Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

МИРЗОРАХИМОВ ШЕРАЛИ ХУСЕЙНБОЙЕВИЧ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ ПО МОДУЛЮ, СВОБОДНОМУ ОТ КУБОВ, В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СДВИНУТЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
член-корреспондент АН РТ, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2017

Оглавление

Обозначения

При ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются тремя индексами: номер главы, номер параграфа, номер утверждения

Записи $f(x) = O(g(x))$(символ Э.Ландау)и $f(x) \ll g(x)$(символ И.В. Виноградова) при $x \to \infty$ означают, что существуют положительные числа C и x_0, такие что $|f(x)| \le Cg(x)$ при $x \ge x_o$;

$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i\sin 2\pi\alpha$;

$c, c_1, c_2, \cdots$,–положительные постоянные числа, не всегда одни и те же;

ε, δ–положительные, сколь угодно малые, постоянные;

x- достаточно большое положительное число;

m, n, l, k,…,- натуральные числа;

χ_q- примитивный характер по модулю q;

$\varphi(q)$ – функция Эйлера;

$\mu(n)$ – функция Мёбиуса;

$\Lambda(n)$ – функция Мангольдта;

$\tau(n)$ – число делителей числа n;

$\tau_r(n)$ – число решений уравнения $x_1x_2\ldots x_r = n$ в натуральных числах: $x_1, x_2, \ldots, x_r$;

$\mathscr{L} = \ln xq$.

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Настоящая диссертация посвящена задачам аналитической теории чисел, и основным предметом исследования является вывод новой нетривиальной оценки суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю q, свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел, то есть сумм вида

$$T(\chi) = \sum_{p \le x} \chi(p - l), \qquad (l, q) = 1.$$

Функцию, определённую для целочисленного аргумента, $\chi(n)$ ввёл Л. Дирихле при доказательстве теоремы о бесконечности множества простых чисел, принадлежащих арифметической прогрессии

$$qk + l, \quad (q, l) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

которая позднее в его честь стала называться характером Дирихле и нашла многочисленные применения в математике.

В аналитической теории чисел многие проблемы тесно связаны с распределением значений характеров Дирихле в последовательностях, имеющих определённую арифметическую природу. В частности, вопрос о распределении значений неглавного характера на последовательности сдвинутых простых чисел возникает при решении следующих задач:

- о распределениях степенных вычетов и невычетов по заданному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел с простыми числами;
- о распределениях первообразных корней по заданному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел;
- о распределениях гольдбаховых чисел в коротких арифметических прогрессиях;
- о распределениях значений символов Якоби в последовательности сдвинутых простых чисел.

Коротко остановимся на истории исследований проблемы распределений значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел.

1. Распределение значений неглавного характера в последовательности сдвинутых простых чисел первым начал изучать И.М. Виноградов.

   В 1938 году он впервые при $x \gg q^{3+\varepsilon}$ получил нетривиальную оценку модуля суммы $T(\chi)$ [1, 2]. И.М. Виноградов в 1943 году [1, 3, 4], воспользовавшись своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами [1, 5], доказал следующие утверждения: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \qquad (1)$$

   При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\bmod q$ *вида $p-l$, $p \leq x$.*

   Затем И.М.Виноградов получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x \geq q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число [6, 7, 8]. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей L — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$, получится нетривиальная оценка, но только при $x \geq q^{1+\varepsilon}$.

2. А.А. Карацуба в 1968 году разработал метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени [9, 10, 11]. В 1970 году с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова он доказал следующие утверждение [9, 12, 13]: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

   А.А. Карацуба применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества чисел вида $p(p'+k))$ в арифметической прогрессии с растущей разностью [14], (см. также [9, 15, 16, 17, 18, 19]).

3. З.Х. Рахмонов обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал следующие утверждение [20, 21, 22]: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порождённый характером χ, тогда*

$$T(\chi) \leq x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}\tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1) \right), \qquad q_1 = \prod_{\substack{p \backslash D \\ p \not\backslash q}} p. \qquad (2)$$

   Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то оценка (2) нетривиальна при $x > q(\ln q)^{13}$. Применяя эту оценку и «плотностную» теорему для нулей L – рядов Дирихле, З.Х. Рахмонов [20, 23] доказал что

$$G(D, I) \ll D^{\frac{6}{5}+\varepsilon},$$

   где D — нечётное натуральное число и $G(D, I)$ — наименьшее число в арифметической прогрессии $Dk + l$, $k = 1, 2, \ldots$, представимое в виде суммы двух простых (гольдбаховы числа).

4. В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К.Гонг, И.Е. Шпарлинский для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q [24]. Они доказали следующее: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T(\chi_q) \ll xq^{-\delta}.$$

5. З.Х. Рахмонов в 2013 году доказал следующиую теорему [25, 26, 27]: *если q – достаточно большое натуральное число, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l,q) = 1$, ε — положительное, сколь угодно малое постоянное число, $\mathscr{L} = \ln q$, $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi_q) \ll x \exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней доказана нетривиальная оценка суммы значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел — $T(\chi_q)$, если только длина суммы — x является величиной превосходящей, квадратный корень от модуля характера — q, являющегося числом, свободным от кубов.

Цель работы.

Целью работы является получение нетривиальной оценки суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю, свободному от кубов q, в последовательности сдвинутых простых чисел, для возможно короткой суммы.

Методы исследования

Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно,

- метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова;
- метода А.А. Карацубы оценки суммы $T(\chi_q)$ для простого q;
- методами З.Х. Рахмонова оценки суммы $T(\chi_q)$, где χ_q — примитивный характер по модулю q , (q — составное).

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- найдена нетривиальная оценка при $y \geq q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по модулю, свободному от кубов, в последовательности сдвинутых чисел, то есть сумм вида
$$S_y(u,\eta) = \sum_{\substack{u-y<n\leq u \\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta, q) = 1;$$
- для модулей q, свободных от кубов, получена оценка коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел вида
$$W = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leq \min(xm^{-1},2N) \\ (mn,q)=1}} b_n \chi_q(mn-l), \quad (l,q) = 1,$$
являющаяся нетривиальной при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$;
- доказана нетривиальная оценка суммы значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел, если только длина суммы является величиной, превосходящей квадратный корень от модуля характера, являющегося числом, свободным от кубов.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах

- XIII Международная конференция “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения”, посвящённая восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25 – 30 мая 2015 года;

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2013 – 2016 гг.) и общеинститутский семинар (2014 – 2016 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- семинары кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета (2016 гг.)

- международная научная конференция “Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел”, посвященная 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. (С. 29-31) .

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в семи научных работах, список которых приведен в конце диссертации. В работах, написанных совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы 70 страниц. Список цитированной литературы включает 40 наименований.

Содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения и трёх глав. Введение к диссертации содержит обзор результатов, относящихся к теме диссертации, и формулировки основных полученных результатов.

Первая глава состоит из четырёх параграфов и посвящена нетривиальной оценке коротких сумм значения характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел по модулю свободного от кубов. В первом параграфе приведены постановка задачи и формулировка результатов первой главы.

Берджесс для неглавного характера $\chi(n)$ по модулю q и фиксированного положительного r получил оценку вида

$$S_y(u) = \sum_{u-y<n\le u} \chi_q(n) \ll y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{r+1}{4r^2}+\varepsilon},$$

где q — число свободное от кубов, или $r=2$ [28, 29]. Отметим, что эта оценка для модулей свободных от кубов будет нетривиальной при $y \ge q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

При изучении закона распределения значений χ_q на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки суммы вида

$$S_y(u,\eta) = \sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta,q)=1,$$

которую назовём *суммами значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел.*

Если q — простое число, то изучение сумм $S_y(u,\eta)$ с помощью тождества

$$S_y(u,\eta)=\sum_{u-y<n\le u}\chi_q(n-\eta)-\chi_q(-\eta)\sum_{x-y<nq\le x}1=$$
$$=S_y(u-\eta)-\chi_q(-\eta)\left(\frac{y}{q}-\left\{\frac{x}{q}\right\}+\left\{\frac{x-y}{q}\right\}\right)$$

сводится к суммам $S_y(u-\eta)$. В случае составного q суммы $S_y(u,\eta)$ ранее рассматривались в работах [20, 21, 22, 24, 25, 26, 27] и была получена нетривиальная оценка при

$$y\ge q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}.$$

Основным результатом этой главы является следующая теорема о нетривиальной оценке сумм $S_y(u,\eta)$ для модулей, свободных от кубов q.

Теорема 1.1. *Пусть q — число, свободное от кубов, $(\eta,q)=1$, $y\ge q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$, $0,1\le\sigma<0,9$, тогда*

$$S_y(u,\eta)\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^{\sigma}\right).$$

Из этой теоремы 1.1 при $\sigma=0,6$ получается

Следствие 1.1.1. *Пусть q — число свободное от кубов, $(\eta,q)=1$, $y\ge q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$, тогда*

$$\sum_{\substack{u-y<n\le u\\(n,q)=1}}\chi_q(n-\eta)\ll y\exp\left(-2\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы 1.1 опирается на известные леммы 1.5 и 1.7. Основное утверждение, позволившее доказать теорему 1.1, содержится в следующей лемме 1.1, доказательство которой проводится методом А.А. Карацубы [9, 10], позволившим ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени.

