17) уравнение (14) имеет в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(E), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ единственное решение:*

$$f(z) = (A^{-1}g)(z),$$

где

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \beta_1\ \overline{S}^E K\Big)\Big(I + q_1 S^E_{q_1}\Big)\Delta_1^{-1}T_1,$$

если выполнено условие (16), и

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\beta_2 I - \overline{S}^E K\Big)\Big(I + q_2 S^E_{q_2}\Big)\Delta_2^{-1}T_2,$$

если выполнено (17).

В разделе 1 главы 2 настоящей работы в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим следующее интегральное уравнение с операторами Бергмана

$$\begin{aligned}(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + \frac{c(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{d(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \\ + \frac{e(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{q(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} = g(z), \quad z \in \overline{D},\end{aligned} \tag{20}$$

в котором $a(z), c(z), d(z), e(z), q(z)$ - заданные в замкнутом круге $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные непрерывные функции. Комплекснозначные непрерывные функции $g(z)$ и $f(z)$ соответственно задаются и ищутся в весовом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p}f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}(D)} = ||F||_{L^p(D)}\},$$

где $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$.

Вопрос нётеровости и индекс оператора A в лебеговом пространстве $L^p(D)$ изучались ранее в работах А. Джураева [11], Н.Н.Комяка [21], Н.Л.Василевского [27], Г.Джангибекова [32]. Из результатов работы [32] следует, что для нётеровости оператора A в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $\quad(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a(z) \neq 0,\ z \in \overline{D} \text{ и } \Delta(t) = (a(t) + c(t))(\overline{a(t)} + \overline{d(t)}) - e(t)\overline{q(t)} \neq 0,\ t \in \Gamma, \tag{21}$$

при этом индекс оператора A равен æ $= 2Ind_\Gamma\Delta(t)$.

В разделе 1 главы 2 диссертации в весовых пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ найден двухсторонний регуляризатор оператора A, а в случае постоянных коэффициентов уравнение (20) решено в замкнутом виде.

Введём в $\overline{D}$ вспомогательную функцию $a_1 = \dfrac{1}{a}$ и такие непрерывные в $\overline{D}$ функции c_1, d_1, e_1, q_1, что на границе Γ области $\overline{D}$ соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{e\overline{q}-(\overline{a}+\overline{d})c}{a\Delta}, \quad e_1 = -\frac{e}{\Delta}, \\ d_1 &= \frac{\overline{e}q-(\overline{a}+\overline{c})d}{a\overline{\Delta}}, \quad q_1 = -\frac{q}{\overline{\Delta}}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\Delta = (a+c)(\overline{a}+\overline{d}) - e\overline{q}$. Показано, что имеют место:

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия (21). Тогда оператор*

$$R = a_1(z)I + c_1(z)B + d_1(z)\overline{B} + e_1(z)BK + q_1(z)\overline{B}K$$

является двухсторонним регуляризатором оператора A из (20) в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty, 0<\beta<2$, где $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$,

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2}, \quad (\overline{B}f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2}.$$

Теорема 2.1.2. *Пусть коэффициенты оператора A из (20) постоянны и удовлетворяют условиям (21) и кроме того*

$$\Delta_1 = |a+c+d|^2 - |e+q|^2 \neq 0,$$

тогда однородное уравнение $Af=0$ в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ нетривиальных решений не имеет, а неоднородное $Af=g$

безусловно разрешимо и его решение даётся формулой

$$\begin{aligned} f(z) =& a_1 g(z) + \frac{c_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{d_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{e_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{q_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{\alpha}{\pi}\iint\limits_D g(\zeta)ds_\zeta + \frac{\tau}{\pi}\iint\limits_D \overline{g(\zeta)}ds_\zeta \equiv (A^{-1}g)(z), \quad z \in \overline{D}, \end{aligned} \tag{23}$$

где константы a_1, c_1, d_1, e_1, q_1 *определяются по формулам (22) и*

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(e+q)[\overline{cq_1} + \overline{d}\overline{e_1} + \overline{e}c_1 + \overline{q}d_1] - (\overline{a}+\overline{c}+\overline{d})[cd_1 + dc_1 + e\overline{e_1} + q\overline{q_1}]}{\Delta_1}, \\ \tau &= \frac{(e+q)[\overline{c}\overline{d_1} + \overline{d}\overline{c_1} + \overline{e}e_1 + \overline{q}q_1] - (\overline{a}+\overline{c}+\overline{d})[cq_1 + de_1 + e\overline{c_1} + q\overline{d_1}]}{\Delta_1}. \end{aligned} \tag{24}$$

Если же $\Delta_1 = 0$, *то однородно уравнение* $Af = 0$ *имеет точно одно линейно независимое нетривиальное решение*

$$f_0(z) = \overline{a} + \overline{c} + \overline{d} - e - q,$$

а для разрешимости неоднородного $Af = g$ *необходимо и достаточно выполнение одного условия*

$$Re \iint\limits_D \omega g(\zeta)ds_\zeta = 0,$$

где $\omega = \overline{a}+\overline{c}+\overline{d}-\overline{e}-\overline{q}$ *решение однородного сопряжённого к (20) уравнения. При его выполнении неоднородное уравнение имеет решение:*

$$\begin{aligned} f(z) =& a_1 g(z) + \frac{c_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{d_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{e_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{q_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + Mf_0, \quad z \in \overline{D}, \end{aligned} \tag{25}$$

где M *- произвольная вещественная постоянная.*

В конце раздела 1 главы 2 полученные выше результаты обобщены на уравнение

$$(A_1 f)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + \frac{c(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} +$$
$$+\frac{d(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \frac{e(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \tag{26}$$
$$+\frac{q(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} = g(z), \quad z \in \overline{D},$$

где заданная функция $b(z)$ также, как и остальные коэффициенты из (24) непрерывна в $\overline{D}$.

В разделе 2 главы 2 рассматривается система двумерных сингулярных интегральных уравнений следующего вида:

$$a(z)f(z) + b(z)(S\overline{f})(z) + c(z)(Bf)(z) = g(z), \tag{27}$$

где

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}ds_\zeta,$$

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(1-z\overline{\zeta})^2}ds_\zeta,\ (Kf)(z) = f(z),$$

$a(z), b(z), c(z)$ - заданные в ограниченной области D с границей Γ непрерывные квадратные матрицы порядка $n, f(z) = (f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)),\ g(z) = (g_1(z), g_2(z), \ldots g_n(z))$ соответственно комплекснозначные искомые и заданные вектор-функции класса $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$:

$$L_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) :\ |z|^{\beta-2/p}f(z) = F(z) \in L^p(D),\ ||f||_{L_{\beta-2/p}} = ||F||_{L_p}\},$$

$(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$.

Вопрос нётеровости и индекс системы (27) в лебеговых пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)\ :\ (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ изучены в работе К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова [45]. Из результатов указанной работы следует, что для нётеровости системы интегральных уравнений (27) в пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D): \ (1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы блочная матрица

$$M(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z \\ \overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}$$

и матрица $a(z) + c(z)$ были неособенными, то есть $det M(z) \neq 0$, для всех $z \in \overline{D}$ и $det(a(t)+c(t)) \neq 0$, для всех $t \in \Gamma$, при этом если указанные условия выполнены, то система (27) в указанных пространствах имеет единственное решение.

В разделе 2 главы 2 предполагается, что $D = \{z : |z| < 1\}$ и матрицы a, b, c постоянные. Ставится задача нахождения решения уравнения (27) в замкнутом виде. Отметим, что в скалярном случае формула обращения для (0.27) известна из работ [12],[20], [41],[57].

Теорема 2.2.1. *Пусть a, M и $a+c$ – неособые матрицы и g – произвольная функция из пространства $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$. Тогда сингулярное интегральное уравнение (27) в указанных пространствах имеет единственное решение*

$$f = (a - b\bar{a}^{-1}\bar{b})[g - b\bar{a}^{-1}S\bar{g} - (c + b\bar{a}^{-1}\bar{b})(a+c)^{-1}Bg].$$

Теорема 2.2.2. *Если матрицы $b, a+c$ и M – неособенные, то тогда сингулярное интегральное уравнение (27) имеет в пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ единственное решение*

$$f = (\bar{b} - \bar{a}b^{-1}a)^{-1}[-\bar{a}b^{-1}g + S\bar{g} + (\bar{b} + \bar{a}b^{-1}c)(a+c)^{-1}Bg].$$

Глава 1

Решение некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений в замкнутом виде

1.1 Описание пространств функций и некоторые вспомогательные сведения

Определение 1.1. *Простую замкнутую гладкую кривую* Γ *назовем кривой Ляпунова, если она удовлетворяет следующему условию: касательная к кривой образует с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию Гёльдера относительно дуги* s *кривой* Γ.

1.1.1 Нётеровы операторы и основные их свойства

Пусть D - конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и, содержащая внутри точку $z = 0$.

Пространство $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}_{\beta-\mathbf{2/p}}(\mathbf{D})$ - это множество комплекснозначных измеримых в D функций $f(z)$, для которых функция $F(z) = |z|^{\beta-2/p}f(z)$ суммируемая с p - ой степенью, где $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$. Норма в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ вводится по формуле

$$||f(z)||_{L^p_{\beta-2/p}} = \left(\iint\limits_D |F(z)|^p ds_z \right)^{1/p} = ||F||_{L^p}.$$

Далее в этом пункте приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах, которыми мы будем пользоваться в работе. Доказательства всех приводимых здесь утверждений можно найти, например, в монографии [60].

Пусть X - банахово пространство, A - линейный ограниченный оператор, действующий из X в X, A^* - сопряженный к нему оператор, действующий в сопряженном пространстве X^*.

Определение 1.1.1. *Говорят, что оператор A допускает левую регуляризацию, если существует ограниченный оператор R действующий в X, такой, что произведение RA (AR) является оператором Фредгольма т.е.*

$$RA = I + T,$$

где I - тождественный, а T - вполне непрерывный оператор в пространстве X. Оператор R в этом случае называется левым регуляризатором оператора A.

Определение 1.1.2. *Говорят, что оператор A допускает правую регуляризацию, если существует ограниченный оператор R действующий в X,* *такой, что*

$$A = I + T,$$

где I и T - операторы, соответственно тождественный и вполне непрерывный, в пространстве X. Оператор R называется правым регуляризатором оператора A.

Определение 1.1.3. *Говорят, что A допускает двустороннюю регуляризацию, если он одновременно допускает и правую, и левую регуляризацию.*

Множество $KerA$ всех решений уравнения

$$Ax = 0 \tag{1.1.1}$$

называется множеством нулей или ядром оператора A. Множество $KerA$ является подпространством пространства X. Размерность подпространства $KerA$, т.е. число линейно независимых решений уравнения (1.1.1), будем обозначать через $\alpha_A = dimKerA$. Через $KerA^*$ обозначим подпространства нулей оператора A^*, т.е. множество всех решений уравнения

$$A^*x = 0 \tag{1.1.2}$$

называется ядром оператора A^* и, наконец, $\beta_A = \alpha_{A^*} = KerA^*$. Числа α_A, β_A называются дефектными числами оператора A. Если хотя бы одно из чисел α_A и β_A - конечное, то их разность называется индексом оператора A и обозначается через $IndA$,

$$IndA = \alpha_A - \beta_A. \tag{1.1.3}$$

Очевидно, $IndA$ конечен тогда и только тогда, когда обе размерности α_A и β_A - конечны.

Для того, чтобы уравнение

$$Ax = y,\ y \in X, \tag{1.1.4}$$

имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы свободный член y был ортогонален к $KerA^*$ (иначе говоря, чтобы элемент y аннулировался любым функционалом $u \in KerA^*$). Действительно, если уравнение (1.1.4) имеет решение x, а $u \in KerA^*$, то

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^*u) = (x, 0) = 0;$$

где здесь круглыми скобками обозначено значение функционала на соответствующем элементе.

Если упомянутое выше условие ортогональности достаточно для разрешимости уравнения (1.1.3), то говорят, что оператор A нормально разрешим. Таким образом можно дать следующее:

Определение 1.1.4. *Оператор A называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение (1.1.4) разрешимо тогда и только тогда, когда ее правая часть y ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения (1.1.2).*

Известна следующая теорема Хаусдорфа: для того, чтобы оператор был нормально разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы его область значений была замкнутой.

