На правах рукописи

Мирзорахимов Шерали Хусейнбоевич

О распределении значений характеров Дирихле по модулю, свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе – 2017

Работа выполнена в Институте математики имени А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, член корреспондент АН РТ, профессор Рахмонов Зарулло Хусенович
Официальные оппоненты:	Чирский Владимир Григорьевич, доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», Механико-математический факультет, профессор кафедры математического анализа
	Камарадинова Зарина Нусратуллоевна, кандидат физико–математических наук, Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни, заведующая кафедрой алгебры и теории чисел
Ведущая организация:	Таджикский национальный университет

Защита состоится 16 июня 2017 г. в 8 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан "___" ________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02 Хайруллоев Ш.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Настоящая диссертация посвящена задачам аналитической теории чисел, и основным предметом исследования является вывод новой нетривиальной оценки суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю q, свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел, то есть сумм вида

$$T(\chi)=\sum_{p\le x}\chi(p-l),\qquad (l,q)=1.$$

Функцию, определённую для целочисленного аргумента, $\chi(n)$ ввёл Л. Дирихле при доказательстве теоремы о бесконечности множества простых чисел, принадлежащих арифметической прогрессии

$$qk+l,\quad (q,l)=1,\quad k=1,2,\dots,$$

которая позднее в его честь стала называться характером Дирихле и нашла многочисленные применения в математике.

В аналитической теории чисел многие проблемы тесно связаны с распределением значений характеров Дирихле в последовательностях, имеющих определённую арифметическую природу. В частности, вопрос о распределении значений неглавного характера на последовательности сдвинутых простых чисел возникает при решении следующих задач:

- о распределениях степенных вычетов и невычетов по заданному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел с простыми числами;
- о распределениях первообразных корней по заданному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел;
- о распределениях гольдбаховых чисел в коротких арифметических прогрессиях;
- о распределениях значений символов Якоби в последовательности сдвинутых простых чисел.

Коротко остановимся на истории исследований проблемы распределений значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел.

1. Распределение значений неглавного характера в последовательности сдвинутых простых чисел первым начал изучать И.М. Виноградов. В 1938 году он[1] впервые при $x \gg q^{3+\varepsilon}$ получил нетривиальную оценку модуля суммы $T(\chi)$. И.М. Виноградов[2] в 1943 году, воспользовавшись своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, доказал следующие утверждения: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \tag{1}$$

   При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mathrm{mod}\ q$ *вида* $p-l$, $p \le x$.

   Затем И.М.Виноградов[3,4] получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x \ge q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей L — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$, получится нетривиальная оценка, но только при $x \ \ge \ q^{1+\varepsilon}$.

2. А.А. Карацуба[5] в 1968 году разработал метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. С помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова, А.А. Карацуба[6] получил нетривиальную оценку суммы $T(\chi)$ при $x \ge q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, q — простое, и применил[7] эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества чисел вида $p(p'+k))$ в арифметической прогрессии с растущей разностью.

[1] Виноградов И.М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю // Математический сборник. 1938. Т. 3. №45. С. 311 – 320.

[2] Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. С. 17 – 34.

[3] Виноградов И.М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР. Серия математическая. 1952. Т. 16. С. 197 – 210.

[4] Виноградов И.М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР. Серия математическая. 1953. Т. 17, С. 285 – 290.

[5] Карацуба А.А. Об оценках сумм характеров // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.

[6] Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.

[7] Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 – 727.

3. З.Х. Рахмонов[8,9,10] обобщил оценку (1) на случай составного модуля D, и применяя её доказал:

$$G(D,I) \ll D^{\frac{6}{5}+\varepsilon},$$

где D — нечётное натуральное число и $G(D,I)$ — наименьшее число в арифметической прогрессии $Dk+l$, $k=1,2,\ldots$, представимое в виде суммы двух простых, (гольдбаховы числа).

4. В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский[11] для составного q и примитивного характера χ_q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует при $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$.

5. З.Х. Рахмонов[12] для составного q и примитивного характера χ_q нетривиальную оценку суммы $T(\chi_q)$ доказал при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней доказана нетривиальная оценка суммы значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел — $T(\chi_q)$, если только длина суммы — x является величиной превосходящей, квадратный корень от модуля характера — q, являющегося числом, свободным от кубов.

Цель работы.

Целью работы является получение нетривиальной оценки суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю, свободному от кубов q, в последовательности сдвинутых простых чисел, для возможно короткой суммы.

Методы исследования

Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно:

[8]Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами // Доклады АН Таджикский ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.

[9]Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.

[10]Рахмонов З.Х. О наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии // Известия АН Таджикский ССР. Отд. физ.-матем. и геол.-химич. наук. 1986. № 2. С. 103 – 106.