Лемма 1.1. *Пусть σ – вещественное число, $r\ge 3$ — произвольное фиксированное натуральное число, M, N, d и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $N<q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}}d^{-\frac{1}{2}}$, $0,1\le\sigma<0,9$, $d\le\exp(\mathscr{L}^2)^{\sigma}$,* *тогда*

$$\sum_{M<n\le M+N}\chi_q(nd-\eta)\le N^{1-\frac{1}{r}}q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}}d^{1-\frac{1}{r}}\mathscr{L}^2.$$

При изучении закона распределения значений χ_q в последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм вида

$$S_y(u,\eta)=\sum_{\substack{u-y<n\le u\\(n,q)=1}}\chi_q(n-\eta),\qquad (\eta,q)=1,$$

то есть *сумм значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел*, исследованных в первой главе, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм вида

$$W=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l),\quad (l,q)=1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau^c(m)$ и $|b_n|\le\tau^c(m)$, c – положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q. Сумма W называется *двойной суммой значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел*, а при $x<q$ – *короткой сумме.*

И.М. Виноградов, впервые изучая сумму W для простого q, получил её нетривиальную оценку при $x\ge q^{1+\varepsilon}$, а затем нетривиальную оценку короткой суммы W при $x\ge q^{0{,}75+\varepsilon}$ [3, 4]. Наилучшая нетривиальная оценка для простого q при $x\ge q^{0{,}5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацуба [12].

З.Х. Рахмонов изучил сумму W для составного q и получил нетривиальную оценку при $x\ge q^{1+\varepsilon}$ [20, 21, 22]. Нетривиальную оценку короткой суммы W для составного q при $x\ge q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б. Фридландер, К.Гонг, И.Е. Шпарлинский [24]. З.Х. Рахмонов для составного q доказал нетривиальную оценку W при $x\ge q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ [25, 26, 27].

Во второй главе при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, ($q$ – число, свободное от кубов), получены нетривиальные оценки короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W, имеющих соответственно

- сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера (теорема 2.1);
- не очень короткую сплошную сумму, длина которой не превосходит корня четвёртой степени от длины двойной суммы (теорема 2.2).

Теорема 2.1. *Пусть x, M, N, l — целые числа, $(l,q)=1$, θ – фиксированное число, $M \geq q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$, $N \geq q^{\theta}$, a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau^c(m)$, где c – произвольное положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, и $|b_n| \leq B$. Тогда справедлива оценка*

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leq \min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll BMNq^{-\delta\theta}\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

.

Доказательство теорем 2.1 проводится методом работы А.А. Карацубы [9, 10, 11, 12] об оценках коротких двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W, имеющих сумму, длина который превосходит квадратный корень от модуля характера. В нашем случае для длины сумм по m, выполняется условие $M \geq q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$), применяется также методом работы З.Х. Рахмонова [27] с учётом оценки Берджесса [29].

Теорема 2.2. *Пусть x, M, N, U и l — целые числа, $(l,q)=1$, $U \geq N$, a_m функция натурального аргумента такая, что $|a_m| \leq \tau^c(m)$, где c – произвольное положительное фиксированное число не всё время одно и то же, θ – фиксированное число и $0<\theta\leq\frac{1}{12}$. Тогда при $x \geq q^{\frac{1}{2}+5\delta+4\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$ и $q^{\theta} < N \leq x^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$ справедлива оценка*

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leq \min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}} \chi(mn-l) \ll x\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теореме 2.2 проводится также методом работ А. А. Карацубы [9, 12, 13] об оценке коротких двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W, имеющих не очень короткую сплошную сумму, длина которой не превосходит корень четвёртой степени от длины двойной суммы (в нашем случае сумма по n), в сочетании с методом работы З.Х. Рахмонова [27] и опирается на оценку Берджесса [29].

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1938 г. он [2] доказал: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi)=\sum_{p\le x}\chi(p-l)\ll x^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{\sqrt[3]{x}}}. \tag{3}$$

Оценка (3) будет нетривиальной, если $x\ge q^{3+\varepsilon'}$, $\varepsilon'>0$ – любое фиксированное число, и из нее следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mod q$ *вида* $p-l$, $p\le x$.

В 1943 г. Виноградов [3] уточнил оценку (3) и, оценил нелинейную сумму характеров с простыми числами, доказав, что

$$|T(\chi)|=\left|\sum_{p\le x}\chi(p-l)\right|\ll x^{1+\varepsilon}G, \tag{4}$$

$$|T_1(\chi)|=\left|\sum_{p\le x}\chi(p(p-l))\right|\ll x^{1+\varepsilon}G, \tag{5}$$

где

$$G=\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}.$$

Последние оценки будут нетривиальными, если $x\ge q^{1+\varepsilon'}$. Отметим, что оценки (3), (4), (5) представляют исключительный интерес, так как мало что известно даже о распределении простых чисел p в коротких арифметических прогрессиях, то есть в прогрессиях вида

$$p = l\,(modq), \qquad (l,q)=1, \qquad p \le q^A,$$

здесь A — фиксированное положительное число.

В 1952 г. И.М. Виноградов [6] доказал, что

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(q^{\frac{3}{4}}x^{-1}\right). \tag{6}$$

Из этой оценки видно, что она становится нетривиальной, если $x \ge q^{0.75+\varepsilon'}$. Это совершенно удивительный результат. Если к указанной проблеме применять аналитический метод Римана, то естественно ожидать нетривиальной оценки $|T(\chi)|$ в том случае, когда в распределении простых чисел p в арифметических прогрессиях с разностью q наступит "порядок", а это будет, самое лучшее, при $x \ge q^{2+\varepsilon'}$, так как из расширенной гипотезы Римана следует, что

$$\pi(x;q,l) = \frac{\pi(x)}{q-1} + O\left(x^{0.5+\varepsilon}\right),$$

то есть

$$\pi(x;q,l) \sim \frac{\pi(x)}{q-1} \qquad \text{при} \qquad x \ge q^{2+\varepsilon'}.$$

Правда, если представить в виде суммы по нулям соответствующих L – функций Дирихле и только потом воспользоваться расширенной гипотезой Римана, то тогда получится оценка $|T(\chi)|$, нетривиальная уже при $x \ge q^{1+\varepsilon'}$, то есть упомянутый выше результат Виноградова 1943 г. Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник в 1971 г. писал по этому поводу: *"Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что даёт непосредственное применение расширенной гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна)"* (см. [30]; с. 29).

В 1953 г. И.М. Виноградов [7] уточнил (3.4), доказав, что

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(\left(q^{\frac{3}{4}}x^{-1}\right)\frac{1}{3} + x^{-0.1}\right).$$

Работы И.М. Виноградова по оценкам сумм характеров с простыми числами были продолжены Г.И. Перельмутером [31], который нетривиально оценил нелинейные суммы самого общего вида при числе слагаемых x большем, чем $q^{1+\varepsilon}$.

В 1968 г. А.А. Карацуба [9, 10, 11] разработал новый метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В работе [12] он с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М.Виноградова доказал: *если* q *— простое,* $\chi(a)$ *– неглавный характер по модулю* q*,* $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$*, тогда*

$$T(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

и применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества чисел вида $p(p'+k))$ в арифметической прогрессии с растущей разностью[].

В 1986 г. З.Х. Рахмонов [20, 21, 22] обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал: *пусть* D *– достаточно большое натуральное число,* χ *— неглавный характер по модулю* D*,* χ_q *– примитивный характер, порожденный характером* χ*, тогда*

$$T(\chi) \leq x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right), \qquad q_1=\prod_{\substack{p\backslash D\\ p\not\backslash q}} p. \tag{7}$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то оценка (3.5) принимает вид

$$T(\chi_q) \leq x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right),$$

и она нетривиальна при $x > q(\ln q)^{13}$.

В 2010 г. Дж.Б. Фридландер, К.Гонг, И.Е. Шпарлинский [24] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q. Они доказали: *для примитивного* *характера* χ_q *и всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *что для всех* $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ *имеет место оценка*

$$T(\chi_q) \ll xq^{-\delta}.$$

З.Х. Рахмонов в [25, 26, 27] для составного q доказал нетривиальную оценку $T(\chi_q)$ при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

В третьей главе, используя результаты предыдущих глав, а именно:

- теорему 1.1 о нетривиальной оценке коротких сумм значений характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел по модулю свободному от кубов;

- теорему 2.1 о нетривиальной оценке короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих, сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера;

- теорему 2.2 о нетривиальной оценке короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих не очень короткую сплошную сумму, длина которой не превосходит корня четвёртой степени от длины двойной суммы,

доказываем теорему 3.1 о нетривиальной оценке суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел.