Определение 1.1.5. *Оператор A называется нётеровым в X, если он нормально разрешим и числа α_A, β_A конечны.*

Определение 1.1.6. *Индексом $IndA$ нётерова оператора A называется целое число $IndA = \alpha_A - \beta_A$.*

Следующее определение из всего множества нётеровых операторов выделяет подмножество фредгольмовых операторов:

Определение 1.1.7. *Нетеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.*

Свойство 1.1.1. *(теорема о композиции). Если A и B нётеровы операторы в X, то их композиция AB также нётерова в X, причем $IndAB = IndA + IndB$.*

Свойство 1.1.2. *Если A нётеров в X то и A^* нётеров в X^*, причём $IndA^* = -IndA$.*

Свойство 1.1.3. *(возмущение вполне непрерывным оператором). Если A нётеров, а T вполне непрерывен в X, то $A + T$ также нётеров в X, причём $Ind(A + T) = IndA$.*

Свойство 1.1.4. *(возмущение малым по норме оператором). Если A нётеров в X, то существует такое $\varepsilon = \varepsilon(A)$, что для всех операторов B таких, что $||B|| < \varepsilon$, оператор $A + B$ нётеров в X и $Ind(A + B) = IndA$.*

Свойство 1.1.5. *Для того, чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы у него существовали левый и правый регуляризаторы.*

Определение 1.1.8. *Нётеровы операторы A и B называются гомотопными, если существует семейство нётеровых операторов $A(t)$, $t \in [0, 1]$, которое равномерно непрерывно по норме на сегменте $[0, 1]:$ по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $||A(t_1) - A(t_2)|| < \varepsilon$, и $A(0) = A$, $A(1) = B$.*

Свойство 1.1.6. *Если операторы A и B гомотопны, то*

$$IndA = IndB.$$

1.1.2 Алгебра операторов и алгебра символов

Пусть $\mathcal{M}$ - некоторая алгебра ограниченных операторов действующих из банахового пространстве X в X, т.е. если $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, то

$$A_1 + A_2 \in \mathcal{M} \quad \text{и} \quad A_1 A_2 \in \mathcal{M}.$$

Пусть $\mathcal{N}$ - алгебра всех скалярных или матричных непрерывных комплексных функций, зависящих от переменной точки t некоторого конечномерного пространства, т.е. если $\sigma_1(t), \sigma_2(t) \in \mathcal{N}$, то

$$\sigma_1(t) + \sigma_2(t) \in \mathcal{N} \quad \text{и} \quad \sigma_1(t)\sigma_2(t) \in \mathcal{N}$$

Пусть между элементами алгебры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ установлено голоморфное соответствие, так что каждому оператору $A \in \mathcal{M}$ приведена в соответствие одна и только одна функция $\sigma_A(t) \in \mathcal{N}$ и каждой функции из $\mathcal{N}$ соответствует хотя бы один оператор из $\mathcal{M}$, причем сумме или произведению операторов соответствует сумма или произведение функций:

$$\sigma_{A_1+A_2}(t) = \sigma_{A_1}(t) + \sigma_{A_2}(t), \quad \sigma_{A_1 A_2}(t) = \sigma_{A_1}(t)\sigma_{A_2}(t).$$

В этом случае функция $\sigma_A(z)$ называется **символом** оператора A. Таким образом, символ осуществляет гомоморфизм операторной алгебры $\mathcal{M}$ в функциональную алгебру $\mathcal{N}$.

Ниже будем предполагать, что в алгебре $\mathcal{M}$ существует оператор, символ которого нигде в нуль не обращается. Также предположим, что алгебра

$\mathcal{M}$ содержит тождественный оператор и все вполне непрерывные операторы действующие в X. Эти допущения эквивалентны тому, что символ тождественного оператора есть функция, тождественно равная единице (единичной матрице) и символ оператора тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда этот оператор вполне непрерывен.

При вышесказанных допущениях имеет место (см.[2] гл.6,п.4)

Теорема 1.1.1. *Оператор A допускает двустороннюю регуляризацию оператором из той же алгебры тогда и только тогда, когда символ оператора A не вырождается.*

1.2 Формула обращения для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов

И.Н.Векуа в монографии [54] в связи с нахождением гомеоморфизма системы Бельтрами

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} - q(z)\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

впервые изучил следующее простейшее сингулярное интегральное уравнение

$$f(z) - q(z)(S^E f)(z) = g(z), \tag{1.2.1}$$

где $q(z)$ - заданная в комплексной плоскости E ограниченная измеримая функция удовлетворяющая неравенство $|q(z)| \leq q_0 < 1$ и

$$(S^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta, \quad z \in E.$$

ds_ζ - элемент плоской меры Лебега, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, то есть как предел по норме в $L^p(E)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{E/D_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta,$$

где $D_\varepsilon(z)$ - круг радиуса ε с центром в точке z. На основе принципа сжатых отображений он показал, что уравнение (1.2.1) безусловно и однозначно разрешимо в пространстве $L^p(E)$, при p близких к двум. Впоследствие В.С.Виноградов [14] и Н.Н.Комяк [22] доказали справедливость утверждение о существовании ограниченного обратного оператора $(I - qS^E)^{-1}$, действующего в $L^p(E)$, при всех $p > 1$.

Далее Г.Ф. Манджавидзе [56] в связи с применением уравнения (1.2.1) к граничным задачам со смещением ввел в рассмотрение новое сингулярное интегральное уравнение:

$$f(z) + q(z)(S_q^E f)(z) = g(z), \tag{1.2.2}$$

где

$$(S_q^E f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z}))^2} ds_\zeta.$$

Указанный автор показал, что при условии непрерывности функции $q(z)$: $|q(z)| \le q_0 < 1$, оператор $I + q(z)S_q^E$ является левым и правым регуляризатором оператора $I - q(z)S^E$ в пространствах Гёльдера $H_\alpha(0 < \alpha < 1)$ и в пространстве Лебега $L^p(E)(1 < p < \infty)$.

Следует отметить, что изучение разрешимости интегрального уравнения (1.2.2) по плоскости E или по ограниченной области D представляет самостоятельный интерес. Дело в том, что сингулярный интегральный оператор

S_q относится к интегралам типа Михлина - Кальдерона с характеристиками, зависящими от полюса, и вопросы нётеровости, вычисления индекса и обратимости операторов с такими интегралами в лебеговых пространствах L^p не изучены.

Пусть D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой; I-тождественный оператор, $a(z), b(z)-$ непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции. В пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$ рассмотрим следующий оператор

$$A \equiv a(z)I + b(z)S_m, \tag{1.2.3}$$

где оператор S_m действует по формуле

$$(S_m f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

m-натуральное число, dS_ζ- элемент плоской меры Лебега, $\theta = arg(\zeta - z)$, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Из результатов [29] следует, что для нётеровости оператора A в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$|a(z)| > |b(z)| \tag{1.2.4}$$

для всех $z \in \bar{D}$, а при выполнении условия (1.2.4) оператор A имеет ограниченный обратный.

В данном разделе для оператора A найден двухсторонний регуляризатор в явном виде и в случае круговой области и постоянных коэффициентов a и b найден обратный оператор A^{-1}.

Прежде всего, заметим, что из (1.2.4) следует, что $a(z) \neq 0$ в $\bar{D}$ и поэтому вместо оператора A будем рассматривать оператор

$$A_0 \equiv I - q(z)S_m, \tag{1.2.5}$$

где $-q(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$, т.е. $|q(z)| < 1, z \in \bar{D}$. Далее отметим, что имеет место

Лемма 1.2.1. *Для всех функций* $f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ *имеют место следующие формулы:*

$$(S_n S_m f)(z) = (S_{n+m} f)(z) + T \tag{1.2.6}$$

,

$$(S_m f) = (S^m f)(z) + T, \tag{1.2.7}$$

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

где $n, m > 0$ *и* T*-вполне непрерывный оператор.*

Доказательство. Пусть пока $D = \{z : |z| < 1\}$. Без ограничения общности будем считать, что $n > 0, m > 0$. Составим композицию

$$(S_n S_m f)(z) =$$

$$= \frac{n(-1)^n}{\pi} \iint\limits_{|\sigma|<1} \frac{(\bar{\sigma} - \bar{z})^{n-1}}{(\sigma - z)^{n+1}} ds_\zeta \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{(\bar{\zeta} - \bar{\sigma})^{m-1}}{(\zeta - \sigma)^{m+1}} f(\zeta) ds_\zeta.$$

Поскольку $f(z) \in L^p_{\beta_2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ при некотором $p > 1$ то $S_m f$ также принадлежит $L^p(D)$. Поэтому по формуле дифференцирования интегралов со слабой особенностью $S_n S_m$ можно представить в виде

$$(S_n S_m f)(z) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!\pi} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \iint\limits_{|\sigma|<1} \frac{(\bar{\sigma}-\bar{z})^{n-1}}{\sigma - z} ds_\zeta \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{(\bar{\zeta}-\bar{\sigma})^{m-1}}{(\zeta-\sigma)^{m+1}} f(\zeta) ds_\zeta. \quad (1.2.8)$$

В (1.2.8) внутренний интеграл - сингулярный, а внешний со слабой особенностью, поэтому можно поменять порядок интегрирования

$$(S_n S_m f)(z) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{(-1)^{n+m}}{\pi} \iint\limits_{|\sigma|<1} f(\zeta) ds_\zeta \frac{m}{\pi} \iint\limits_{|\sigma|<1} \frac{(\bar{\sigma}-\bar{z})^{n-1}(\bar{\zeta}-\bar{\sigma})^{m-1}}{(\sigma-z)(\zeta-\sigma)^{m+1}} ds_\sigma =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{(-1)^{n+m}}{(n-1)!\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta) ds_\zeta \frac{\partial^m}{\partial \zeta^m} \Big[\frac{1}{\pi(m-1)!(\zeta-z)} \times$$

$$\times \Big(\iint\limits_{|\sigma|<1} \frac{(\bar{\sigma}-\bar{z})^{n-1}(\bar{\sigma}-\bar{\zeta})^{m-1}}{\sigma-\zeta} ds_\sigma - \iint\limits_{|\sigma|<1} \frac{(\bar{\sigma}-\bar{z})^{n-1}(\bar{\sigma}-\bar{\zeta})^{m-1}}{\sigma-z} ds_\sigma \Big) \Big] =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{(n-1)!\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta) ds_\zeta \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^m}{\partial \zeta^m} \Big[\frac{(-1)^{n-1}}{\zeta - z} \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} (\bar{z}-\bar{\zeta})^{n+m+1} \Big],$$

где $\Gamma(x)$ -гамма функция. После дифференцирование получим

$$(S_n S_m f)(z) = \frac{(n+m)(-1)^{n+m}}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{(\bar{\zeta}-\bar{z})^{n+m-1}}{(\zeta-z)^{n+m+1}} f(\zeta) ds_\zeta \equiv$$

$$\equiv (S_{n+m} f)(z),$$

что касается второй формулы (1.2.7), то она в случае круга очевидным образом следует из доказанной формулы.

В случае произвольной области D, описанной в начале параграфа формулы (1.2.6) и (1.2.7) доказываются с помощью конформного отображения области D на единичный круг. При этом нужно учесть, что если $\omega(z)$ - однолистное конформное отображение области D на круг $|\sigma| < 1$, причем

$\omega(0)=0, z=\chi(\sigma)$ - обратное отображение, то

$$(S_m f)(z)=\frac{(-1)^m m}{\pi}\iint\limits_D \frac{(\bar\zeta-\bar z)^{m-1}}{(\zeta-z)^{m+1}}f(\zeta)ds_\zeta=$$

$$=\frac{(-1)^m m}{\pi}\Big(\frac{\overline{\chi'(\sigma)}}{\chi'(\sigma)}\Big)^m\iint\limits_D \frac{(\bar\omega-\bar\sigma)^{m-1}}{(\omega-\sigma)^{m+1}}f(\chi(\sigma))ds_\omega+T,$$

где T - вполне непрерывный в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(|\sigma|<1)$ оператор, и поскольку $\chi'(\sigma)\neq 0(|\sigma|<1)$, то из того, что $f(z)\in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, следует $f(z)\in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(|\sigma|<1,)$ и обратно.

Лемма 1.2.2. *Если $a(z)$ - непрерывна в $\overline{D}$, то операторы*

$$aS_m-S_ma \quad \textit{и} \quad a\overline{S_m}-\overline{S_m}a$$

вполне непрерывны в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $\quad(1<p<\infty, 0<\beta<2)$.