[11]Фридландера Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Математические заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.

[12]Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15. В. 2(50). С. 73 – 100.

- метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова;
- метода А.А. Карацубы оценки суммы $T(\chi_q)$ для простого q;
- методами З.Х. Рахмонова оценки суммы $T(\chi_q)$, где χ_q — примитивный характер по модулю q, (q — составное).

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- найдена нетривиальная оценка при $y \geq q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по модулю, свободному от кубов, в последовательности сдвинутых чисел, то есть сумм вида

$$S_y(u,\eta) = \sum_{\substack{u-y<n\leq u \\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta,q)=1;$$

- для модулей q, свободных от кубов, получена оценка коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (mn,q)=1}} b_n \chi_q(mn-l), \quad (l,q)=1,$$

  являющаяся нетривиальной при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$;
- доказана нетривиальная оценка суммы значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел, если только длина суммы является величиной, превосходящей квадратный корень от модуля характера, являющегося числом, свободным от кубов.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- XIII Международная конференция “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения”, посвящённая восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25 – 30 мая 2015 года;

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2013 – 2016 гг.) и общеинститутский семинар (2014 – 2016 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- семинары кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета (2016 гг.)

- международная научная конференция “Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел”, посвящённая 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. (С. 29-31) .

Публикации.
Основные результаты диссертации опубликованы в семи научных работах, список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы
Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы – 70 страниц. Список цитированной литературы включает 40 наименований.

Содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения и трёх глав. Введение к диссертации содержит обзор результатов, относящихся к теме диссертации, и формулировки основных полученных результатов.

Первая глава состоит из четырёх параграфов и посвящена нетривиальной оценке коротких сумм значения характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел по модулю свободного от кубов. В первом параграфе приведены постановка задачи и формулировка результатов первой главы.

Д.А. Берджесс[13,14] для неглавного характера $\chi(n)$ по модулю q и фиксированного положительного r получил оценку вида

$$S_y(u) = \sum_{u-y<n\le u} \chi_q(n) \ll y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{r+1}{4r^2}+\varepsilon},$$

где q — число свободное от кубов, или $r=2$. Отметим, что эта оценка для модулей свободных от кубов будет нетривиальной при $y \ge q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

При изучении закона распределения значений χ_q на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки суммы вида

$$S_y(u,\eta) = \sum_{\substack{u-y<n\le u \\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta,q)=1,$$

которую назовём *суммами значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел.*

Если q — простое число, то изучение сумм $S_y(u,\eta)$ с помощью тождества

$$S_y(u,\eta) = S_y(u-\eta) - \chi_q(-\eta)\left(\frac{y}{q} - \left\{\frac{x}{q}\right\} + \left\{\frac{x-y}{q}\right\}\right)$$

сводится к суммам $S_y(u-\eta)$. В случае составного q суммы $S_y(u,\eta)$ ранее рассматривались в работах[8,9,11,12] и была получена нетривиальная оценка при

$$y \ge q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}.$$

Основным результатом этой главы является следующая теорема о нетривиальной оценке сумм $S_y(u,\eta)$ для модулей, свободных от кубов q.

Теорема 1.1. *Пусть q — число, свободное от кубов, $(\eta,q)=1$, $y \ge q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$, $0,1 \le \sigma < 0,9$, тогда*

$$S_y(u,\eta) \ll y \exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma \mathscr{L}^{\sigma}\right).$$

Из этой теоремы при $\sigma = 0,6$ получается

Следствие 1.1.1 *Пусть q — число свободное от кубов, $(\eta,q)=1$, $y \ge q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$, тогда*

$$\sum_{\substack{u-y<n\le u \\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta) \ll y \exp\left(-2\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

[13] Burgess D.A. On character sums and L-series // Proc. London Math. Soc. 1962, 12(3), 193 – 206.
[14] Burgess D.A. On character sums and L-series II // Proc. London Math. Soc. 1963, 13(3), 524 – 536.

Основное утверждение, позволившее доказать теорему 1.1, содержится в следующей лемме 1.1, доказательство которой проводится методом А.А. Карацубы, позволившим ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени.