Теорема 3.1. *Пусть* q *– достаточно большое натуральное число свободное от кубов,* χ_q *– примитивный характер по модулю* q, $(l,q)=1$, ε *— положительное сколь угодно малое постоянное число,* $\mathscr{L} = \ln q$, $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. *Тогда имеем*

$$T(\chi_q) = \sum_{p \leq x} \chi_q(p-l) \ll x \exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы 3.1 проводится методом оценок суммы с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами А.А. Карацубы [12] об оценке “короткой” суммы $T(\chi_q)$ для простого q,методам З.Х. Рахмонова [27] об оценке “короткой” суммы $T(\chi_q)$ для составного q. Его основу, как уже отмечали, составляют теорема 1.1 первой главы и теоремы 2.1 и 2.2 второй главы.

Глава 1

Короткие суммы значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел

1.1 . Постановка задачи и формулировка результатов

Берджесс для неглавного характера $\chi(n)$ по модулю q и фиксированного положительного r получил оценку вида

$$S_y(u) = \sum_{u-y<n\le u} \chi_q(n) \ll y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{r+1}{4r^2}+\varepsilon},$$

где q — число свободное от кубов, или $r=2$ [28, 29]. Отметим, что эта оценка для модулей свободных от кубов будет нетривиальной при $y \ge q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

При изучении закона распределения значений χ_q на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, возникает задача получения нетривиальной оценки суммы вида

$$S_y(u,\eta) = \sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta), \qquad (\eta,q)=1,$$

которую назовём *суммами значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел.*

Если q — простое число, то изучение сумм $S_y(u,\eta)$ с помощью тождества

$$S_y(u,\eta)=\sum_{u-y<n\le u}\chi_q(n-\eta)-\chi_q(-\eta)\sum_{x-y<nq\le x}1=$$
$$=S_y(u-\eta)-\chi_q(-\eta)\left(\frac{y}{q}-\left\{\frac{x}{q}\right\}+\left\{\frac{x-y}{q}\right\}\right)$$

сводится к суммам $S_y(u-\eta)$. В случае составного q суммы $S_y(u,\eta)$ ранее рассматривались в работах [20, 21, 22, 24, 25, 26, 27] и была получена нетривиальная оценка при

$$y\ge q^{\frac{1}{3}+\varepsilon}.$$

Основным результатом этой главы является следующая теорема о нетривиальной оценке сумм $S_y(u,\eta)$ для модулей, свободных от кубов q.

Теорема 1.1. *Пусть q — число свободное от кубов, $(\eta,q)=1$, $y\ge q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$, $0,1\le\sigma<0,9$, тогда*

$$S_y(u,\eta)\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^{\sigma}\right).$$

Из этой теоремы 1.1 при $\sigma=0,6$ следует:

Следствие 1.1.1. *Пусть q — число свободное от кубов, $(\eta,q)=1$, $y\ge q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$, тогда*

$$\sum_{\substack{u-y<n\le u\\(n,q)=1}}\chi_q(n-\eta)\ll y\exp\left(-2\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы 1.1 опирается на известные леммы 1.5 и 1.7. Основное утверждение, позволившее доказать теорему 1.1, содержится в следующей лемме 1.1, доказательство которой проводится методом А.А. Карацубы [9, 10], позволившим ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени.

Доказательство теоремы 1.1 опирается на известные леммы 1.5 и 1.7. Основное утверждение, позволившее доказать теорему 1.1, содержится в следующей лемме 1.1.

Лемма 1.1. *Пусть σ – вещественное число, $r \geq 3$ — произвольное фиксированное натуральное число, M, N, d и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta, q) = 1$, $N < q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}} d^{-\frac{1}{2}}$, $0,1 \leq \sigma < 0,9$, $d \leq \exp(\mathscr{L}^2)^{\sigma}$, тогда*

$$\sum_{M<n\leq M+N} \chi_q(nd-\eta) \leq N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2.$$

1.2 . Вспомогательные леммы

Лемма 1.2. *Пусть $r \geq 1$, $M \geq 1$ — целые числа, $a_\nu, b_\nu \geq 0$ при $\nu = 1, 2, \ldots,$. Тогда имеют место следующие соотношения:*

а) *(неравенство Гёльдера)*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{M} a_\nu b_\nu\right)^r \leq \left(\sum_{\nu=1}^{M} a_\nu\right)^{r-1} \sum_{\nu=1}^{M} a_\nu b_\nu^r;$$

б) *(неравенство Коши)*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{M} a_\nu b_\nu\right)^2 \leq \sum_{\nu=1}^{M} a_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{M} b_\nu^2.$$

Лемма 1.3. *Для любых натуральных чисел u, q и имеет место асимптотическая формула*

$$\left|\sum_{\substack{t=1\\(t,q)=1}}^{u} 1 - \frac{\varphi(q)}{q}u\right| \leq 2^{\omega(q)}.$$

Доказательство см.[24].

Лемма 1.4. *При $u \geq 2$ имеем*

$$\sum_{n\leq u} \tau_r^k(n) \ll u\,(\ln x)^{r^k-1}, \qquad k = 1, 2.$$

Доказательство см.[32]

Лемма 1.5. *Пусть σ — фиксированное число, $0,1 \le \sigma < 0,9$, тогда*

$$\sum_{\substack{d \backslash q \\ d > \exp(2\mathscr{L})^{\sigma}}} \frac{\mu^2(d)}{d} \ll \exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^{\sigma}\right).$$

Доказательство см.[27]

Лемма 1.6. . *Пусть K — число решений сравнения:*

$$(nd-\eta)y \equiv (n_1 d-\eta)y_1 \pmod q,$$

$$M < n, n_1 \le M+N, \quad 1 \le y, y_1 \le Y, \quad (y,q)=1, \quad (y_1,q)=1,$$

где $(\eta,q)=1$, d — делитель числа q, $2NY<q$, $d<Y$, $\rho(qd^{-1},Y)$ — число делителей β числа qd^{-1}, удовлетворяющего условиям $qY^{-1} \le \beta < qd^{-1}$ и $(\beta,d)=1$. Тогда справедливо соотношение:

$$K \le NY_q + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d}\rho(qd^{-1},Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d},$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Доказательство см.[27]

Лемма 1.7. *Пусть $(\eta,q)=1$, $y<u$, тогда*

$$S_y(u,\eta) = \sum_{\substack{u-y<n\le xu \\ (n,q)=1}} \chi_q(n-\eta) \ll 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\mathscr{L}.$$

Доказательство см.[27]

Лемма 1.8. *Пусть χ_q – примитивный характер по модулю q, $r \ge 2$ — натуральное число, и среди чисел $m_1 \dots, m_{2r}$ по крайней мере $r+1$ различные,*

$$A_i = \prod_{i\ne j}(m_i - m_j).$$

Если q – число, свободное от кубов или $r=2$, тогда

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{q-1}\chi\left(\frac{(\lambda+m_1)(\lambda+m_2)\dots(\lambda+m_r)}{(\lambda+m_{r+1})(\lambda+m_{r+2})\dots(\lambda+m_{2r})}\right)\right| \le (4r)^{\tau(q)}(q,A_i)q^{\frac{1}{2}},$$

для некоторого $A_i \ne 0$.

Доказательство см.[29].

Лемма 1.9. *Пусть r — произвольное фиксированное натуральное число, Z — натуральное число , q число свободное от кубов или $r = 2$, $\psi(m)$- произвольная комплекснозначная функция, и $|\psi(m)| \le H$ при $1 \le m \le h$. Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{\lambda=0}^{q-1} \left| \sum_{m=1}^{h} \chi_q(\lambda+m)\psi(m) \right|^{2r} \ll H^{2r}h^r q + H^{2r}h^{2r}q^{\frac{1}{2}+\delta},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от r и δ.

Доказательство. Возведя модуль внутренней суммы в степень $2r$, затем сделав суммирование по λ внутренним, имеем

$$S = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{m_1=1}^{h} \dots \sum_{m_{2r}=1}^{h} \psi(m_1)\dots\psi(m_r)\overline{\psi_{r+1}(m)\dots\psi(m_{2r})} \times$$
$$\times \chi\left(\frac{(\lambda+m_1)(\lambda+m_2)\dots(\lambda+m_r)}{(\lambda+m_{r+1})(\lambda+m_{r+2})\dots(\lambda+m_{2r})} \right) =$$
$$= \sum_{m_1=1}^{h} \dots \sum_{m_{2r}=1}^{h} \psi(m_1)\dots\psi(m_r)\overline{\psi_{r+1}(m)\dots\psi(m_{2r})} \times$$
$$\times \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda+m_1)(\lambda+m_2)\dots(\lambda+m_r)}{(\lambda+m_{r+1})(\lambda+m_{r+2})\dots(\lambda+m_{2r})} \right).$$

Далее, переходя к оценкам, получим

$$|S| \le H^{2r} \sum_{m_1=1}^{h} \dots \sum_{m_{2r}=1}^{h} \left| \sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda+m_1)(\lambda+m_2)\dots(\lambda+m_r)}{(\lambda+m_{r+1})(\lambda+m_{r+2})\dots(\lambda+m_{2r})} \right) \right|.$$