Доказательство. Пусть вначале $a(z)\in C_\alpha(\overline{D})$, где $0<\alpha<1$. Для точек $z,\zeta\in\overline{D}$ оператор aS_m-S_ma имеет слабую особенность, ибо для его ядра имеется оценка

$$\left|\frac{a(\zeta)-a(z)}{(\zeta-z)^2}\right|\leq\frac{M|\zeta-z|^\alpha}{|\zeta-z|^2}=\frac{M}{|\zeta-z|^{2-\alpha}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $a(z)$ просто непрерывна в $\overline{D}$. Произвольную непрерывную функцию $a(z)$ можно аппроксимировать функциями $a_n(z)$ из класса $C_\alpha(\overline{D})$. Согласно неравенству

$$||(aS_m-aS_m)f-(a_nS_m-S_ma_n)f||\leq||S_m(a-a_n)f||+||(a-a_n)S_mf||\leq$$

$$\leq||S_m||\max_{z\in\overline{D}}|a(z)-a_n(z)|,$$

последовательность вполне непрерывных операторов $aS_m - S_m a_n$ действующих в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ равномерно сходится к оператору $aS_m - S_m a$. Поэтому оператор $aS_m - S_m a$ вполне непрерывен в $L^p_{\beta-2/p}(D)$.

Лемма (1.2.2) доказана.

Введем теперь следующий сингулярный интегральный оператор:

$$(S_m q f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(|\zeta - z|)^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{[(\zeta - z)^m + (-1)^{m-1} q(z)(\bar{\zeta} - \bar{z})^m]^2}. \tag{1.2.9}$$

Характеристика $u(z,\theta) \quad (\theta = arg(\zeta - z))$ оператора S_{mq} имеет вид

$$u(z,\theta) = \frac{e^{-2im\theta}}{(1 + (-1)^{m-1} q(z) e^{-2im\theta})^2}.$$

Очевидно, что $u(z,\theta)$ является ограниченной функцией и, как нетрудно убедиться, удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{2\pi} u(z,\theta) d\theta = 0, \quad z \in \bar{D}.$$

Поэтому из результатов [4], следует,что оператор S_{mq} ограничен в пространстве $L^p_{\beta_2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$

Отметим, что при $m = 1$ оператор переходит в оператор S_q введеный в работе [56], так, что S_{mq} является естественным обобщением указанного оператора на случай четной характеристики.

Лемма 1.2.3. *Пусть* $f(z) \in L^p(D), 1 < p < \infty$. *Тогда имеют место формулы:*

$$\begin{aligned} q(z)(S_m S_{mq} f)(z) &= (S_{mq} f)(z) - (S_m f)(z) + T, \\ q(z)(S_{mq} S_m f)(z) &= (S_{mq} f)(z) - (S_m f)(z) + T, \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

где T-вполне непрерывный оператор.

Для доказательства леммы (1.2.3) представим оператор S_{mq} в виде

$$(S_{mq}f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta} f(\zeta) ds_\zeta}{|\zeta - z|^2 \Big(1 + q(z)(-1)^{m-1} e^{-2im\theta}\Big)^2} =$$

$$= \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta} \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}(z)(-1)^{m(n-1)} e^{-2im(n-1)\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{\sum_{n=1}^{\infty} mnq^{n-1}(z)(-1)^{mn} e^{-2imn\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z) \frac{(-1)^{mn} mn}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2imn\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta + T \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)(S^{mn} f)(z) + T,$$

далее воспользуемся результатами леммы (1.2.2) и(1.2.3) т.е. учтем, что

$$(S_m q f)(z) - q(S_m q f)(z) \quad \text{и} \quad (S_{mq} q f)(z) - q(S_{mq} f)(z)$$

является вполне непрерывным операторам в пространствах $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$.

Таким образом имеют место

Теорема 1.2.1. *Пусть в (2) $|q(z)| < 1, \quad z \in \bar{D}$. Тогда оператор*

$$A_1 = I + q(z) S_{mq}$$

является левым и правым регуляризатором оператора

$$A_0 = I - q(z) S_m$$

в пространстве $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $D = \{z : |z| < 1\}$ *и* $q(z) = const, |q| < 1$. *Тогда оператор*

$$A_1 = I + qS_{mq}$$

является правым и левым обратным оператором для оператора

$$A_0 = I - qS_m$$

в пространстве $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$.

1.3 Явное решение одного класса четырехкомпонентных двумерных сингулярных интегральных уравнений

Пусть D - конечная односвязная область комплексной плоскости, содержащая внутри точку $z = 0$ и ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ; $B(z,\zeta)$ - керн-функция Бергмана области D, представимая в виде (см.[58], сс 252,258):

$$B(z,\zeta) = -\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z \partial \overline{\zeta}} = \frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{(1-\omega(z)\overline{\omega(\zeta)})},$$

где $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta \in \overline{D}, G(z,\zeta)$ - функция Грина задачи Дирихле оператора Лапласа в области D, $\omega(z)$ - однолистное конформное отображение области D на единичный круг с центром в начале координат, $\omega(0) = 0$, штрих обозначает производную, а черта над функцией - комплексное сопряжение. Функция $B(z,\zeta)$ имеет особенность лишь при $z = \zeta \in \Gamma$.

1.3.1 Интегральное уравнение с операторами S и B

Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}(Af)(z) &\equiv \\ &\equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} - \frac{c(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}ds_\zeta - \frac{d(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}ds_\zeta + \\ &+ \frac{\nu(z)}{\pi}\iint\limits_D B(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta + \frac{\delta(z)}{\pi}\iint\limits_D \overline{B(z,\zeta)}f(\zeta)ds_\zeta = g(z), \quad z \in \overline{D},\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

где $a(z), b(z), c(z), d(z), \nu(z), \delta(z)$ -заданные в замкнутом области $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные непрерывные функции. Комплекснозначные непрерывные функции $g(z)$ и $f(z)$ соответственно задаются и ищутся в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$;

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L_{\beta-2/p}} = ||F||_{L_p}\},$$

$(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$,

Введя операторы

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (Kf)(z) = \overline{f(z)},$$

$$(\overline{S}f)(z) = (KSKf)(z), \quad (Bf)(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_D B(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta,$$

$$(\overline{B}f)(z) = (KBKf)(z),$$

ds_ζ - элемент площади, D - конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ, первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, второй интеграл имеет особенность лишь на границе Γ, понимается в смысле Лебега и обычно называется оператором Бергмана, запишем уравнение (1.3.1) в операторном виде:

$$A \equiv aI + bK + cS + d\overline{S}K + \nu\overline{B} + \delta BK = g \tag{1.3.2}$$

Известно [54],[8], что операторы типа (1.3.2) играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций, а также тесно связаны с краевыми задачами для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. При различных дополнительных предположениях относительно коэффициентов оператор A изучался ранее в работах А.Джураева [8], Н.Н.Комяка [22], К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова [44] и Г.Джангибекова [42].

В частности, из работы [42] для оператора A следует, что нётеровые операторы A разделяются на два гомотопических класса, которые эффективно описываются через коэффициенты оператора A, т.е. необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчета индекса оператора A в лебеговых пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D), (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ получены в эффективном виде.

Что касается явных формул для решения уравнения $Af = g$, то они получены лишь в простейших случаях $b = c = \nu = \delta = 0$ ([7],[23], а также [41]).

В этом разделе рассматривается вопрос нахождения регуляризаторов оператора A в явном виде и в случае постоянных коэффициентов нахождения решения уравнения $Af = g$ с оператором из (1.3.2) в замкнутом виде.

Из результатов [42] для оператора (1.3.2) следует:

Теорема 1.3.1. *Для нётеровости уравнение (1.3.1) в* $L^p_{\beta-\frac{2}{\pi}}(D), \quad 1 < p < \infty, \ 0 < \beta < 2$ *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух (исключающих друг друга) условий:*

$$\begin{gathered} |\triangle_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для} \quad \forall z \in \overline{D} \\ \triangle_1(t) + \nu_1(t) - \lambda_1(t)\beta_1(t)\overline{\delta_1(t)} \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall t \in \Gamma, \end{gathered} \tag{1.3.3}$$

$$
\begin{gathered}
|\triangle_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для} \quad \forall z \in \overline{D}, \\
\nu_2(t) + \beta_2(t)(\triangle_2(t) - \lambda_2(t)\overline{\delta_2(t)}) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall t \in \Gamma
\end{gathered} \tag{1.3.4}
$$

При этом, если выполнено (1.3.3), то индекс оператора A

$$
\kappa = 2Ind_\Gamma\{\triangle_1(t) + \nu_1(t) - \lambda_1(t)\beta_1(t)\overline{\delta_1(t)}\},
$$

а если выполнено (1.3.4), то

$$
\kappa = 2Ind_\Gamma\{\nu_2 + \beta_2(t)\triangle_2(t) - \lambda_2(t)\overline{\delta_2(t)}\ \overline{\beta_2(t)}\},
$$

где использованы следующие обозначения:

$$
\triangle_1 = |a|^2 - |b|^2, \quad \triangle_2 = |d|^2 - |c|^2, \quad \lambda = \overline{a}c - b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} - \overline{b}c,
$$

$$
\nu_1 = \overline{a}\nu - b\overline{\delta}, \quad \delta_1 = \overline{a}\delta - b\overline{\nu}, \quad \nu_2 = \overline{d}\nu - c\overline{\delta}, \quad \delta_2 = \overline{d}\delta - c\overline{\nu},
$$

$$
q_1 = \begin{cases} \frac{\triangle_2 - \triangle_1 + sign\triangle_1\sqrt{(\triangle_2-\triangle_1)^2 - 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } \lambda = 0 \end{cases}
$$

$$
q_2 = \begin{cases} \frac{\triangle_2 - \triangle_1 + sign\triangle_2\sqrt{(\triangle_2-\triangle_1)^2 - 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } \lambda = 0 \end{cases}
$$

$$
\beta_1 = \frac{\overline{\mu}}{\triangle_1 + \lambda_1\overline{\lambda}}, \qquad \beta_2 = \frac{\mu}{\triangle_2 + \lambda_2\overline{\lambda}}
$$

Здесь мы будем предполагать, что условия (1.3.3) или (1.3.4) из теоремы 1.3.1 выполнены. Следовательно оператор A имеет (правый и левый) регуляризатор.

Докажем, что имеет место

Теорема 1.3.2. *Пусть выполнены условия (1.3.3), тогда оператор A имеет в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ двусторонний регуляризатор вида*

$$R = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \overline{\beta_1}\ \overline{S}K + \frac{\nu_1^* + |\beta_1|^2}{1+\nu_1^*}\overline{B}\Big)\times \\ \times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_1^n (S + \frac{\delta_1 *}{q_1} BK)^n\Big)\Delta_1^{-1} T_1, \tag{1.3.5}$$

а если выполнено условие (1.3.4),

$$R = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\overline{\beta_2} I - \overline{S}K - \frac{1+\overline{\beta}_2\nu_2^*}{\nu_2^*\nu + \beta_2}\Big)\times \\ \times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_2^n (S + \frac{\delta_1 *}{q_1} BK)^n\Big)\Delta_2^{-1} T_2, \tag{1.3.6}$$

где операторы T_1 и T_2 определяются по формулам

$$T_1 = \Big(\overline{a} + q_1\beta_1\overline{b}\Big)I - \Big(b + q_1\beta_1 a\Big)K, \\ T_2 = \Big(\overline{d} + q_2\beta_2\overline{c}\Big)I - \Big(c + q_2\beta_2 d\Big)K \tag{1.3.7}$$

и $\delta_j^*(z)$, $\nu_j^*(z)$ $(j = 1, 2)$ такие непрерывные в $\overline{D}$ функции, которые на Γ имеют значения.

$$\delta_1^*(z) = \frac{\delta_1 - q_1\beta_1(\triangle_1 + \overline{\nu_1})}{\triangle_1 + \overline{\nu_1} - \overline{q_1}\ \overline{\beta_1}\delta_1}, \quad \delta_2(z) = \frac{\delta_2 - q_2(\beta_2\overline{\nu_2} + \triangle_2)}{\triangle_2\beta_2 + \overline{\nu_2} - \overline{q_2}\ \overline{\beta_2}\delta_2} \\ \nu_1^*(z) = \frac{\nu_1 - q_1\beta_1\overline{\delta_1}}{\triangle_1}, \quad \nu_2^*(z) = \frac{\nu_2 - q_2\beta_2\overline{\delta_2}}{\triangle_2} \tag{1.3.8}$$