Лемма 1.1. *Пусть* σ *– вещественное число,* $r\geq 3$ *— произвольное фиксированное натуральное число,* M*,* N*,* d *и* η *— целые числа, удовлетворяющие условиям* $(\eta,q)=1$*,* $N<q^{\frac12+\frac1{4r}}d^{-\frac12}$*,* $0{,}1\leq\sigma<0{,}9$*,* $d\leq\exp(\mathscr{L}^2)^\sigma$*, тогда*

$$\sum_{M<n\leq M+N}\chi_q(nd-\eta)\leq N^{1-\frac1r}q^{\frac1{4r}+\frac1{4r^2}+\frac{\delta}{r}}d^{1-\frac1r}\mathscr{L}^2.$$

При изучении закона распределения значений χ_q в последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм вида $S_y(u,\eta)$, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм вида

$$W=\sum_{M<m\leq 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\leq\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l),\quad (l,q)=1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\leq\tau^c(m)$ и $|b_n|\leq\tau^c(m)$, c – положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q. Сумма W называется *двойной суммой значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел*, а при $x<q$ — *короткой суммой.*

И.М. Виноградов[1,2], впервые изучая сумму W для простого q, получил её нетривиальную оценку при $x\geq q^{1+\varepsilon}$, а затем[3,4] нетривиальную оценку короткой суммы W при $x\geq q^{0{,}75+\varepsilon}$. Наилучшая нетривиальная оценка для простого q при $x\geq q^{0{,}5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы[6].

З.Х. Рахмонов[9] изучил сумму W для составного q и получил нетривиальную оценку при $x\geq q^{1+\varepsilon}$. Нетривиальную оценку короткой суммы W для составного q при $x\geq q^{\frac89+\varepsilon}$ получили Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский[11]. З.Х. Рахмонов[12] для составного q доказал нетривиальную оценку W при $x\geq q^{\frac56+\varepsilon}$.

Во второй главе при $x\geq q^{\frac12+\varepsilon}$, ($q$ – число, свободное от кубов), получены нетривиальные оценки короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W, имеющих соответственно

- сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера (теорема 2.1);
- не очень короткую сплошную сумму, длина которой не превосходит корня четвёртой степени от длины двойной суммы (теорема 2.2).

Теорема 2.1. *Пусть x, M, N, l — целые числа, $(l,q)=1$, θ – фиксированное число, $M\ge q^{\frac12+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$, $N\ge q^{\theta}$, a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau^c(m)$, где c – произвольное положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, и $|b_n|\le B$. Тогда справедлива оценка*

$$W=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}}b_n\chi(mn-l)\ll BMNq^{-\delta\theta}\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

.

Доказательство теоремы 2.1 проводится методом работы А.А. Карацубы[6] об оценках коротких двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W, имеющих сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера. В нашем случае для длины сумм по m, выполняется условие $M\ge q^{\frac12+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$, применяется также метод работы З.Х. Рахмонова[12] с учётом оценки Берджесса.

Теорема 2.2. *Пусть x, M, N, U и l — целые числа, $(l,q)=1$, $U\ge N$, a_m функция натурального аргумента такая, что $|a_m|\le\tau^c(m)$, где c – произвольное положительное фиксированное число не всё время одно и то же, θ – фиксированное число и $0<\theta\le\frac{1}{12}$. Тогда при $x\ge q^{\frac12+5\delta+4\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$ и $q^{\theta}<N\le x^{\frac14+\frac32\delta}$ справедлива оценка*

$$W=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}}\chi(mn-l)\ll x\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы 2.2 проводится также методом работ А.А. Карацубы[6] об оценке коротких двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W, имеющих не очень короткую сплошную сумму, длина которой не превосходит корня четвёртой степени от длины двойной суммы (в нашем случае сумма по n), в сочетании с методом работы З.Х. Рахмонова[12] и опирается на оценку Берджесса.

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1938 г. он[1] доказал: *если q — простое нечётное, $(l, q) = 1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi) = \sum_{p \le x} \chi(p - l) \ll x^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{\sqrt[3]{x}}}.$$

Эта оценка будет нетривиальной, если $x \ge q^{3+\varepsilon}$, и из нее следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\operatorname{mod} q$ *вида* $p - l$, $p \le x$. В 1943 г. Виноградов[2] уточнил эту оценку, доказав, что

$$T(\chi) \ll x^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}},$$

которая будет нетривиальной, если $x \ge q^{1+\varepsilon}$. Последняя оценка представляет исключительный интерес, так как мало что известно даже о распределении простых чисел p в коротких арифметических прогрессиях, то есть в прогрессиях вида

$$p = l \, (modq), \qquad (l, q) = 1, \qquad p \le q^A,$$

здесь A — фиксированное положительное число. В 1952 г. И.М. Виноградов[3,4] доказал, что

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon} \left(\left(q^{\frac{3}{4}} x^{-1} \right) \frac{1}{3} + x^{-0.1} \right).$$

Эта оценка становится нетривиальной, если $x \ge q^{0.75+\varepsilon}$. Это совершенно удивительный результат. Если к указанной проблеме применять аналитический метод Римана, а именно представить в виде суммы по нулям соответствующих L - функций Дирихле и потом воспользоваться расширенной гипотезой Римана, то тогда получится оценка $|T(\chi)|$, нетривиальная уже при $x \ge q^{1+\varepsilon}$, то есть упомянутый выше результат Виноградова 1943 г. Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник[15] писал по этому поводу: *“Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что даёт непосредственное применение расширенной гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна)”.*

---

[15] Линник Ю.В.Новейшие работы И.М. Виноградова // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 1973. Т. 132. С. 27 – 29.