Множество наборов $(m_1, m_2, \dots, m_{2r})$ разобьём на два подмножества $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Через $\mathscr{A}$ обозначим наборы, содержащие не более r различных чисел, через $\mathscr{B}$ – обозначим оставшиеся α. Множество $\mathscr{B}$ состоит из наборов, содержащие по крайней мере $(r+1)$ различных чисел. Обозначим через $S(\mathscr{A})$ и $S(\mathscr{B})$ соответственно суммы по множествам $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Будем иметь

$$|S| \le H^{2r}(S(\mathscr{A}) + S(\mathscr{B})),$$

где

$$S(\mathscr{A}) = \sum_{(m_1,m_2,\dots,m_{2r})\in\mathscr{A}} \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda+m_1)(\lambda+m_2)\dots(\lambda+m_r)}{(\lambda+m_{r+1})(\lambda+m_{r+2})\dots(\lambda+m_{2r})}\right)\right|,$$

$$S(\mathscr{B}) = \sum_{(m_1,m_2,\dots,m_{2r})\in\mathscr{B}} \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda+m_1)(\lambda+m_2)\dots(\lambda+m_r)}{(\lambda+m_{r+1})(\lambda+m_{r+2})\dots(\lambda+m_{2r})}\right)\right|.$$

Оценим сумму $S(\mathscr{A})$. Внутреннюю сумму по λ оценивая тривиально числом слагаемых, найдём

$$S(\mathscr{A}) \le q \sum_{(m_1,m_2,\dots,m_{2r})\in\mathscr{A}} = q|\mathscr{A}|,$$

где $|\mathscr{A}|$ — количество элементов множества $\mathscr{A}$. Легко подсчитать, что число наборов множество $\mathscr{A}$ не превосходит $h^r r^{2r}$. Поэтому

$$S(\mathscr{A}) \le q|\mathscr{A}| \le h^r r^{2r} q.$$

Оценим сумму $S(\mathscr{B}))$.Воспользовавшись леммой 1.8, при оценке внутренней суммы имеем

$$S(\mathscr{B}) = \sum_{(m_1,m_2,\dots,m_{2r})\in\mathscr{B}} \left|\sum_{\lambda=0}^{q-1} \chi\left(\frac{(\lambda+m_1)(\lambda+m_2)\dots(\lambda+m_r)}{(\lambda+m_{r+1})(\lambda+m_{r+2})\dots(\lambda+m_{2r})}\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{(m_1,m_2,\dots,m_{2r})\in\mathscr{B}} (4r)^{\tau(q)}(q,A_i)q^{\frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{2}}(4r)^{\tau(q)} \sum_{(m_1,m_2,\dots,m_{2r})\in\mathscr{B}} (q,A_i).$$

Оценивая последнюю сумму точно так же, как в лемме 8 работы [28], найдём

$$S(\mathscr{B}) \ll h^{2r} q^{\frac{1}{2}+\delta}.$$

Отсюда и из оценки $S(\mathscr{A})$, следует утверждение леммы.

1.3. Основная лемма

Лемма 1.1. *Пусть σ – вещественное число, $r \ge 3$ — произвольное фиксированное натуральное число, M, N, d и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta, q) = 1$, $N < q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}} d^{-\frac{1}{2}}$, $0,1 \le \sigma < 0,9$, $d\backslash q$, $d \le \exp(\mathscr{L}^2)^\sigma$,* *тогда*

$$S = \sum_{M<n\le M+N} \chi_q(nd-\eta) \le N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2. \qquad (1.1)$$

Доказательство. Лемму докажем методом математической индукции по N. При $N \le q^{\frac{1}{4}}$ для правой части оценки (1.1) справедливо неравенство

$$N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2 \ge N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}} > N^{1-\frac{1}{r}} \left(N^4\right)^{\frac{1}{4r}} = N,$$

то есть в этом случае оценка (1.1) является тривиальной, и её возьмем в качестве базы индукции.

Далее будем считать, что $N > q^{\frac{1}{4}}$. Производя в сумме S сдвиг интервала суммирования на h, $1 \le h \le H < N$, получим

$$S = \sum_{M<n\le M+N} \chi_q((n+h)d-\eta) + \sum_{M<n\le M+h} \chi_q(nd-\eta) - \sum_{M+N<n\le M+N+h} \chi_q(nd-\eta).$$

Оценивая две последние суммы, воспользовавшись предположением индукции, имеем

$$S \le \left| \sum_{M<n\le M+N} \chi_q((n+h)d-\eta) \right| + 2H^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2.$$

Полагая в этом неравенстве $h = yz$, суммируя его по y и z в пределах

$$1 \le y \le Y, \ \ (y,q)=1, \ \ 1 \le z \le Z, \ \ Y = \left[2^{-1} N q^{-\frac{1}{2r}} d\right], \ \ Z = \left[2^{-1-\frac{2}{r-1}} q^{\frac{1}{2r}} d^{-1}\right],$$

и обозначая через Y_q – количество чисел $y \in [1, Y]$ взаимно простых с числом q, приходим к неравенству:

$$\begin{aligned} |S| &\le (Y_q Z)^{-1} \left| \sum_{\substack{1\le y\le Y \\ (y,q)=1}} \sum_{1\le z\le Z} \sum_{M<n\le M+N} \chi_q((n+yz)d-\eta) \right| + \\ &\qquad + 2(YZ)^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2 = \\ &= (Y_q Z)^{-1} \left| \sum_{\substack{1\le y\le Y \\ (y,q)=1}} \sum_{1\le z\le Z} \sum_{M<n\le M+N} \chi_q(nd-\eta+yzd) \right| + \\ &\qquad + 2(YZ)^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2. \end{aligned}$$

Далее, определяя число y^{-1} из сравнения $yy^{-1} \equiv 1 \pmod q$ и воспользовавшись определением параметров Y и Z, имеем

$$
\begin{aligned}
|S| \leq (Y_q Z)^{-1} \sum_{M<n\leq M+N} \left| \sum_{\substack{1\leq y\leq Y \\ (y,q)=1}} \bar{\chi}(y) \sum_{1\leq z\leq Z} \chi_q((nd-\eta)y^{-1}+zd) \right| + \\
+ 2^{-1} N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2 \leq \\
\leq (Y_q Z)^{-1} \sum_{M<n\leq M+N} \sum_{\substack{1\leq y\leq Y \\ (y,q)=1}} \left| \sum_{1\leq z\leq Z} \chi_q((nd-\eta)y^{-1}+zd) \right| + \\
+ 2^{-1} N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2.
\end{aligned}
$$

Обозначая в этом неравенстве символом $I(\lambda)$ – число решений сравнения

$$
(nd-\eta)y^{-1} \equiv \lambda \pmod q, \quad M < n \leq M+N, \quad 1 \leq y \leq Y, \quad (y,q)=1,
$$

получим

$$
|S| \leq W + 0,5\, N^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2, \tag{1.2}
$$

где

$$
W = (Y_q Z)^{-1} \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \left| \sum_{1\leq z\leq Z} \chi_q(\lambda+zd) \right|. \tag{1.3}
$$

Последнюю внутреннюю сумму по z обозначим через $T(\lambda)$ и преобразуем так, чтобы её общий член не зависел от параметра d. Имеем

$$
\begin{aligned}
T(\lambda) = \sum_{1\leq t\leq dZ} \chi_q(\lambda+t) \sum_{\substack{z\leq Z \\ zd\equiv t (mod\, q)}} 1 = \\
= \sum_{1\leq t\leq dZ} \chi_q(\lambda+t) \sum_{t\leq Z} \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{k(zd-t)}{q}\right) = \\
= \frac{Z}{q} \sum_{t\leq dZ} \chi_q(\lambda+t) + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{1\leq z\leq Z} e\left(\frac{kzd}{q}\right) \sum_{t\leq dZ} \chi_q(\lambda+t) e\left(-\frac{kt}{q}\right).
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись тождеством

$$\sum_{1\le z\le Z} e\left(\frac{kz}{q/d}\right) = \frac{e\left(\frac{dkZ}{2q}\right) - e\left(-\frac{dkZ}{2q}\right)}{e\left(\frac{dk}{2q}\right) - e\left(-\frac{dk}{2q}\right)} e\left(\frac{(1+dZ)k}{2q}\right) =$$
$$= \frac{\sin\frac{\pi k dZ}{q}}{\sin\frac{\pi dk}{q}} e\left(-\frac{dk(Z+1)}{2q}\right),$$

обозначением

$$F(k,\lambda) = \left|\sum_{t\le dZ} \chi_q(\lambda+t) e\left(-\frac{kt}{q}\right)\right|, \qquad F(k+q,\lambda) = F(k,\lambda),$$

переходя к неравенствам, найдём

$$|T(\lambda)| \le \frac{Z}{q}F(0,\lambda) + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1} \frac{F(k,\lambda)}{\left|\sin\frac{\pi k}{q/d}\right|} =$$
$$= \frac{Z}{q}F(0,\lambda) + \frac{1}{q}\sum_{k\le q/(2d)} \frac{F(k,\lambda)}{\left|\sin\frac{\pi k}{q/d}\right|} + \frac{1}{q}\sum_{q/(2d)<k\le q-1} \frac{F(k,\lambda)}{\left|\sin\frac{\pi(q/d-k)}{q/d}\right|}.$$