Доказательство. а) Пусть выполнены условия (1.3.3) из теоремы 1.3.1. Тогда ограниченный в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причем оператор A можно представить в виде

$$A = T_1^{-1}\Delta_1 A_1,$$

где

$$A_1 = I - q_1\beta_1 K + q_1 S + \beta_1\overline{S}K$$

Далее, используя свойства композиции операторов [42] $S\overline{S} = I - B, S\overline{B}, B\overline{B}$ непосредственными вычислениями, можно убедиться, что имеет место представление

$$A = T_1^{-1} \cdot \triangle\Big(I - q_1 S + \delta_1^* BK\Big)\times \\ \times\Big(I + \beta_1 \overline{S} K + \nu_1^* \overline{B}\Big) + V_1, \tag{1.3.9}$$

где V_1 - вполне непрерывный в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ оператор. Из результатов [42] следует, что оператор

$$I + \beta_1 \overline{S} K + \nu_1^* \overline{B}$$

из представления (1.3.9) имеет регуляризатор вида

$$R = \frac{1}{1 - |\beta_1|^2}\Big(I - \beta_1 \overline{S} K + \frac{\overline{\nu_1^*} + |\beta_1|^2}{1 + \nu_1^*}\overline{B}\Big)$$

Займемся оператором $I - q_1 S + \delta_1^* BK$. Поскольку $|q_1| < 1$, то предположив $q_1 \neq 0$, покажем, что оператор $S + B\frac{\delta_1^*}{q_1}K$ обратим в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$. Действительно

$$\Big(S + B\frac{\delta_1^*}{q_1}K\Big)f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}ds_\zeta + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{\delta_1^*(\zeta)\overline{f(\zeta)}}{q_1(\zeta)(1 - z\overline{\zeta})^2}ds_\zeta.$$

Во втором интеграле, сделав замену $\zeta = \frac{1}{\overline{\sigma}}$ и введя новую функцию $F(\sigma)$ по формуле

$$F(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma), & \text{если } |\sigma| \le 1, \\ -\frac{1}{\overline{\sigma}^2}\frac{\delta_1^*(\frac{1}{\overline{\sigma}})}{q_1(\frac{1}{\overline{\sigma}})}\overline{f(\frac{1}{\overline{\sigma}})}, & \text{если } |\sigma| > 1 \end{cases}$$

будем иметь

$$\big(S + B\frac{\delta_1^*}{q_1}K\big)f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<\infty} \frac{F(\sigma)}{(\sigma - z)^2}ds \equiv S_E F$$

Как известно [54], при $p > 1$ $|q_1|||S_E||_{L_p} \le 1$ $(||S_E||_{L_2} = 1)$ и обратным для оператора S_E в L_p является оператор $\overline{S_E}$. Что касается пространства $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, то указанный факт следует из выполнения $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) \subset L^q(D)$ при некотором $q > 1$.

Следовательно, поскольку $|q_1(z)| < 1$, $z \in \overline{D}$, то уравнение

$$f(z) - q_1(z)\Big(Sf - B\frac{\delta_1^*}{q_1}\overline{f}\Big)(z) = g(z)$$

имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений

$$f(z) = g(z) + (q_1 S + \delta_1^* BK)g + (q_1 S + \delta_1^* BK)^2 g + ... \qquad (1.3.10)$$

Отсюда ясно, что оператор

$$I + \sum_{k=1}^{\infty} q_1^n (S + \frac{\delta_1^*}{q_1} BK)^n$$

будет регуляризатором для оператора

$$I - q_1 S + \delta_1^* BK$$

Этим завершается доказательство того, что оператор R из (1.3.5) является регуляризатором исходного оператора A

б) Пусть выполнено условие (1.3.4) теоремы 1.3.1. Тогда оператор T_2 из (1.3.7) имеет непрерывный обратный, причем оператор A можно представить в виде

$$A = T_2^{-1} \bigtriangleup_2 A_2,$$

где

$$A_2 = \beta_2 I - q_2 K + \overline{S} K - q_2 \beta_2 S + \nu_2^* \overline{B} + \frac{\delta_2 - q_2 \beta_2 \overline{\nu_2}}{\bigtriangleup_2} B$$

непосредственными подсчетами показывается, что имеет место представление

$$A = T_2^{-1}(I - q_2 S + \delta_2^* BK)(\beta_2 I + \overline{S}K + \nu_2^* \overline{B}) + V_2,$$

где $|q_2| < 1$ и V_2 является вполне непрерывным оператором в $L^p_{\beta - \frac{2}{\pi}}(D)$ и далее аналогично пункту (а) устанавливается, что в случае выполненных условий (1.3.4) оператор R из формулы (1.3.5) является двусторонним регуляризатором исходного оператора A.

Пусть теперь в уравнении (1.3.1) $D = \{z : |z| < 1\}$, все коэффициенты a, b, c, d, ν, δ -постоянны и пусть выполняется еще условие

$$|a + \nu| \neq |b + \delta|. \tag{1.3.11}$$

Тогда нетрудно убедиться, что при выполнении одного из условий (1.3.3) или (1.3.4) исходное уравнение (1.3.1) будет иметь в

$L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D)$ $(0 < \beta < 2,\ 1 < p < \infty)$ единственное решение

$$f(z) = (A^{-1}g)(z),$$

где обратный оператор A^{-1} совпадает с регуляризатором R из (1.3.5), если выполнено (1.3.3) и совпадает с оператором R из (1.3.6), если выполнено условие (1.3.4).

Пусть теперь $|a + \nu| = |b + \delta|$, тогда непосредственными вычислениями устанавливается, что однородное уравнение $A_1 f = 0$ имеет точка одно линейно независимое нетривиальное решение

$$f_0(z) = \overline{a} + \overline{\nu} - b - \delta,$$

а для разрешимости неоднородного уравнения (1.3.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$Re \iint\limits_{|z|<1} \omega g(z) ds_z = 0, \tag{1.3.12}$$

где $\omega = \overline{a} + \overline{\nu} - \overline{b} - \overline{\delta}$ -решение однородное сопряженное к уравнению (1.3.1).

Таким образом имеет место

Теорема 1.3.3. *Пусть коэффициенты уравнения (1.3.1) постоянны и выполнено условие (1.3.11). Тогда при выполнении одно из условий (1.3.3) или (1.3.4) уравнение (1.3.1) имеет в пространствах* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(0 < \beta < 2,\ 1 < p < \infty)$ *единственное решение*

$$f(z) = (A^{-1}g)(z),$$

где

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \overline{\beta_1}\ \overline{S}K - \frac{\nu_1^* + |\beta_1|^2}{1+\nu_1^*}\overline{B}\Big)\times$$
$$\times\Big(I + q_1 S_{q_1}\Big) \triangle_1^{-1} T_1,$$

если выполнено (1.3.3) и

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\overline{\beta_2} I - \overline{S}K\ - \frac{1+\overline{\beta}_2\nu_2^*}{1+\nu_2^*}\overline{B}\Big)\times$$
$$\times\ \Big(I + q_2 S_{q_2}\Big) \triangle_2^{-1} T_2$$

если выполнено (1.3.4).

Если условие (1.3.11) нарушено, то однородное уравнение (1.3.1) имеет одно линейно-независимое решение:

$$f(z) = \overline{a} + \overline{\nu} - b - \delta,$$

а для разрешимости неоднородного уравнения (1.3.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно условие (1.3.12).

1.3.2 Интегральное уравнение с операторами S_m и B_m

Здесь в этом пункте результаты предыдущего пункта обобщается на следующее интегральное уравнение

$$\begin{aligned}(Af)(z) \equiv & a(z)f(z) + b(z)f(z) + c(z)(S_m f)(z) + d(z)(\overline{S_m f})(z) + \\ & +\nu(z)(\overline{B_m} f)(z) + \delta(z)(B_m \overline{f})(z) = g(z),\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

где здесь $a(z), b(z), c((z), d(z), \nu(z), \delta(z)$ - комплекснозначные непрерывные в $\overline{D}$ функции;

$$(S_m f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \qquad \overline{S_m} = K S_m K,$$

$$(B_m f)(z) = \iint\limits_D B_m(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \quad \overline{B_m} = K B_m K,$$

$$B_m(z,\zeta) = \frac{1}{\pi((m-1)!)^2} \frac{\partial^{2m} G(z,\zeta)}{\partial z^m \partial \zeta^m},$$

$G(z,\zeta)$ - функция Грина для оператора Лапласа:

$$G(z,\zeta) = |\zeta - z|^{2(m-1)} \ln\left|\frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right|^2.$$

Оператор $B_m(z,\zeta)$ был введен в работах Г.Джангибекова [41],[33] и А.Джураева [13],[8] и назван поликерн-операторами Бергмана.

Оператор B_m - имеет особенность лишь на границе Γ области D и как отмечен в [33] его можно еще представить в виде

$$(B_m f)(z) = (Bf)(z) + \sum_{n=1}^{m-1} (S_n B \overline{S}_n f)(z),$$

где B является оператором Бергмана.

Отметим, что вопрос нётеровости и формула для вычисление индекса в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ исследован в работе [31].

Имеет место (см.[33])

Лемма 1.3.1. *Пусть* $f(z)\in L^p_{\beta-2/p}(1<p<\infty, 0<\beta<2)$. *Тогда имеет место*

$$S_m\overline{S_m}=I-B_m$$

и операторы $S_m\overline{B}_m, B_mS_m, B_m\overline{B}_m$ *и* $B_m^2-B_m$ *являются вполне непрерывными в* $L^p_{\beta-2/p}(D)$ *операторами.*

Лемма 1.3.2. *Интегральные операторы* $B_m, S_mB_m, \overline{B}_mS_m, S_mB_m\overline{B}_m$ *не являются вполне непрерывными в пространстве* $L^p_{\beta-2/p}(D)$, *причем их ядра теряют непрерывность лишь при совпадении обеих переменных на границе* Γ.

Лемма 1.3.3. *Если* $c(z)$ *непрерывна в* $\overline{D}$ *и* $c(t)=0$ *при* $t\in\Gamma$, *то оператор* $c(z)B_m$ *вполне непрерывен в* $L^p_{\beta-2/p}(D)$.

Применяя к уравнению (1.3.13) схему предыдущего пункта, с учетом свойства операторов S_m, B_m из леммы 1.3.1-1.3.3 доказывается, что имеют место

Теорема 1.3.4. *Пусть выполнены условия (1.3.3), тогда оператор* A *из (1.3.13) имеет в* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ *двусторонний регуляризатор вида*

$$\begin{aligned}R=\frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I-\overline{\beta_1}\ \overline{S_m}K+\frac{\nu_1^*+|\beta_1|^2}{1+\nu_1^*}\overline{B_m}\Big)\times\\ \times\Big(I+\sum_{n=1}^{\infty}q_1^n(S_m+\frac{\delta_1*}{q_1}B_mK)^n\Big)\Delta_1^{-1}T_1,\end{aligned}\tag{1.3.14}$$

а если выполнено условие (1.3.4),

$$R = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\overline{\beta_2}I - \overline{S_m}K - \frac{1+\overline{\beta}_2\nu_2^*}{\nu_2^*\nu+\beta_2}\Big)\times$$
$$\times\Big(I + \sum_{n=1}^{\infty} q_2^n(S + \frac{\delta_1 *}{q_1}B_m K)^n\Big)\Delta_2^{-1}T_2, \tag{1.3.15}$$

где операторы T_1 и T_2 определяются по формулам

$$T_1 = \Big(\overline{a} + q_1\beta_1\overline{b}\Big)I - \Big(b + q_1\beta_1 a\Big)K,$$
$$T_2 = \Big(\overline{d} + q_2\beta_2\overline{c}\Big)I - \Big(c + q_2\beta_2 d\Big)K \tag{1.3.16}$$

и $\delta_j^*(z)$, $\nu_j^*(z)$ $(j = 1,2)$ такие непрерывные в $\overline{D}$ функции, которые на Γ имеют значения.

$$\delta_1^*(z) = \frac{\delta_1 - q_1\beta_1(\triangle_1+\overline{\nu_1})}{\triangle_1+\overline{\nu_1}-\overline{q_1}\ \overline{\beta_1}\delta_1},\quad \delta_2(z) = \frac{\delta_2 - q_2(\beta_2\overline{\nu_2}+\triangle_2)}{\triangle_2\beta_2+\overline{\nu_2}-\overline{q_2}\ \overline{\beta_2}\delta_2}$$
$$\nu_1^*(z) = \frac{\nu_1 - q_1\beta_1\overline{\delta_1}}{\triangle_1},\quad \nu_2^*(z) = \frac{\nu_2 - q_2\beta_2\overline{\delta_2}}{\triangle_2} \tag{1.3.17}$$

Теорема 1.3.5. *Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ и коэффициенты уравнения (1.3.13) постоянны и выполнено условие (1.3.11). Тогда при выполнении одного из условий (1.3.3) или (1.3.4) уравнение (1.3.13) имеет в пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(0 < \beta < 2,\ 1 < p < \infty)$ единственное решение:*

$$f(z) = (A^{-1}g)(z),$$

где

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \overline{\beta_1}\ \overline{S_m}K - \frac{\nu_1^*+|\beta_1|^2}{1+\nu_1^*}\overline{B_m}\Big)\times$$
$$\times\Big(I + q_1 S_{mq_1}\Big)\triangle_1^{-1}T_1,$$

если выполнено (1.3.3) и

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\overline{\beta_2}I - \overline{S_m}K \ - \frac{1+\overline{\beta}_2\nu_2^*}{1+\nu_2^*}\overline{B_m}\Big)\times$$
$$\times\left(I + q_2 S_{mq_2}\right)\triangle_2^{-1}T_2$$

если выполнено (1.3.4), где оператор S_mq определен в разделе 2 и имеет вид

$$(S_mqf)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi}\iint\limits_D \frac{(|\zeta - z|)^{2(m-1)}f(\zeta)ds_\zeta}{[(\zeta-z)^m + (-1)^{m-1}q(z)(\bar{\zeta}-\bar{z})^m]^2}.$$

1.4 Явное решение некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений на плоскости

Пусть E комплексная плоскость $z = x+iy$, а E_1 ее пополнение одной бесконечно удаленной точкой. В этом разделе изучаются вопросы нахождения регуляризаторов двумерных сингулярных операторов на плоскости E и получение решения интегральных уравнений с такими операторами в замкнутом виде.