А.А. Карацуба[6] разработал новый метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В работе[7] он с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова доказал: *если* q *— простое,* $\chi(a)$ *– неглавный характер по модулю* q, $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, *тогда*

$$T(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

З.Х. Рахмонов[8,9] обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал: *пусть* D *– достаточно большое натуральное число,* χ *— неглавный характер по модулю* D, χ_q *– примитивный характер, порожденный характером* χ, *тогда*

$$T(\chi) \leq x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}\tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right), \qquad q_1 = \prod_{\substack{p \backslash D \\ p \not\backslash q}} p.$$

Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский[11] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q. Они доказали: *для примитивного характера* χ_q *и всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *что для всех* $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ *имеет место оценка*

$$T(\chi_q) \ll xq^{-\delta}.$$

З.Х. Рахмонов[12] в 2013 году доказал следующую теорему: *если* q *– достаточно большое натуральное число,* χ_q *– примитивный характер по модулю* q, $(l,q)=1$, ε *— положительное, сколь угодно малое постоянное число,* $\mathscr{L} = \ln q$, $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, *тогда*

$$T(\chi_q) \ll x \exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

В третьей главе, используя результаты предыдущих глав, а именно:

- теорему 1.1 о нетривиальной оценке коротких сумм значений характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел по модулю свободному от кубов;
- теорему 2.1 о нетривиальной оценке короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих, сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера;

- теорему 2.2 о нетривиальной оценке короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих не очень короткую сплошную сумму, длина которой не превосходит корня четвёртой степени от длины двойной суммы,

доказываем теорему 3.1 о нетривиальной оценке суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел.

Теорема 3.1. *Пусть q – достаточно большое натуральное число свободное от кубов, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l,q)=1$, ε — положительное сколь угодно малое постоянное число, $\mathscr{L}=\ln q$, $x\geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Тогда имеем*

$$T(\chi_q)=\sum_{p\leq x}\chi_q(p-l)\ll x\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы 3.1 проводится методом оценок суммы с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами А.А. Карацубы[6] об оценке "короткой" суммы $T(\chi_q)$ для простого q, методам З.Х. Рахмонова[12] об оценке "короткой" суммы $T(\chi_q)$ для составного q. Его основу, как уже отмечали, составляют теорема 1.1 первой главы и теоремы 2.1 и 2.2 второй главы.

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору З.Х. Рахмонову за научное руководство, за постоянное внимание и помощь в работе.

Публикации по теме диссертации

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

1. Мирзорахимов, Ш.Х. Оценка короткой суммы значений характера Дирихле по модулю, свободному от кубов на последовательности сдвинутых чисел [Текст] / Ш.Х. Мирзорахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. – Т.58. – №4. – С. 823 – 830.

2. Мирзорахимов, Ш.Х. О распределении значений характеров Дирихле по модулю свободному от кубов в последовательности сдвинутых простых чисел [Текст] / Ш.Х. Мирзорахимов, З.Х. Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. – Т.58. – №4. – С. 357 – 362.

3. Мирзорахимов, Ш.Х. Короткая двойная сумма значений характеров Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел [Текст] / Ш.Х. Мирзорахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. – Т.58. – №4. – С. 273 – 278.

4. Мирзорахимов Ш. Х. О распределении значений характеров Дирихле по модулю свободному от кубов в последовательности сдвинутых простых чисел [Текст] / Ш.Х. Мирзорахимов, З.Х. Рахмонов // Чебышевский сборник. 2015. – Т.16. – В. 4(56). – С. 201 – 216.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

5. Мирзорахимов, Ш.Х. Короткая двойная сумма значений характеров Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел [Текст] / Ш.Х. Мирзорахимов // Материалы международной научной конференции “Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел”, посвящённой 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. – С. 29 – 31.

6. Мирзорахимов, Ш.Х. О распределении значений характеров Дирихле по модулю свободного от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел [Текст] / Ш.Х. Мирзорахимов, З.Х. Рахмонов // Материалы международной научной конференции “Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел”, посвящённой 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. – С. 29 – 31.

7. Мирзорахимов, Ш.Х. О распределении значений характеров Дирихле по модулю свободного от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел [Текст] / Ш.Х. Мирзорахимов, З.Х. Рахмонов //В сборнике “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения”, Материалы XIII Международной конференции, посвящённой восьмидесятилетнею со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогический университет им.Л.Н. Толстого. 2015г. – С. 238 – 239.