Далее, воспользовавшись условием $dZ < q$ и неравенством $\sin\pi\alpha \ge \alpha$ при $0 \le \alpha \le 0,5$, имеем

$$|T(\lambda)| \le F(0,\lambda) + \sum_{k\le q/2d} \frac{F(k,\lambda)}{dk} + \sum_{q/2d<k\le q-1} \frac{F(k,\lambda)}{q-dk} =$$
$$\le F(0,\lambda) + \sum_{1\le k\le q-1} \frac{F(k,\lambda)}{dk} + \sum_{1\le k\le q-1} \frac{F(k,\lambda)}{q-dk} \le$$
$$\le \sum_{0\le k\le q-1} \frac{2F(k,\lambda)}{dk+1} + \sum_{0\le k\le q-1} \frac{2F(k,\lambda)}{q-dk} \le 4\mathscr{L}\cdot \max_{0\le k\le q-1} F(k,\lambda).$$

Подставляя полученную формулу в (1.3) найдём

$$W = (Y_q Z)^{-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)|T(\lambda)| \le 4\mathscr{L}\cdot \max_{0\le k\le q-1} W(k), \tag{1.4}$$

где

$$W(k) = (Y_q Z)^{-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)F(k,\lambda).$$

Возведём $W(k)$ в степень r и воспользуемся неравенством Гёльдера (лемма 1.2), полагая в нём

$$a_\lambda = I(\lambda), \quad b_\lambda = F(k,\lambda),$$

с учётом оценки

$$\sum_{\lambda=1}^{q} I(\lambda) \le NY_q,$$

будем иметь

$$W^r(k) \le (Y_q Z)^{-r} \left(\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) \right)^{r-1} \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) F(k,\lambda)^r \le$$
$$\le \frac{(NY_q)^{r-1}}{(Y_q Z)^r} \sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) F(k,\lambda)^r.$$

Возведём обе части последнего неравенства в квадрат и воспользуемся неравенством Коши (лемма1.2), полагая в нём

$$a_\lambda = I(\lambda), \quad b_\lambda = F(k,\lambda)^r.$$

Тогда

$$W^{2r}(k) \le \frac{(NY_q)^{2r-2}}{(Y_q Z)^{2r}} \left(\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda) F(k,\lambda)^r \right)^2 \le \frac{(NY_q)^{2r-2}}{(Y_q Z)^{2r}} \cdot KV,$$

где

$$K = \sum_{\lambda=0}^{q-1} I^2(\lambda), \qquad V = \sum_{\lambda=0}^{q-1} F(k,\lambda)^{2r}.$$

Для оценки суммы V, воспользовавшись леммой 1.9, получим

$$V = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left| \sum_{1 \le z \le dZ} \chi_q(\lambda+z) e\left(-\frac{kz}{q}\right) \right|^{2r} \le c_1 \left((dZ)^r q + (dZ)^{2r} q^{\frac{1}{2}+\delta} \right).$$

Следовательно,

$$W^{2r}(k) \le c_1 \frac{(NY_q)^{2r-2}}{(Y_q Z)^{2r}} \left(Z^r d^r q + Z^{2r} d^{2r} q^{\frac{1}{2}+\delta} \right) \cdot K =$$
$$= c_1 \frac{N^{2r-2}}{Y_q^2} \left(Z^{-r} d^r q + d^{2r} q^{\frac{1}{2}+\delta} \right) \cdot K. \tag{1.5}$$

Сумма K равна числу решений сравнения

$$(nd-\eta)y^{-1} \equiv (n_1 d-\eta)y_1^{-1} \pmod q,$$
$$M < n, n_1 \le M+N, \quad 1 \le y, y_1 \le Y, \quad (y,q)=1, \quad (y_1,q)=1,$$

или сравнения

$$(nd-\eta)y \equiv (n_1 d-\eta)y_1 \pmod q,$$
$$M < n, n_1 \le M+N, \quad 1 \le y, y_1 \le Y, \quad (y,q)=1, \quad (y_1,q)=1,$$

для которого выполняются все условия леммы 1.6:

$$2NY = 2N\left[2^{-1}Nq^{-\frac{1}{2r}}d\right] \le N^2 q^{-\frac{1}{2r}}d < \left(q^{\frac12+\frac{1}{4r}}d^{-\frac12}\right)^2 q^{-\frac{1}{2r}}d = q,$$
$$\frac{Y}{d} = \frac{\left[2^{-1}Nq^{-\frac{1}{2r}}d\right]}{d} > \frac{\left[2^{-1}q^{\frac14}q^{-\frac{1}{2r}}d\right]}{d} > \frac{\left[2^{-1}q^{\frac14}q^{-\frac16}d\right]}{d} > 3^{-1}q^{\frac{1}{12}} > 1.$$

Согласно этой лемме, имеем

$$K \le NY + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d}\rho(qd^{-1},Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d} =$$
$$= \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}\left(1 + \frac{d}{2(NY)^\delta} + \frac{Y}{N(NY)^\delta}\left(\rho(qd^{-1},Y)+1\right)\right).$$

Отсюда, с учётом соотношений

$$d \le \exp(\mathscr{L}^2)^\sigma \le q^{\frac{\delta}{6}},$$
$$(NY)^\delta \ge (0,4\,N^2q^{-\frac{1}{2r}}d)^\delta \ge (0,4\,q^{\frac12-\frac{1}{2r}}d)^\delta > 0,4\,q^{\frac{\delta}{3}},$$
$$Y \le 2^{-1}\,Nq^{-\frac{1}{2r}}d \le 2^{-1}\,Nq^{-\frac{1}{2r}+\frac{\delta}{6}},$$
$$\rho(qd^{-1},Y)+1 \le \tau(q) \le q^{\frac{\delta}{6}},$$

которые следуют из определений параметров σ и Y, находим

$$K \le \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}\left(1 + \frac{q^{\frac{\delta}{4}}}{2\cdot 0,4\,q^{\frac{\delta}{3}}} + \frac{2^{-1}\,Nq^{-\frac{1}{2r}+\frac{\delta}{6}}}{N\cdot 0,4q^{\frac{\delta}{3}}}\cdot q^{\frac{\delta}{6}}\right) =$$
$$= \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d}\left(1 + \frac54\left(q^{-\frac{\delta}{12}} + q^{-\frac{1}{2r}}\right)\right) \le \frac{3(NY)^{1+\delta}}{d}.$$

Подставляя эти оценки в (1.5), получим

$$W^{2r}(k) \le c_1 \frac{N^{2r-2}}{Y_q^2}\left(Z^{-r}d^r q + d^{2r}q^{\frac{1}{2}+\delta}\right)\cdot\frac{3(NY)^{1+\delta}}{d} =$$
$$= \frac{3c_1 N^{2r-1+\delta}\,Y^{1+\delta}}{Y_q^2}\left(Z^{-r}d^{r-1}q + d^{2r-1}q^{\frac{1}{2}+\delta}\right).$$

Отсюда и из (1.4) имеем

$$W^{2r} \le \left(4\mathscr{L}\cdot\max_{0\le k\le q-1} W(k)\right)^{2r} \le$$
$$\le \frac{3c_1 N^{2r-1+\delta}\,Y^{1+\delta}}{Y_q^2}\left(Z^{-r}d^{r-1}q + d^{2r-1}q^{\frac{1}{2}+\delta}\right)(4\mathscr{L})^{2r}. \tag{1.6}$$

Далее, воспользовавшись леммой 1.3 и известными неравенствами

$$\omega(q) \le \frac{c_\omega \mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}, \qquad \frac{\varphi(q)}{2q} \le \frac{c_\varphi}{\ln\mathscr{L}},$$

где c_ω и c_φ — абсолютные постоянные, найдём

$$\left|Y_q - \frac{\varphi(q)}{q}Y\right| \le 2^{\omega(q)} \le 2^{\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}} = q^{\frac{c_\omega \ln 2}{\ln\mathscr{L}}} < \frac{\varphi(q)}{2q}q^{\frac{1}{7}} < \frac{\varphi(q)}{2q}\left[2^{-1}Nq^{-\frac{1}{6}}\right] = \frac{\varphi(q)}{2q}Y,$$

то есть

$$Y_q > \frac{\varphi(q)}{2q}Y \ge \frac{c_\varphi Y}{\ln\mathscr{L}}.$$

Пользуясь этим неравенством, выражая в оценке (1.6) параметр Y_q через Y, получаем

$$W^{2r} \le \frac{3c_1 N^{2r-1+\delta}}{c_\varphi^2 Y^{1-\delta}}\left(Z^{-r}d^{r-1}q + d^{2r-1}q^{\frac{1}{2}+\delta}\right)(4\mathscr{L})^{2r}(\ln\mathscr{L})^2.$$