1.4.1 Интегральное уравнение с операторами S^E и $\overline{S^E}$ на плоскости

В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(E)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ рассматривается следующий оператор

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(S^E f)(z) + d(z)(\overline{S}^E\overline{f})(z), \qquad (1.4.1)$$

где

$$(S^E f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta, \quad (\overline{S}^E f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} ds_\zeta, \quad z \in E, \tag{1.4.2}$$

комплекснозначные функции $a(z), b(z), c(z), d(z)$ - непрерывны на E_1.

Из результатов работы Калдероне и А. Зигмунда вытекает, что оператор S^E и $\overline{S^E}$ действуют и являются ограниченными в $L_p(E), p > 1,$.

Следует отметить, что нётеровые свойства оператора A в лебеговых пространствах $L^p(E), p > 1$ изучен в работе Н.Н.Комяка [22]. Из указанной работы, а также из [44] следует:

Теорема 1.4.1. *Оператор A нетеров в $L^p_{\beta-2/p}(E), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$, тогда и только тогда, когда всюду в E выполняется одно из неравенств:*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \textit{для} \quad \forall z \in E, \tag{1.4.3}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \textit{для} \quad \forall z \in E, \tag{1.4.4}$$

где использованы следующие обозначения

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_2 = |d|^2 - |c|^2, \quad \lambda = \bar{a}c - b\bar{d}, \quad \mu = a\bar{d} - \bar{b}c,$$

$$q_1 = \begin{cases} \frac{\Delta_2 - \Delta_1 + sign\Delta_1 \sqrt{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 - 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}}, & \textit{если} \quad \lambda \neq 0, \\ 0, \textit{если} \quad \lambda = 0, \end{cases}$$

$$q_2 = \begin{cases} \frac{\Delta_2 - \Delta_1 + sign\Delta_2 \sqrt{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 - 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}}, & \textit{если} \quad \lambda \neq 0, \\ 0, \textit{если} \quad \lambda = 0, \end{cases}$$

Оператор A имеет (правый и левый) регуляризатор.

В этом разделе находятся регуляризаторы оператора A из (1.4.1), и при постоянных коэффициентах построен обратный оператор A_1.

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнено условие (1.4.3), тогда оператор A из (1.4.1) имеет в $L^p_{\beta-2/p}(E)$ двусторонний регуляризатор вида*

$$R=\frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I-\beta_1\ \overline{S}^E K\Big)\Big(I+q_1S^E_{q_1}\Big)\Delta_1^{-1}T_1, \tag{1.4.5}$$

а если выполнено условие (1.4.4), то

$$R=\frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\beta_2 I-\overline{S}^E K\Big)\Big(I+q_2S^E_{q_2}\Big)\Delta_2^{-1}T_2, \tag{1.4.6}$$

где операторы $S^E_{q_1}$ и $S^E_{q_2}$ определяются по формуле (1.2.2) и

$$T_1=\Big(\overline{a}+q_1\beta_1\overline{b}\Big)I-\Big(b+q_1\beta_1 a\Big)K,$$
$$T_2=\Big(\overline{d}+q_2\beta_2\overline{c}\Big)I-\Big(c+q_2\beta_2 d\Big)K,$$

а функции β_1,β_2,q_1,q_2 определены в предыдущем разделе.

Теорема 1.4.3. *Пусть коэффициенты уравнения (1.4.1) постоянны, тогда при выполнении одного из условий (1.4.3) или (1.4.4) уравнение (1.4.1) имеет в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(E), 1<p<\infty, 0<\beta<2$ единственное решение*

$$f(z)=(A^{-1}g)(z),$$

где

$$A^{-1}=\frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I-\beta_1\ \overline{S}^E K\Big)\Big(I+q_1S^E_{q_1}\Big)\Delta_1^{-1}T_1,$$

если выполнено условие (1.4.3), и

$$A^{-1}=\frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\beta_2 I-\overline{S}^E K\Big)\Big(I+q_2S^E_{q_2}\Big)\Delta_2^{-1}T_2,$$

если выполнено (1.4.4).

Доказательство. а) Пусть выполнены условия (1.4.3) из теоремы (1.4.1). Тогда ограниченный в $L^p_{\beta-2/p}(E)$ оператор T_1 имеет непрерывный обратный оператор, причем оператор A можно представить в виде

$$A = T_1^{-1}\Delta_1 A_1,$$

где

$$A_1 = I - q_1\beta_1 K + q_1 S^E + \beta_1 \overline{S^E} K$$

Далее, используя композицию операторов $S^E\overline{S^E} = I$, непосредственными вычислениями убеждаемся, что имеет место представление

$$A = T_1^{-1}\Delta_1(I - q_1 S)(I + \beta_1\bar{S}K) + V_1, \tag{1.4.7}$$

где V_1 вполне непрерывный в $L^p_{\beta-2/p}(E)$. Из результатов [33] следует, что оператор $I + \beta_1\bar{S}K$ из представления (1.4.7) имеет регуляризатор вида

$$R = \frac{1}{1-|\beta|^2}(I - \beta_1\bar{S}K).$$

Как известно из [54], при $p > 1 \quad ||q_1||S^E||_{L_p} \leq 1(||S^E||_{L_2} = 1)$ и обратным для оператора S^E в $L^p(E)$ является оператор $\overline{S}^E$. Поскольку $|q_1(z)| < 1, \quad z \in E$ то уравнение

$$f(z) - q_1(z)(S^E f)(z) = g(z)$$

имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений

$$f(z) = g(z) + (q_1 S)g + (q_1 S)^2 g + \dots .$$

Отсюда ясно, что оператор $I + qS^E_q$ будет регуляризатором для оператора $R = I - q_1 S$. Этим завершается доказательство.

б) Пусть выполнено условие (1.4.4) теоремы (1.4.2).

Тогда оператор T_2 из теоремы (1.4.2) имеет непрерывный обратный оператор $A = T_2^{-1}\triangle_2 A_2$, где

$$A_2 = \Delta_2(\beta_2 - q_2 K + \overline{S^E} K - q_2\beta_2 S^E).$$

Непосредственными подсчетами показывается, что имеет место представление

$$A = T_2^{-1}(I - g_2 S)(\beta_2 I - \bar{S}K) + V_2,$$

где V_2 является вполне непрерывным оператором.

Далее аналогично, как в пункте (а) устанавливается, что в случае выполнения условия (1.4.4). Оператор R из формулы (1.4.11) является двусторонним регуляризатором исходного оператора A.

Пусть теперь в уравнении (1.4.1) все коэффициенты $a, b, c, d,$ -постоянны.

Тогда нетрудно убедиться, что при выполнении одного из условий (1.4.3) или (1.4.4) исходного уравнения (1.4.1) будет иметь в $L^p_{\beta-2/p}(E)$ $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ единственное решение

$$f(z) = (A^{-1}g)(z),$$

где обратный оператор A^{-1} совпадает с регуляризатором R из (1.4.5), если выполнено условие (1.4.3) и совпадает с оператором R из (1.4.11), если выполнено условие (1.4.4).

1.4.2 Интегральное уравнение с операторами S_m^E и $\overline{S^E}_m$ на плоскости

В этом пункте, полученные в начале раздела результаты, обобщаются в уравнении

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + c(z)(S_m^E f)(z) + d(z)(\overline{S}_m^E \overline{f})(z), \qquad (1.4.8)$$

где

$$\begin{gathered}(S_m^E f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_E \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z)|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \\ (\overline{S}_m^E f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_E \frac{e^{2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad z \in E,\end{gathered} \qquad (1.4.9)$$

комплекснозначные функции $a(z), b(z), c(z), d(z)$ - непрерывны на E_1.

Отметим, что нётеровость и индекс оператора A в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(E)$ следует из результатов работы [31].

Принимая во внимание, что для оператора S_m^E имеют место следующие равенства

$$S_m^E = S^{mE}, \; S_m^E \overline{S_m^E} = I,$$

где I - единичный оператор, а так же, то что оператор $aS_m^E - S_m^E a$ - является вполне непрерывным оператором в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(E)$ и, применяя к уравнению (1.4.8) схему пункта 1 настоящего раздела, убеждаемся, что имеют место

Теорема 1.4.4. *Пусть выполнено условие (1.4.3), тогда оператор A из*

(1.4.8) имеет в $L^p_{\beta-2/p}(E) 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ двусторонний регуляризатор вида

$$R = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \beta_1 \ \overline{S_m}^E K\Big)\Big(I + q_1 S^E_{mq_1}\Big)\Delta_1^{-1} T_1, \tag{1.4.10}$$

а если выполнено условие (1.4.4), то

$$R = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\beta_2 I - \overline{S_m}^E K\Big)\Big(I + q_2 S^E_{mq_2}\Big)\Delta_2^{-1} T_2, \tag{1.4.11}$$

где операторы $S^E_{mq_1}$, $S^E_{mq_2}$ и T_1, T_2 определяются по формулам

$$(S^E_{mq} f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(|\zeta - z|)^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{[(\zeta - z)^m + (-1)^{m-1} q(z)(\bar{\zeta} - \bar{z})^m]^2},$$

$$(\overline{S}^E_{mq} f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(|\zeta - z|)^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{[(\overline{\zeta} - \overline{z})^m + (-1)^{m-1} \overline{q(z)}(\zeta - z)^m]^2},$$

$$T_1 = \Big(\overline{a} + q_1 \beta_1 \overline{b}\Big) I - \Big(b + q_1 \beta_1 a\Big) K,$$

$$T_2 = \Big(\overline{d} + q_2 \beta_2 \overline{c}\Big) I - \Big(c + q_2 \beta_2 d\Big) K,$$

а функции $\beta_1, \beta_2, q_1, q_2$ определены в разделе 3.

Теорема 1.4.5. *Пусть коэффициенты уравнения (1.4.8) постоянны, тогда при выполнении одного из условий (1.4.3) или (1.4.4) уравнение (1.4.8) имеет в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(E), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ единственное решение*

$$f(z) = (A^{-1} g)(z),$$

где

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_1|^2}\Big(I - \beta_1 \ \overline{S_m}^E K\Big)\Big(I + q_1 S^E_{mq_1}\Big)\Delta_1^{-1} T_1,$$

если выполнено условие (1.4.3), и

$$A^{-1} = \frac{1}{1-|\beta_2|^2}\Big(\beta_2 I - \overline{S_m}^E K\Big)\Big(I + q_2 S^E_{mq_2}\Big)\Delta_2^{-1} T_2,$$

если выполнено (1.4.4).