Следовательно,

$$W = 4\left(\frac{3c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}} N^{1-\frac{1-\delta}{2r}}Y^{-\frac{1-\delta}{2r}}\left(Z^{-\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}q^{\frac{1}{2r}} + d^{1-\frac{1}{2r}}q^{\frac{1}{4r}+\frac{\delta}{2r}}\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}.$$

Далее, имея в виду, что $Y=\left[2^{-1}Nq^{-\frac{1}{2r}}d\right]$ и $Z=\left[2^{-1-\frac{2}{r-1}}q^{\frac{1}{2r}}d^{-1}\right]$, найдём

$$W\le 4\left(\frac{3c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}\ N^{1-\frac{1-\delta}{2r}}\left(3^{-1}Nq^{-\frac{1}{2r}}d\right)^{-\frac{1-\delta}{2r}}\left(\left(4^{-1}q^{\frac{1}{2r}}d^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}q^{\frac{1}{2r}}+\right.$$

$$\left.+d^{1-\frac{1}{2r}}q^{\frac{1}{4r}+\frac{\delta}{2r}}\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}=$$

$$=4\left(\frac{3^{2-\delta}c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}\ N^{1-\frac{1-\delta}{r}}q^{\frac{1+2\delta}{4r}+\frac{1-\delta}{4r^2}}d^{1-\frac{1}{r}+\frac{\delta}{2r}}\left(2\,q^{-\frac{\delta}{2r}}+1\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}=$$

$$=N^{1-\frac{1}{r}}q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}}d^{1-\frac{1}{r}}\cdot\Delta,$$

$$\Delta=4\left(\frac{3^{2-\delta}c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}N^{\frac{\delta}{r}}q^{\frac{\delta}{2r}-\frac{\delta}{4r^2}}d^{\frac{\delta}{2r}}\left(2\,q^{-\frac{\delta}{2r}}+1\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}.$$

Воспользовавшись соотношением $N<q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}}d^{-\frac{1}{2}}$, имеем

$$\Delta\le 4\left(\frac{3^{2-\delta}c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}\left(q^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4r}}d^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\delta}{r}}q^{\frac{\delta}{2r}-\frac{\delta}{4r^2}}d^{\frac{\delta}{2r}}\left(2\,q^{-\frac{\delta}{2r}}+1\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}=$$

$$=4\left(\frac{3^{2-\delta}c_1}{c_\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2r}}q^{\frac{\delta}{r}}\left(2\,q^{-\frac{\delta}{2r}}+1\right)\mathscr{L}(\ln\mathscr{L})^{\frac{1}{r}}\le 0,5q^{\frac{\delta}{r}}\mathscr{L}^2.$$

Поэтому

$$W\le 0,5N^{1-\frac{1}{r}}q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}}d^{1-\frac{1}{r}}\mathscr{L}^2,$$

Подставляя полученную оценку для W в (1.2), получим утверждение леммы.

1.4. Теорема о нетривиальной оценке коротких сумм значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел

Теорема 1.1. *Пусть q — число свободное от кубов, $(\eta,q)=1$, $y\ge q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$, $0,1\le\sigma<0,9$, тогда*

$$S_y(u,\eta)\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)<y\le 0,5q$. Воспользовавшись леммой 1.7 и известным неравенством

$$\omega(q)\le\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}},$$

где c_ω — абсолютная постоянная, имеем равенство:

$$S \le 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\mathscr{L} = \frac{\sqrt{q}\,\exp\left(\omega(q)\ln 2 + \ln\mathscr{L} + \left(2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right)\right)}{y}\cdot y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right) \le$$

$$\le \frac{\sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\ln 2\ \mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}} + 2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma + \ln\mathscr{L}\right)}{y}\cdot y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right) \le$$

$$\le \frac{\sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)}{y}\cdot y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right)$$

Отсюда, имея в виду, что $y \ge \sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)$, находим

$$S \ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right)$$

Пусть теперь $q^{\frac14+\frac32\delta} \le y \le \sqrt{q}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)$. Получаем равенство

$$S = \sum_{u-y<n\le u}\chi_q(n-\eta)\sum_{d\backslash(n,q)}\mu(d) = \sum_{d\backslash q}\mu(d)S(d),$$

где

$$S(d) = \sum_{u-y<nd\le x}\chi_q(nd-\eta).$$

Заметим, что при $d>u$ сумма $S(d)$ пустая, и она равна нулю. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что в сумме S выполняется условие $d\le u$. Разбивая сумму S на две части, имеем

$$\begin{aligned} &S = S_1 + S_2,\\ &S_1 = \sum_{\substack{d\backslash q\\ d\le\exp(2\mathscr{L})^\sigma}}\mu(d)S(d),\\ &S_2 = \sum_{\substack{d\backslash q\\ \exp(2\mathscr{L})^\sigma<d\le u}}\mu(d)S(d). \end{aligned}$$

Для оценки суммы S_2 воспользуемся тривиальной оценкой суммы $S(d)$ и леммой 1.5. Имеем

$$S_2 \ll \sum_{\substack{d\backslash q\\ \exp(2\mathscr{L})^\sigma<d\le u}}\mu^2(d)\left(\frac{y}{d}+1\right) \ll y\sum_{\substack{d\backslash q\\ \exp(2\mathscr{L})^\sigma<d\le u}}\frac{\mu^2(d)}{d} + \tau(q) \ll$$

$$\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right) + q^\delta \ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^\sigma\right).$$

Оценим теперь S_1. Для этого оценим $S(d)$, воспользовавшись леммой 1.7, при

$$M = \left[\frac{u-y}{d}\right], \qquad N = \left[\frac{u}{d}\right] - \left[\frac{u-y}{d}\right] \ll \frac{y}{d},$$

имеем

$$S(d) \ll \left(\frac{y}{d}\right)^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} d^{1-\frac{1}{r}} \mathscr{L}^2 = y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} \mathscr{L}^2.$$

Следовательно,

$$S_1 \ll y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} \mathscr{L}^2 \sum_{\substack{d \backslash q \\ d \le \exp(2\mathscr{L})^\sigma}} \mu^2(d) \le y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} \mathscr{L}^2 \sum_{d \backslash q} \mu^2(d) =$$
$$= y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} \mathscr{L}^2 \prod_{p \backslash q} 2 = y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} \mathscr{L}^2 \cdot 2^{\omega(q)},$$

где $\omega(q)$ — количество различных простых делителей числа q.

Воспользовавшись известным неравенством

$$\omega(q) \le \frac{c_\omega \mathscr{L}}{\ln \mathscr{L}},$$

где c_ω — абсолютная постоянная, найдём

$$S_1 \le y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} \mathscr{L}^2 \cdot 2^{\frac{c_\omega \mathscr{L}}{\ln \mathscr{L}}} = y^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{\delta}{r}} \mathscr{L}^2 \exp\left(\frac{c_\omega \ln 2 \cdot \mathscr{L}}{\ln \mathscr{L}}\right) =$$
$$= y \exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma \mathscr{L}^\sigma\right) \cdot \left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4r}+\delta} \mathscr{L}^{2r} \cdot \exp\left(\frac{c_\omega r \ln 2 \cdot \mathscr{L}}{\ln \mathscr{L}} + r\sigma 2^{\sigma-1}\mathscr{L}^\sigma\right)}{y}\right)^{\frac{1}{r}} <$$
$$= y \exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma \mathscr{L}^\sigma\right) \cdot \left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4r}+\delta} \mathscr{L}^{2r} \cdot \exp\left(\frac{c_\omega r \cdot \mathscr{L}}{\ln \mathscr{L}}\right)}{y}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Выбирая $r = [\delta^{-1}] + 1$, получим

$$
\begin{aligned}
S_1 &= y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^{\sigma}\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4([\delta^{-1}]+1)}+\delta}\mathscr{L}^{2r}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega r\cdot\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)}{y}\right)^{\frac{1}{r}} \le \\
&\le y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^{\sigma}\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4\delta^{-1}}+\delta}\mathscr{L}^{2r}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega r\cdot\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)}{y}\right)^{\frac{1}{r}} = \\
&\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^{\sigma}\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\delta}\mathscr{L}^{2r}\cdot\exp\left(\frac{c_\omega r\cdot\mathscr{L}}{\ln\mathscr{L}}\right)}{y}\right)^{\frac{1}{r}} \ll \\
&\ll y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^{\sigma}\right)\cdot\left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}}{y}\right)^{\frac{1}{r}} \le y\exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\mathscr{L}^{\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

Глава 2

Короткие двойные суммы значений характеров Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел

2.1 . Постановка задачи и формулировка результатов

При изучении закона распределения значений χ_q в последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p-l$, $(l,q)=1$, наряду с задачей получения нетривиальной оценки сумм вида

$$S_y(u,\eta)=\sum_{\substack{u-y<n\le u\\ (n,q)=1}}\chi_q(n-\eta),\qquad (\eta,q)=1,$$

то есть *сумм значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел*, исследованных в первой главе, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм вида

$$W=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\le\min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l),\quad (l,q)=1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau^c(m)$ и $|b_n|\le\tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q. Сумма W называется *двойной суммой значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел*, а при $x<q$ – *короткой суммой.*

И.М. Виноградов, впервые изучая сумму W, для простого q получил её нетривиальную оценку при $x \geq q^{1+\varepsilon}$ а затем нетривиальную оценку короткой суммы W при $x \geq q^{0,75+\varepsilon}$ [3, 4]. Наилучшая нетривиальная оценка для простого q при $x \geq q^{0,5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы [12].