Глава 2

Решение двумерных интегральных уравнений с ядрами Бергмана и уравнения с матричными коэффициентами в замкнутом виде

2.1 Явное решение двумерных интегральных уравнений с ядрами Бергмана

В единичном круге D комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$\begin{gathered}(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + \frac{c(z)}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{d(z)}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + \\ + \frac{e(z)}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{q(z)}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} = g(z), \quad z \in \overline{D},\end{gathered} \tag{2.1.1}$$

в котором $a(z), c(z), d(z), e(z), q(z)$ - заданные в замкнутом круге $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные непрерывные функции. Комплекснозначные непрерывные функции $g(z)$ и $f(z)$ соответственно задаются и ищутся в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p}f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}(D)} = ||F||_{L^p(D)}\},$$

где $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$. Из результатов работы [32] следует, что для нётеровости оператора A в $L^p_{\beta-2/p}(D) \quad (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a(z) \neq 0,\ z \in \overline{D} \text{ и } \Delta(t) = (a(t)+c(t))(\overline{a(t)}+\overline{d(t)})-e(t)\overline{q(t)} \neq 0,\ t \in \Gamma. \quad (2.1.2)$$

В предлагаемой работе найден регуляризатор оператора A, а в случае постоянных коэффициентов уравнение (2.1.1) решен в замкнутом виде.

Для удобства введем операторы

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2}, \quad (\overline{B}f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2}$$

Лемма 2.1.1. *В пространстве* $L^p_{\beta-2/p}(D) \quad (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, *имеют место формулы*

$$(BBf)(z) = (Bf)(z), \quad z \in \overline{D}, \quad (2.1.3)$$

$$(\overline{B}Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D f(\zeta)ds_\zeta, \quad z \in \overline{D}, \quad (2.1.4)$$

Доказательство. Из равенства

$$(Bf)(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{zf(\zeta)ds_\zeta}{1-z\overline{\zeta}}\right)$$

вытекает, что

$$(BBf)(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{zds_\zeta}{1-z\overline{\zeta}}\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-\zeta\overline{\sigma})^2}\right).$$

Поскольку внешний интеграл имеет слабую особенность на границе круга $\Gamma :$ $|\zeta| = 1$, а внутренний имеет особенность порядка два только на окружности, то, поменяв порядок интегрирования, получим

$$(BBf)(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_D f(\sigma)ds_\sigma \frac{\partial}{\partial \overline{\sigma}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{z\overline{\sigma}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})(1-\zeta\overline{\sigma})}\right)\right]. \qquad (2.1.5)$$

Посчитаем внутренний интеграл. Для этого воспользовавшись при $|z| < 1$, $|\zeta| < 1, |\sigma| < 1$ разложениями

$$\frac{1}{1-z\overline{\zeta}} = \sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\zeta})^k, \quad \frac{1}{1-\zeta\overline{\sigma}} = \sum_{j=0}^{\infty}(\zeta\overline{\sigma})^j,$$

получим

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{z\overline{\sigma}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})(1-\zeta\overline{\sigma})} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \overline{\zeta}^k\zeta^j ds_\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(z\overline{\sigma})^{k+1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_D |\zeta|^{2k}ds_\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z\overline{\sigma})^{k+1}}{k+1}.$$

Внесу это значение в (2.1.5) и выполнив операцию дифференцирования, получим требуемое равенство

$$(BBf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D f(\sigma)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z\overline{\sigma})^k ds_\sigma = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-z\overline{\sigma})^2} = (Bf)(z).$$

Докажем теперь равенство (2.1.4). Аналогично имеем

$$(\overline{B}Bf)(z) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{z}ds_\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-\zeta\overline{\sigma})^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_D f(\sigma)ds_\sigma \frac{\partial}{\partial \overline{\sigma}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{z\sigma}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\sigma})}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_D f(\sigma)ds_\sigma \frac{\partial}{\partial \overline{\sigma}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\overline{z}^{k+1}\overline{\sigma}^{j+1}\zeta^{k+j}ds_\zeta\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left[\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \overline{z} f(\sigma) ds_\sigma \frac{\partial}{\partial \overline{\sigma}} \left(\frac{\overline{\sigma}}{\pi} \iint\limits_D ds_\zeta \right) \right] = \frac{1}{\pi} \iint\limits_D f(\sigma) ds_\sigma.$$

Следствие. Имеют место равенства $\overline{B}^2 = \overline{B}$, и $B\overline{B} = \overline{B}B$.

Лемма 2.1.2. *Если $a(z)$ - непрерывна в $\overline{D}$, то операторы $aB - Ba$ и $a\overline{B} - \overline{B}a$ вполне непрерывны в $L^p_{\beta-2/p}(D) \quad (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$.*

Доказательство. Пусть вначале $a(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, где $0 < \alpha < 1$. Во внутренних точках области D оператор B особенностей не имеет, а для точек z, ζ границы Γ оператор $aB - Ba$ имеет слабую особенность, ибо для его ядра имеется оценка

$$\left| \frac{a(\zeta) - a(z)}{(1 - z\overline{\zeta})^2} \right| \leq \frac{M|\zeta - z|^\alpha}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} = \frac{M}{|1 - z\overline{\zeta}|^{2-\alpha}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $a(z)$ просто непрерывна в $\overline{D}$. Произвольную непрерывную функцию $a(z)$ можно аппроксимировать функциями $a_n(z)$ из класса $C_\alpha(\overline{D})$. Согласно неравенству

$$||(aB - aB)f - (a_nB - Ba_n)f|| \leq ||B(a - a_n)f|| + ||(a - a_n)Bf|| \leq$$

$$\leq ||B|| \max_{z \in \overline{D}} |a(z) - a_n(z)|,$$

последовательность вполне непрерывных операторов $a_nB - Ba_n$, действующих в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ равномерно сходится к оператору $aB - Ba$. Поэтому оператор $aB - Ba$ вполне непрерывен в $L^p_{\beta-2/p}(D)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 2.1.3. *Если $c(z)$ - непрерывна в $\overline{D}$ и $c(t) = 0$ при $t \in \Gamma$, то тогда оператор $c(z)B$ вполне непрерывен в $L^p_{\beta-2/p}(D) \quad (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$.*

Доказательство. Обозначим через P_M оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества $M \subset D$. Пусть D_ε - внутренняя подобласть области D такая, что каждая точка ее границы попадает в ε - окрестность некоторой точки Γ. Представим оператор $c(z)B$ в виде.

$$c(z)B = c(z)BP_{D_\varepsilon} + c(z)P_{D_\varepsilon}BP_{D\setminus D_\varepsilon} + c(z)P_{D\setminus D_\varepsilon}BP_{D\setminus D_\varepsilon}$$

Ядра первых двух операторов ограничены, а потому эти операторы вполне непрерывны в $L^p_{\beta-2/p}(D)$. Норма третьего оператора в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю в силу условия на $c(z)$. Поэтому $c(z)B$ вполне непрерывен.

Введем в $\overline{D}$ вспомогательную функцию $a_1 = \dfrac{1}{a}$ и такие непрерывные в $\overline{D}$ функции c_1, d_1, e_1, q_1, что на границе Γ области $\overline{D}$ соответственно имеют вид:

$$c_1 = \frac{e\overline{q} - (\overline{a} + \overline{d})c}{a\Delta}, \quad d_1 = \frac{\overline{e}q - (\overline{a} + \overline{c})d}{a\overline{\Delta}}, \quad e_1 = -\frac{e}{\Delta}, \quad q_1 = -\frac{q}{\overline{\Delta}}, \qquad (2.1.6)$$

где $\Delta = (a + c)(\overline{a} + \overline{d}) - e\overline{q}$.

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия (2.1.2). Тогда оператор*

$$R = a_1(z)I + c_1(z)B + d_1(z)\overline{B} + e_1(z)BK + q_1(z)\overline{B}K$$

является двусторонним регуляризатором оператора A *в* $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$, *где* $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$.

Доказательство. Воспользовавшись результатами лемм (2.1.1),(2.1.2) непосредственными вычислениями получим

$$RA = (a_1I + c_1B + d_1\overline{B} + e_1BK + q_1\overline{B}K)(aI + cB + d\overline{B} + eBK + q\overline{B}K) =$$

$$= I + (a_1 c + c_1(a+c) + e_1 q)\, B + (a_1 d + d_1(a+d) + q_1 \overline{e})\, \overline{B} +$$

$$+((a_1 + c_1)e + e_1(\overline{a} + \overline{d}))BK + ((a_1 + d_1)q + q_1(\overline{a} + \overline{c}))\overline{B}K +$$

$$+(c_1 d + d_1 c + e_1 \overline{e} + q_1 \overline{q})B\overline{B} + (c_1 q + e_1 \overline{c} + d_1 e + q_1 \overline{d})B\overline{B}K + T,$$

где T вполне непрерывный оператор. Учитывая значения коэффициентов оператора R из (2.1.6), нетрудно убедиться, что все коэффициенты при операторах $B, \overline{B}, BK, \overline{B}K$ на границе Γ равны нулю. Тогда в силу леммы 3 имеем $RA = I + T$, ибо операторы $B\overline{B}$ и $B\overline{B}K$ также вполне непрерывны.

Аналогично доказывается, что $AR = I + T$.

Теперь рассмотрим уравнение (2.1.1) в случае, когда его коэффициенты $a, c, d, e, q,$ - комплексные постоянные числа.

Положим $\Delta_1 = |a + c + d|^2 - |e + q|^2 \neq 0,$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(e+q)[\overline{cq_1} + \overline{d}\overline{e_1} + \overline{e}c_1 + \overline{q}d_1] - (\overline{a} + \overline{c} + \overline{d})[cd_1 + dc_1 + e\overline{e_1} + q\overline{q_1}]}{\Delta_1}, \\ \tau &= \frac{(e+q)[\overline{c}\overline{d_1} + \overline{d}\overline{c_1} + \overline{e}e_1 + \overline{q}q_1] - (\overline{a} + \overline{c} + \overline{d})[cq_1 + de_1 + e\overline{c_1} + q\overline{d_1}]}{\Delta_1}. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Имеет место

Теорема 2.1.2. *Пусть коэффициенты оператора A из (2.1.1) постоянны и удовлетворяют условиям (2.1.2) и кроме того $\Delta_1 = |a+c+d|^2 - |e+q|^2 \neq 0$, тогда однородное уравнение $Af = 0$ в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ нетривиальных решений не имеет, а неоднородное $Af = g$*

безусловно разрешимо и его решение дается формулой

$$\begin{aligned}f(z) =& a_1 g(z) + \frac{c_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{d_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{e_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{q_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{\alpha}{\pi}\iint\limits_D g(\zeta)ds_\zeta + \frac{\tau}{\pi}\iint\limits_D \overline{g(\zeta)}ds_\zeta \equiv (A^{-1}g)(z), \quad z\in\overline{D},\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

где константы $a_1, c_1, d_1, e_1, q_1, \alpha, \tau$ определяются по формулам (2.1.7).

Если же $\Delta_1 = 0$, то однородное уравнение $Af = 0$ имеет точно одно линейно-независимое нетривиальное решение

$$f_0(z) = \overline{a} + \overline{c} + \overline{d} - e - q,$$

а для разрешимости неоднородного $Af = g$ необходимо и достаточно выполнение одного условия

$$Re\iint\limits_D \omega g(\zeta)ds_\zeta = 0,$$

где $\omega = \overline{a} + \overline{c} + \overline{d} - \overline{e} - \overline{q}$ решение однородного сопряженного к (2.1.1) уравнения. При его выполнении неоднородное уравнение имеет решение

$$\begin{aligned}f(z) =& a_1 g(z) + \frac{c_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{d_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{g(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{e_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{q_1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + Mf_0, \quad z\in\overline{D},\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

где M - произвольная вещественная постоянная.

Доказательство. Пусть условия нётеровости выполнены и, кроме того, выполнено неравенство $\Delta_1 = |a+c+d|^2 - |e+q|^2 \neq 0$. Тогда из результатов [32] следует, что оператор A из (2.1.1) обратим. Будем искать обратный оператор в виде

$$A^{-1} = R + \alpha B\overline{B} + \tau B\overline{B}K,$$

где R - является регуляризатором оператора A из теоремы 1, а комплексные параметры α и τ пока произвольны. С учетом результатов лемм 5.1-5.3 будем иметь

$$AA^{-1} = (aI + cB + d\overline{B} + eBK + q\overline{B}K)(R + \alpha B\overline{B} + \tau B\overline{B}K) =$$

$$= \left(aI + cB + d\overline{B} + eBK + q\overline{B}K\right) \times$$

$$\times \left(a_1 I + c_1 B + d_1\overline{B} + e_1 BK + q_1\overline{B}K + \alpha B\overline{B} + \tau B\overline{B}K\right) =$$

$$= I + ((a + c + d)\alpha + (e + q)\overline{\tau} + cd_1 + dc_1 + e\overline{e_1} + q\overline{q_1})\, B\overline{B} +$$

$$+ \left((a + c + d)\tau + (e + q)\overline{\alpha} + cq_1 + de_1 + e\overline{c_1} + q\overline{d_1}\right) B\overline{B}.$$

Для того, чтобы оператор A^{-1} был обратным к A необходимо, чтобы коэффициенты при вполне непрерывных операторов $B\overline{B}$ и $B\overline{B}K$ были нулями, т.е. должно выполняться равенство

$$(a + c + d)\alpha + (e + q)\overline{\tau} = -cd_1 - dc_1 - e\overline{e_1} - q\overline{q_1},$$

$$(\overline{e} + \overline{q})\alpha + (\overline{a} + \overline{c} + \overline{d})\overline{\tau} = -\overline{cq_1} - \overline{d}\overline{e_1} - \overline{e}c_1 - \overline{q}d_1.$$

В силу неравенства $\Delta_1 = |a + c + d|^2 - |e + q|^2 \neq 0$ константы α и τ определяются единственным образом по формулам (2.1.7).

Пусть теперь $\Delta_1 = 0$. Тогда в силу того, что операторы Бергмана B и $\overline{B}$ константу переводят в себя, непосредственной проверкой можно убедиться, что $f_0 = \overline{a} + \overline{c} + \overline{d} - e - q$ является решением однородного уравнения (2.1.1).

Отметим, что при $e = q = 0$ теорема (2.1.2) доказана в работе [21].

Обобщение. Полученные выше результаты обобщаются на уравнение

$$
\begin{aligned}
(A_1 f)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)\overline{f(z)} + \frac{c(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \\
+ \frac{d(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \frac{e(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \\
+ \frac{q(z)}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2} = g(z), \quad z \in \overline{D},
\end{aligned}
\tag{2.1.10}
$$

где заданная функция $b(z)$ также, как и остальные коэффициенты из (2.1.10) непрерывна в $\overline{D}$.

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
\Delta_2 = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_3 = (a+c)(\overline{a}+\overline{d}) - (b+e)(\overline{b}+\overline{q}), \\
a_2 = \frac{\overline{a}}{\Delta_2}, \quad b_2 = -\frac{b}{\Delta_2}, \quad c_2 = \frac{\overline{a}+\overline{d}}{\Delta_3} - \frac{\overline{a}}{\Delta_2}, \quad d_2 = \frac{\overline{a}+\overline{c}}{\overline{\Delta_3}} - \frac{\overline{a}}{\Delta_2}, \\
e_2 = -\frac{b+e}{\Delta_3} + \frac{b}{\Delta_2}, \quad q_2 = -\frac{b+q}{\overline{\Delta_3}} + \frac{b}{\Delta_2},
\end{gathered}
\tag{2.1.11}
$$

$$
\alpha_2 = \frac{(b+e+q)[\overline{cq_1} + \overline{d}\overline{e_1} + \overline{e}c_1 + \overline{q}d_1] - (\overline{a}+\overline{c}+\overline{d})[cd_1 + dc_1 + e\overline{e_1} + q\overline{q_1}]}{\Delta_3},
$$

$$
\tau_2 = \frac{(b+e+q)[\overline{c}\overline{d_1} + \overline{d}\overline{c_1} + \overline{e}e_1 + \overline{q}q_1] - (\overline{a}+\overline{c}+\overline{d})[cq_1 + de_1 + e\overline{c_1} + q\overline{d_1}]}{\Delta_3}.
$$

Теорема 2.1.3. *Для нётеровости оператора A_1 в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$
\Delta_2(z) \neq 0, \quad \textit{при} \quad \forall z \in \overline{D}; \quad \Delta_3(t) \neq 0, \quad \textit{при} \quad \forall t \in \Gamma. \tag{2.1.12}
$$

При выполнении этих условий индекс оператора A_1 равен

$$
æ = -\frac{1}{\pi}[arg\Delta_3(t)]_\Gamma.
$$

Если коэффициенты уравнения (2.1.10) постоянны и выполнены условия (2.1.12), а также еще $\Delta_4 = |a+c+d|^2 - |b+e+q|^2 \neq 0$, *то однородное уравнение* $A_1 f = 0$ *нетривиальных решений не имеет, а неоднородное* $A_1 f = g$ *безусловно разрешимо и его решение дается формулой*

$$\begin{aligned} f(z) =& a_2 g(z) + b_2 \overline{g(z)} + \frac{c_2}{\pi} \iint\limits_D \frac{g(\zeta) ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{d_2}{\pi} \iint\limits_D \frac{g(\zeta) ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{e_2}{\pi} \iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)} ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{q_2}{\pi} \iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)} ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{\alpha_2}{\pi} \iint\limits_D g(\zeta) ds_\zeta + \frac{\tau_2}{\pi} \iint\limits_D \overline{g(\zeta)} ds_\zeta, \quad z \in \overline{D}, \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

где константы $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, q_2, \alpha_2, \tau_2$ *определяются по формулам (2.1.11).*

Если же $\Delta_4 = 0$, *то однородное уравнение* $A_1 f = 0$ *имеет точно одно линейно независимое нетривиальное решение*

$$f_0(z) = \overline{a} + \overline{c} + \overline{d} - b - e - q,$$

а для разрешимости неоднородного $A_1 f = g$ *необходимо и достаточно выполнение одного условия*

$$Re \iint\limits_D \omega g(\zeta) ds_\zeta = 0,$$

где $\omega = \overline{a} + \overline{c} + \overline{d} - \overline{b} - \overline{e} - \overline{q}$ *решение однородное сопряженное к (2.1.10) уравнение. При его выполнении неоднородное уравнение имеет решение*

$$\begin{aligned} f(z) =& a_2 g(z) + b_2 \overline{g(z)} + \frac{c_2}{\pi} \iint\limits_D \frac{g(\zeta) ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{d_2}{\pi} \iint\limits_D \frac{g(\zeta) ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + \\ &+ \frac{e_2}{\pi} \iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)} ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{q_2}{\pi} \iint\limits_D \frac{\overline{g(\zeta)} ds_\zeta}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} + M f_0, \quad z \in \overline{D}, \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

где M *- произвольная вещественная постоянная.*

2.2 О формулах обращения для систем двумерных сингулярных интегральных уравнений

В единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим следующую систему двумерных сингулярных интегральных уравнений

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) + b(z)(S\overline{f})(z) + c(z)(Bf)(z) = g(z), \tag{2.2.1}$$

где

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2},$$

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\omega'(z)\overline{\omega}'(\zeta)}{(1 - \omega(z)\overline{\omega(\zeta)})^2} f(\zeta)ds_\zeta,$$

$a(z), b(z), c(z)$ – квадратные матрицы порядка n, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $g = (g_1, g_2, ...g_n)$ соответственно искомые и заданные вектор-функции класса $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$:

$$L_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : \ |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \ ||f||_{L_{\beta-2/p}} = ||F||_{L_p}\},$$

$(1 < p < \infty, \ 0 < \beta < 2)$.

Обозначим через M следующую блочную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ \overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}.$$

В работе [45] доказана, что множество операторов вида A с добавлением вполне непрерывного оператора T составляют в $L^p_{\beta-2/p}$ алгебру и для нётеровости системы интегральных уравнений 2.2.1 в пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$: $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы M и $a + c$ были неособенными, то есть $det M(z) \neq 0$ для всех $z \in D$ и $det(a(t) + c(t)) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$, при этом, если указанные условия выполнены, M и $a+c$ - постоянные матрицы и $D = \{z : |z| < 1\}$, то система в указанных пространствах имеет единственное решение.

В разделе 6 диссертации предполагается, что $D = \{z : |z| < 1\}$ и M и $a+c$ - постоянные матрицы. Ставится задача нахождения решения системы (2.2.1) в замкнутом виде. Отметим, что в скалярном случае формула обращения для (2.2.1) известна из [12],[23].

Пусть f - решение (2.2.1) из класса $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$. Тогда применим к обеим частям равенства (2.2.1) оператор B и, учитывая свойства композиции операторов : $B^2 = B, \quad BS = 0,$ получим

$$aBf + cBf = Bg,$$

то есть

$$(a + c)Bf = Bg.$$

Теперь предположим, что квадратная матрица $a + c$ неособенная, то есть $det(a + c) \neq 0$. Тогда получим

$$Bf = (a + c)^{-1} Bg. \tag{2.2.2}$$

Далее применим к обеим частям (2.2.1) оператор SK, где $Kf = \overline{f},$ и учитывая, что

$$S\overline{S} = I - B \quad \text{и} \quad S\overline{B} = 0,$$

получим

$$\begin{cases} af + bS\overline{f} + cBf = g, \\ \overline{b}f + \overline{a}S\overline{f} - \overline{b}Bf = S\overline{g}. \end{cases}$$

Используя равенство (2.2.2), имеем

$$\begin{cases} af + bS\overline{f} = g - c(a+c)^{-1}Bg, \\ \overline{b}f + \overline{a}S\overline{f} = S\overline{g} + \overline{b}(a+c)^{-1}Bg. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Всюду далее будем предполагать, что матрица M неособенная, то есть $detM \neq 0$. Тогда очевидно, что $deta \neq 0$, либо $detb \neq 0$, то есть либо матрица a, либо b являются неособыми матрицами.

Случай 1. Пусть матрица a неособенная. Сведем матрицу M к диагональному виду. Так, как,

$$detM = det \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \neq 0,$$

то, умножив вторую строку на $-b\overline{a}^{-1}$ и сложив с первой строкой (см. [59] стр. 58-59), получим

$$detM = det \begin{pmatrix} a - b\overline{a}^{-1}\overline{b} & 0 \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} =$$

$$= \det(a - b\overline{a}^{-1}\overline{b}) \det \overline{a} = \det(a\overline{a} - b\overline{a}^{-1}\overline{b}\overline{a}) \neq 0, \tag{2.2.4}$$

ибо если матрица a – неособенная, то тогда матрица $a - b\overline{a}^{-1}\overline{b}$ также неособенная, в противном случае $detM = 0$.

Теперь, умножив второе равенство (2.2.3) слева на матрицу $-b\bar{a}^{-1}$, получим

$$\begin{cases} af + bS\overline{f} = g - c(a+c)^{-1}Bg, \\ -b\bar{a}^{-1}\bar{b}f - bS\overline{f} = -b\bar{a}^{-1}S\overline{g} - b\bar{a}^{-1}\bar{b}(a+c)^{-1}Bg. \end{cases}$$

Сложив два последних равенства, получим

$$(a - b\bar{a}^{-1}\bar{b})f = g - b\bar{a}^{-1}S\overline{g} - (c + b\bar{a}^{-1}\bar{b})(a+c)^{-1}Bg.$$

Поскольку из (2.2.4) следует, что матрица $a - b\bar{a}^{-1}\bar{b}$ неособенная, то тогда существует обратная матрица $(a - b\bar{a}^{-1}\bar{b})^{-1}$. Применяя слева к последнему равенству эту матрицу, в итоге получим:

$$f = (a - b\bar{a}^{-1}\bar{b})^{-1}[g - b\bar{a}^{-1}S\overline{g} - (c + b\bar{a}^{-1}\bar{b})(a+c)^{-1}Bg], \tag{2.2.5}$$

$$S\overline{S} = I - B,\ S\overline{B} = 0,\ B^2 = B.$$

Воспользуясь свойствами композиции операторов, непосредственными вычислениями убедимся, что функция f из (2.2.5) является решением системы (2.2.1).