З.Х. Рахмонов изучил сумму W для составного q и получил нетривиальную оценку при $x \geq q^{1+\varepsilon}$ [20, 21, 22]. Нетривиальную оценку короткой суммы W для составного q при $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский [24]. З.Х. Рахмонов для составного q доказал нетривиальную оценку W при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ [25, 26, 27].

Во второй главе при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, ($q$ – число, свободное от кубов), получены нетривиальные оценки короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W, имеющих соответственно

- сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера (теорема 2.1);

- не очень короткую сплошную сумму, длина которой не превосходит корня четвёртой степени от длины двойной суммы (теорема 2.2).

Теорема 2.1. *Пусть x, M, N, l — целые числа, $(l,q)=1$, θ – фиксированное число, $M \geq q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$, $N \geq q^{\theta}$, a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau^c(m)$, где c – произвольное положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, и $|b_n| \leq B$. Тогда справедлива оценка*

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leq\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll BMNq^{-\delta\theta}\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

.

Доказательство теорем 2.1 проводится методом работы А.А. Карацубы [9, 10, 11, 12] об оценках коротких двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W, имеющих сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера. В нашем случае для длины сумм по m, выполняется условие $M \geq q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$), применяется также метод работы З. Х. Рахмонова [27] с учётом оценки Берджесса [29].

Теорема 2.2. *Пусть x, M, N, U и l — целые числа, $(l,q)=1$, $U \geq N$, a_m функция натурального аргумента такая, что $|a_m| \leq \tau^c(m)$, где c – произвольное положительное фиксированное число не всё время одно и то же, θ – фиксированное число и $0<\theta\leq\frac{1}{12}$. Тогда при $x \geq q^{\frac{1}{2}+5\delta+4\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$ и $q^\theta < N \leq x^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$ справедлива оценка*

$$W=\sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leq \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}} \chi(mn-l) \ll x\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы 2.2 проводится также методом работ А.А. Карацубы [9, 12, 13] об оценке коротких двойных сумм значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел — W имеющих сплошную сумму длина, которой не превосходит квадратного корня от длины двойной суммы (в нашем случае сумма по n), в сочетании с методом работы З.Х. Рахмонова [27] и опирается на оценку Берджесса [29].

2.2. Короткие двойные суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера

Теорема 2.1. *Пусть x, M, N, l — целые числа, $(l,q)=1$, θ – фиксированное число, $M \geq q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$, $N \geq q^\theta$, a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau^c(m)$, где c – произвольное положительное фиксированное число, не всё время одно и то же, и $|b_n| \leq B$. Тогда справедлива оценка*

$$W=\sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leq \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll BMNq^{-\delta\theta}\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

.

Доказательство. Обозначая внутреннюю сумму W через $B(m)$ имеем,

$$W = \sum_{M<m\le 2M} a_m B(m), \qquad B(m) = \sum_{\substack{N<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l).$$

Преобразуем $B(m)$ так, чтобы интервал суммирования внутренней суммы не зависел от m. Имеем равенство

$$\begin{aligned} B(m) &= \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ (n,q)=1}} b_n\chi_q(mn-l)\sum_{N<r\le\min(xm^{-1},2N)}\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{k(n-r)}{q}\right) = \\ &= \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ (n,q)=1}} b_n\chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right)\sum_{N<r\le\min(xm^{-1},2N)} e\left(-\frac{kr}{q}\right) = \\ &= \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} B(k,m)\sum_{N<r\le\min(xm^{-1},2N)} e\left(-\frac{kr}{q}\right), \\ &\quad B(k,m) = \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ (n,q)=1}} b_n\chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right). \end{aligned}$$

Далее, обозначая $N' = \min([xm^{-1}],2N)$, выделяя слагаемое с $k=0$ и суммируя затем по r, получаем

$$B(m) = \frac{N'-N}{q}B(0,m) + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1} B(k,m)\frac{\sin\frac{\pi k(N'-N)}{q}}{\sin\frac{\pi k}{q}} e\left(-\frac{k(N'+1+N)}{2q}\right).$$

Переходя к неравенствам, имеем

$$\begin{aligned} |B(m)| \le &\frac{N|B(0,m)|}{q} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1}\frac{|B(k,m)|}{\left|\sin\frac{\pi k}{q}\right|} = \\ &= \frac{N|B(0,m)|}{q} + \frac{1}{q}\sum_{k\le[q/2]}\frac{|B(k,m)|}{\left|\sin\frac{\pi(k+1)}{q}\right|} + \frac{1}{q}\sum_{q/2<k\le q-1}\frac{|B(k,m)|}{\left|\sin\frac{\pi(q-k)}{q}\right|}. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись условием $N<q$, неравенством $\sin\pi\alpha\ge\alpha$ при

$0 \le \alpha \le 0,5$, получаем

$$|B(m)| \le |B(0,m)| + \sum_{k \le [q/2]} \frac{|B(k,m)|}{k+1} + \sum_{q/2<k\le q-1} \frac{|B(k,m)|}{q-k} \le$$

$$\le |B(0,m)| + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{|B(k,m)|}{k+1} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{|B(k,m)|}{q-k}.$$

Применяя неравенство $\frac{1}{k} \le \frac{2}{k+1}$, $k \ge 1$ — целое, имеем

$$|B(m)| \le \sum_{k=0}^{q-1} \frac{2|B(k,m)|}{k+1} + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{2|B(k,m)|}{q-k} = 2\sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{q-k}\right) |B(k,m)|.$$

Таким образом,

$$|W| = \left| \sum_{M<m\le 2M} a_m B(m) \right| \le \sum_{M<m\le 2M} |a_m| \left(2\sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{q-k}\right) |B(k,m)| \right) \le$$

$$= 2\sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{q-k}\right) W(k), \quad W(k) = \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m| \, |B(k,m)| \,. \qquad (2.1)$$

Возьмём $r = [(2\theta)^{-1}] + 1$, и возведём $W(k)$ в степень r, и воспользуемся неравенством Гёльдера (лемма 1.2 а), полагая в нём

$$\nu = m, \quad a_\nu = |a_m|, \quad b_\nu = |B(k,m)| \,,$$

с учётом

$$\sum_{\substack{M<m\le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m| \le \sum_{M<m\le 2M} \tau^c(m) \ll M\mathscr{L}^c,$$

получаем

$$W^r(k) = \left(\sum_{\substack{M<m\le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m| \, |B(k,m)| \right)^r \le$$

$$\le \left(\sum_{\substack{M<m\le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m| \right)^{r-1} \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m| \, |B(k,m)|^r \ll$$

$$\ll (M\mathscr{L}^c)^{r-1} \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m| \, |B(k,m)|^r \,.$$

Возведём обе части последнего неравенства в квадрат, применяя неравенство Коши (лемма 1.2 b), и полагая в нём

$$\nu = m, \quad a_\nu = |a_m|, \quad b_\nu = |B(k,m)|\,,$$

найдём

$$W^{2r}(k) \ll (M\mathscr{L}^c)^{2r-2}\left(\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} |a_m|\,|B(k,m)|^r\right)^2 \ll$$
$$\ll (M\mathscr{L}^c)^{2r-2}\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} |a_m|^2 \sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} |B(k,m)|^{2r} \ll$$
$$\ll (M\mathscr{L}^c)^{2r-1}\sum_{\substack{m=0\\(m,q)=1}}^{q-1} |B(k,m)|^{2r}.$$

Далее, воспользовавшись явным выражением $B(k,m)$, а также имея в виду, что если m пробегает приведённую систему вычетов по модулю q, то lm^{-1} также пробегает приведённую систему вычетов по модулю q, получим

$$W^{2r}(k) \le (M\mathscr{L}^c)^{2r-1}\sum_{\substack{m=0\\(m,q)=1}}^{q-1}\left|\sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(n-lm^{-1})e\left(\frac{kn}{q}\right)\right|^{2r} =$$
$$= (M\mathscr{L}^c)^{2r-1}\sum_{\substack{m=0\\(m,q)=1}}^{q-1}\left|\sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(n-m)e\left(\frac{kn}{q}\right)\right|^{2r} \le$$
$$\le (M\mathscr{L}^c)^{2r-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1}\left|\sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} b_n\chi_q(n+\lambda)e\left(\frac{kn}{q}\right)\right|^{2r}.$$

Далее, пользуясь леммой 1.9, условиями $|b_n| \le B$ и $MN < x$, найдём

$$W^{2r}(k) \ll (M\mathscr{L}^c)^{2r-1}\cdot B^{2r}\left(N^r q + N^{2r}q^{\frac{1}{2}+\delta}\right) =$$
$$= B^{2r}(MN)^{2r}\mathscr{L}^{(2r-1)c}\left(\frac{q}{MN^r} + \frac{q^{\frac{1}{2}+\delta}}{M}\right).$$