Итак, нами доказана

Теорема 2.2.1. *Пусть a, M и $a{+}c$ – неособые матрицы и g – произвольная функция из пространства $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$. Тогда сингулярное интегральное уравнение (2.2.1) в указанных пространствах имеет единственное решение*

$$f = (a - b\bar{a}^{-1}\bar{b})[g - b\bar{a}^{-1}S\overline{g} - (c + b\bar{a}^{-1}\bar{b})(a+c)^{-1}Bg].$$

Случай 2. Пусть теперь матрица b неособенная, тогда существует b^{-1}. В $detM$, умножив первую строку на $-\bar{a}b^{-1}$ и сложив со второй строкой, получим:

$$detM = det\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b}-\bar{a}\bar{b}^{-1}a & 0 \end{pmatrix} = -|b||\bar{b}-\bar{a}b^{-1}a| \neq 0.$$

Отсюда следует что матрица $\bar{b}-\bar{a}b^{-1}a$ -неособенная то есть

$$det(\bar{b}-\bar{a}b^{-1}a) \neq 0.$$

Теперь, умножив первую строку (2.2.3) слева на матрицу $-\bar{a}b^{-1}$, получим

$$\begin{cases} -\bar{a}b^{-1}af - \bar{a}S\overline{f} = -\bar{a}b^{-1}g + \bar{a}b^{-1}c(a+c)^{-1}Bg, \\ \bar{b}f + \bar{a}S\overline{f} = S\overline{g} + \bar{b}(a+c)^{-1}Bg. \end{cases}$$

Сложив эти равенства, имеем

$$(\bar{b}-\bar{a}b^{-1}a)f = -\bar{a}b^{-1}g + Sg + (\bar{b}+\bar{a}b^{-1}c)(a+c)^{-1}Bg.$$

Поскольку матрица $\bar{b}-\bar{a}b^{-1}a$ – неособенная, то получим

$$f = (\bar{b}-\bar{a}b^{-1}a)^{-1}[-\bar{a}b^{-1}g + S\bar{g} + (\bar{b}+\bar{a}b^{-1}c)(a+c)^{-1}Bg]. \tag{2.2.6}$$

Нами доказана

Теорема 2.2.2. *Если матрицы $b, a+c$ и M – неособенные, то тогда сингулярное интегральное уравнение (2.2.1) имеет в пространствах $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ единственное решение*

$$f = (\bar{b}-\bar{a}b^{-1}a)^{-1}[-\bar{a}b^{-1}g + S\bar{g} + (\bar{b}+\bar{a}b^{-1}c)(a+c)^{-1}Bg].$$

Замечание 1. *Если одновременно матрицы a и b неособенные, то есть $deta \neq 0, detb \neq 0$, то формулы (2.2.5) и (2.2.6) совпадают. В этом случае*

$$(a - b\overline{a}^{-1}\overline{b}^{-1})^{-1} = (b^{-1}a - \overline{a}^{-1}\overline{b})b^{-1} \text{ и } (\overline{b} - \overline{a}b^{-1}a)^{-1} = -(b^{-1}a - \overline{a}^{-1}\overline{b})^{-1}\overline{a},$$

и тогда формулы (2.2.5) и (2.2.6) превращаются в формулу

$$f = (b^{-1}a - \bar{a}^{-1}b)^{-1}[b^{-1}g - \bar{a}^{-1}Sg - (b^{-1}c + a^{-1}\bar{b})(a+c)^{-1}Bg]. \qquad (2.2.7)$$

Замечание 2. *Пусть $|a| \neq 0, |b| \neq 0$ и, кроме того, матрицы a и b перестановочны между собой, то есть $ab = ba$, то тогда очевидно, что $a^{-1}\overline{b} = \bar{b}\bar{a}^{-1}$, а также $\bar{a}b^{-1} = b^{-1}\bar{a}$. Поэтому*

$$(b^{-1} - \bar{a}^{-1}\bar{b})^{-1} = [b^{-1}(a\bar{a} - b\bar{b})\bar{a}^{-1}]^{-1} = (a\bar{a} - b\bar{b})^{-1}b\bar{a}.$$

Тогда формула (2.2.7) превращается в

$$f = (a\bar{a} - b\bar{b})^{-1}[\bar{a}g - bS\bar{g} - (\bar{a}c + b\bar{b}(a+c))^{-1}Bg]. \qquad (2.2.8)$$

Обобщение. *Аналогичным образом можно найти явное решение системы двумерных сингулярных интегральных уравнений вида*

$$af + bS_m\overline{f} + cB_mf = g(z), \qquad (2.2.9)$$

где

$$(S_mf)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi}\iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2}f(\zeta)ds_\zeta,$$

m-целое неравное нулю число, черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, $\theta = \arg(\zeta - z), \overline{S}_m = S_{-m}$,

$B_m \equiv I - S_m\overline{S_m}$ *- обобщенный оператор Бергмана.*

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Построены двусторонние ограниченные регуляризаторы для четырёхкомпонентного сингулярного интегрального оператора по ограниченной области, а также по всей плоскости, а в случае постоянных коэффициентов в замкнутом виде найдено явное решение уравнение с такими операторами.

2. Построены двусторонние ограниченные регуляризаторы для четырёхкомпонентного интегрального оператора с ядрами Бергмана, а в случае постоянных коэффициентов в замкнутом виде найдено явное решение уравнение с такими операторами

3. Для системы сингулярных интегральных операторов по ограниченной области а лебеговых пространств с весом построены ограниченные регуляризаторы, а в случае постоянных матриц-коэффициент найден обратный оператор.

Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть применены при исследование различных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Литература

[1] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва: Физматгиз, 1962, 254 с.

[2] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. Москва: Высшая школа, 1977, 431 с.

[3] Михлин С.Г. О вычислении индекса системы одномерных сингулярных уравнений // ДАН СССР. -1968.-Т. 168, №6.-С.1251-1254.

[4] Calderon A.,Zigmund A. On the existense of certain singular integrals // Acta math.-1952. -v.88. -№1. -p. 85-139.

[5] Calderon A.,Zigmund A. On singular integrals // American j. math. -1956. -78.-p. 289-309.

[6] Zigmund A. On singular integrals // Rend. math. eapplic. -1957.-v. 5-16. -fass 3-4.-p. 468-505.

[7] Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области // ДАН СССР. -1971. Т. 197, №6. -С.1251-1254.

[8] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. Москва: Наука, 1987, 415 с.

[9] Джураев А.Д. О некоторых системах двумерных сингулярных интегральных уравнений с полиномиальными характеристиками в ограниченной области // Докл. АН Тадж ССР.-1974. -Т. 17, №9. -С. 3-6.

[10] Джураев А.Д. Применение эллиптических краевых задач к иследованию сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоскости // Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. -Тбилиси. -1972. -Т. 2, -С. 104-118.

[11] Джураев А.Д. О некоторых двумерных интегральных уравнениях по ограниченной области // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. Тбилиси. -1979.-С. 89-94.

[12] Джураев А.Д. // Докл. АН Тадж ССР. -1971. -Т.23. №4. -С.14-18

[13] Джураев А.Д. Поликерн -функция области, керн-операторы и сингулярные интегральные операторы // ДАН СССР. -1985. Т. 283, №5. -С. 1057-1060.

[14] Виноградов В.С. О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения // ДАН СССР. -1978.-Т. 241, №2. -с.272-274.

[15] Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I, II. // Изв. АН СССР, сер. матем. -1965. -Т. 29, №3,4 -С. 567-580, 757-782.

[16] Симоненко И.Б., Чин Нгок Минь. Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость. Из-во Ростов. унив. 1986, 58 с.

[17] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I, II // J. of operator theory. -1984. v. 11, -p. 41-76, 199- 214.

[18] Дудучава Р.В. О многомерных сингулярных интегральных уравнениях. Основные теоремы // Сообщения АН ГрузССР. -1983. -Т.111, №3. -С. 465-467.

[19] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН БСССР.-1977. -Т. 21, №2. -С. 1074--1077.

[20] Комяк И.И. Об условиях нетеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, -1978. -Т.22, №6. -С. 488-491.

[21] Комяк И.И. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Бергмана //Докл. АН БССР, -1979. -Т. 23, №1. -С. 8-11.

[22] Комяк И.И. О разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений // ДАН СССР, -1980. -Т.250.№6. -С.1307-1310.

[23] Комяк И.И. Условия нетеровости и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области // Дифференц. уравнения.-1980, -Т. 16, №2. -С. 328-343.

[24] Комяк И.И. О некоторых классах двумерных интегральных уравнений // В сб.: Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения акад. АН БССР Ф. Д. Гахова.-Минск, -1985,-С. 64-68.

[25] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные некоторыми двумерными интегральными операторами I.// Math. Nachr.-1980.-Bd. 96.-S.245-255.

[26] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные некоторыми двумерными интегральными операторами II.// Math. Nachr.-1980.-Bd. 99.-S.135-144.

[27] Василевский Н.Л. Об алгебры, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами // ДАН СССР.-1983.-Т.271, №5. -С. 1041-1044.

[28] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами // Изв. ВУЗов Матем.-1986. №2. -С. 12-21.

[29] Джангибеков Г. О нетеровости и идексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // ДАН СССР, -1988. Т. 300, №2. -С. 272-276.

[30] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // Док. РАН. -1993. -Т. 330, №4. -С. 415-417.

[31] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки, -1989. -Т. 46, №46. -С. 91-93.

[32] Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // Изв. ВУЗов. матем. -1991. №1. -С. 19-28.

[33] Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Изв. ВУЗов. матем. -1992, №9. -С. 25-37.

[34] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области // Док. РАН. -2002. -Т. 383, №1. -С. 7-9.

[35] Джангибеков Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // ДАН СССР. -1991, -Т. 319, №4. -С. 811-815.

[36] Джангибеков Г. О краевых задачах Дирихле и Неймана для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник ХоГУ. -1999. серия 1, №1. -С. 19-25.

[37] Джангибеков Г. Теория нетера некоторых сингулярных интегральных уравнений с суммируемыми однородными ядрами.//Вестник ХоГУ. -2000, серия 1, №2. -С. 31-56.

[38] Джангибеков Г.О нетеровости и индексе одного класса двумерных интегральных уравнений с особенностями.//Вестник ХоГУ. -2002, серия 1,№5. -С. 15-20.

[39] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений, содержащих комплексное сопряжение искомой функции.// Докл. АН Тадж. ССР. -1981, -Т. 24, №2. -С. 80-85.

[40] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов // ДАН СССР. -1990. -Т. 314, №5. -С. 1055-1059.

[41] Джангибеков Г. Формула обращения для одного двумерного сингулярного интегрального уравнения. // Докл. АН Тадж ССР. -1984. -Т. 27, №5. -С. 243-248.

[42] Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // ДАН СССР. -1989, -Т. 308, №5, -С. 1037-1041.

[43] Jangibekov G. On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the pline.- Prosidings of the second ISAAC Congress, volum 2, -2000, p. 1421-1430.

[44] Бойматов К.Х. Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе. // Успехи математическх наук, -1988. -Т. 43, выпуск 3 (261), -С. 171-172.

[45] Бойматов К.Х. Джангибеков Г. О некоторых сингулярных интегральных операторах с матричными коэффициентами // ДАН России. -1999. -Т.369, №3. -С. 299-302.

[46] Джангибеков Г.,Мамадкаримова М. Явное решение одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений.// ДАН РТ. -2010. -Т.53, №1. -С.5-12.

[47] Джангибеков Г.,Мамадкаримова М. О формулах обращения для систем двумерных сингулярных интегральных уравнений.// ДАН РТ. -2012. -Т.55,№5. -С.366-376.

[48] Мамадкаримова М. Явное решение некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядроми Бергмана.// Вестник ТНУ.-2015. -Т.55, №5. -С.366-376.

[49] Мамадкаримова М. Явное решение некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений на плоскости.// Современные проблемы теории функции и дифференциальных уравнений. Материалы

межд.научной конф.посвященной 85-летию акад.АН РТ Л.Г.Михайлова. Душанбе. -2013. -С.43-47.

[50] Мамадкаримова М. О формуле обращения для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов.// Современные проблемы математики и её преподование. Материалы межд.научной конф.посвященной 20-летию Конституции РТ. Худжанд 2 (29). -2014, -С.150-152.

[51] Джангибеков Г.,Мамадкаримова М. Явное решение одного класса шестикомпонентных двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченный области // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений. Материалы межд.научной конф.посвящённой 80-летию члена -корреспондента АН РТ доктора физико -математических наук, профессора В.Я.Стеценко. Душанбе. -2015, -С. 94-96.

[52] Мамадкаримова М. Явное решение некоторых двумерных интегральных уравнений с ядром Бергмана.// Материалы научной конф. Математика и информационные технологии, посвящённой 15-летию независимости РТ. Душанбе. -2006. -С. 39-40.

[53] Мамадкаримова М. Об одном формуле обращения.// Вестник Хорогского университета. -1999. №1, -С. 26-29.

[54] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. Москва: Физматгиз, 1959, 672 с.

[55] Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Москва: Гостехиздат, 1948, 296 с.

[56] Манджавидзе Г.Ф. Применение теории обобщенных аналитических функций к изучению задач сопряжения со смещением // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. -Тбилиси. -1979. -С. 165-1186.

[57] Раджабов Н.Р. Обращение некоторых двумерных интегральных уравнеий// Известия АН Тадж. ССР,отд. физ.тех. и хим.Наук,№22(15). -1962,-С.56-61

[58] Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. Москва: ИЛ.-1953, 310 с.

[59] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва:Наука,1967, 575 с.

[60] Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. Москва: 1971, 103 с.