Отсюда и из (2.2) следует неравенство

$$W^{2r} \ll B^{2r}(MN)^{2r}\left(\frac{q}{MN^r}+\frac{q^{\frac12+\delta}}{M}\right)\mathscr{L}^{2rc}.$$

Далее, воспользовавшись соотношениями

$$M \geq q^{\frac12+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}},\quad N\geq q^{\theta},\quad MN<x\leq 4MN,\quad 1<2r\theta\leq 1+2\theta,$$

последовательно получаем оценку

$$\begin{aligned}
W &\ll BMN\mathscr{L}^c\left(\frac{q}{MN^r}+\frac{q^{\frac12+\delta}}{M}\right)^{\frac{1}{2r}}\leq\\
&\leq BMN\mathscr{L}^c\left(\frac{q}{q^{\frac12+r\theta+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}+\frac{q^{\frac12+\delta}}{q^{\frac12+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}\right)^{\frac{1}{2r}}\leq\\
&\leq BMN\mathscr{L}^c\left(\frac{q}{q^{1+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}+\frac{q^{\frac12+\delta}}{q^{\frac12+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}\right)^{\frac{1}{2r}}=\\
&=BMN\mathscr{L}^c\left(\frac{1}{q^{2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}+\frac{1}{q^{\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}\right)^{\frac{1}{2r}}=\\
&\ll BMN\mathscr{L}^c\left(\frac{1}{q^{(1+2\theta)\delta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}\right)^{\frac{1}{2r}}\ll BMN\mathscr{L}^c\left(\frac{1}{q^{2r\theta\delta+\frac{4r}{(1+2\theta)\sqrt{\mathscr{L}}}}}\right)^{\frac{1}{2r}}\ll\\
&\ll BMN\mathscr{L}^c q^{-\frac{2}{(1+2\theta)\sqrt{\mathscr{L}}}-\delta\theta}\ll BMNq^{-\delta\theta}\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

2.3. Короткие двойные суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих не очень короткую сплошную сумму, длина которой не превосходит корня четвёртой степени от длины двойной суммы

Теорема 2.2. *Пусть x, M, N, U и l — целые числа, $(l,q)=1$, $U\geq N$, a_m функция натурального аргумента такоая, что $|a_m|\leq\tau^c(m)$, где c –*

произвольное положительное фиксированное число не всё время одно и то же, θ – фиксированное число и $0<\theta\le\frac{1}{12}$. Тогда при $x\ge q^{\frac{1}{2}+5\delta+4\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$ и $q^\theta<N\le x^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$ справедлива оценка

$$W=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}}\chi(mn-l)\ll x\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $x>x_0$ и $MN<x<0,1q$. Обозначая внутреннюю сумму W через $B(m)$ имеем,

$$W=\sum_{M<m\le 2M}a_mB(m),\qquad B(m)=\sum_{\substack{U<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}}\chi(mn-l),$$

Преобразуем $B(m)$ так, чтобы интервал суммирования внутренней суммы не зависел от m. Имеем равенство

$$\begin{aligned}B(m)&=\sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}}\chi_q(mn-l)\sum_{U<r\le\min(xm^{-1},2N)}\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}e\left(\frac{k(n-r)}{q}\right)=\\&=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}}\chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right)\sum_{U<r\le\min(xm^{-1},2N)}e\left(-\frac{kr}{q}\right)=\\&=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}B(k,m)\sum_{U<r\le\min(xm^{-1},2N)}e\left(-\frac{kr}{q}\right),\\&\qquad B(k,m)=\sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}}\chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right).\end{aligned}$$

Далее, обозначая $N'=\min([xm^{-1}],2N)$, выделяя слагаемое с $k=0$ и суммируя затем по r, получаем

$$B(m)=\frac{N'-U}{q}B(0,m)+\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1}B(k,m)\frac{\sin\frac{\pi k(N'-U)}{q}}{\sin\frac{\pi k}{q}}e\left(-\frac{k(N'+1+N)}{2q}\right).$$

Переходя к неравенствам, имеем

$$
\begin{aligned}
|B(m)| \le & \frac{N|B(0,m)|}{q} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1} \frac{|B(k,m)|}{\left|\sin\frac{\pi k}{q}\right|} = \\
& = \frac{N|B(0,m)|}{q} + \frac{1}{q}\sum_{k\le[q/2]} \frac{|B(k,m)|}{\left|\sin\frac{\pi(k+1)}{q}\right|} + \frac{1}{q}\sum_{q/2<k\le q-1} \frac{|B(k,m)|}{\left|\sin\frac{\pi(q-k)}{q}\right|}.
\end{aligned}
$$

Далее, воспользовавшись условием $N < q$, неравенством $\sin\pi\alpha \ge \alpha$ при $0 \le \alpha \le 0,5$, получаем

$$
\begin{aligned}
|B(m)| &\le |B(0,m)| + \sum_{k\le[q/2]} \frac{|B(k,m)|}{k+1} + \sum_{q/2<k\le q-1} \frac{|B(k,m)|}{q-k} \le \\
&\le |B(0,m)| + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{|B(k,m)|}{k+1} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{|B(k,m)|}{q-k}.
\end{aligned}
$$

Применяя неравенство $\frac{1}{k} \le \frac{2}{k+1}$, $k \ge 1$ — целое, имеем

$$
\begin{aligned}
|B(m)| &\le \sum_{k=0}^{q-1} \frac{2|B(k,m)|}{k+1} + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{2|B(k,m)|}{q-k} = \\
&= 2\sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{q-k}\right)|B(k,m)|.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
|W| = &\left|\sum_{M<m\le 2M} a_m B(m)\right| \le \\
&\le \sum_{M<m\le 2M} |a_m| \left(2\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{q-k}\right)|B(k,m)|\right) \le \\
&= 2\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{q-k}\right) \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ (m,q)=1}} |a_m|\,|B(k,m)|\,. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Возьмём $r = [(2\theta)^{-1}] + 1$ и $H = q^{\frac{1}{2r} - \frac{\delta}{r}}$ и в $B(k,m)$, производя сдвиг интервала суммирования на h, $1 \le h \le H$, получим

$$B(k,m) = \sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} \chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right) = \sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} \chi_q(m(n+h)-l)e\left(\frac{k(n+h)}{q}\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{N<n\le N+h\\(n,q)=1}} \chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right) - \sum_{\substack{2N<n\le 2N+h\\(n,q)=1}} \chi_q(mn-l)e\left(\frac{kn}{q}\right),$$

Суммируя это равенство по всем $h \le H$, а затем оценивая две последние суммы тривиально числом слагаемых, имеем

$$|B(k,m)| \ll H^{-1}\left|\sum_{h\le H}\sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}} \chi_q(m(n+h)-l)e\left(\frac{k(n+h)}{q}\right)\right| + H \ll$$

$$\ll H^{-1}\sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}}\left|\sum_{h\le H} \chi_q(m(n+h)-l)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right| + H.$$

Умножая обе части этого неравенства на функцию a_m, затем суммируя по всем $M < m \le 2M$ и $(m,q)=1$, находим

$$\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} |a_m|\,|B(k,m)| \ll W(k) + H\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} |a_m| \ll$$

$$\ll W(k) + H\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} \tau^c(m) \ll W(k) + HM\mathscr{L}^c,$$

где

$$W(k) = H^{-1}\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} |a_m| \sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}}\left|\sum_{h\le H} \chi_q(m(n+h)-l)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right| =$$

$$= H^{-1}\sum_{\substack{M<m\le 2M\\(m,q)=1}} |a_m| \sum_{\substack{N<n\le 2N\\(n,q)=1}}\left|\sum_{h\le H} \chi_q(n-lm^{-1}+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|,$$

где m^{-1} однозначно определяется из сравнения $mm^{-1} \equiv 1(mod\, q)$. Подставляя полученную оценку в правую часть (2.2), найдём

$$
\begin{aligned}
|W| &\ll \sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{q-k}\right)(W(k)+HM\mathscr{L}^c) \le \\
&\le \left(\max_{0\le k<q} W(k)+HM\mathscr{L}^c\right)\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{q-k}\right) = \\
&= \left(\max_{0\le k<q} W(k)+HM\mathscr{L}^c\right)\sum_{k=0}^{q-1}\frac{2}{k+1} \ll \\
&\ll \mathscr{L}\max_{0\le k<q} W(k)+\frac{xH\mathscr{L}^c}{N}.. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

В сумме $W(k)$ делая замену переменного, вместо переменных m и n вводя переменную $\lambda = n - lm^{-1}$, найдём

$$
\begin{aligned}
W(k) &= H^{-1}\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ (m,q)=1}}|a_m|\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ (n,q)=1}}\left|\sum_{h\le H}\chi_q(n-lm^{-1}+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right| = \\
&= H^{-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)\left|\sum_{h\le H}\chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|, \\
I(\lambda) &= \sum_{\substack{\lambda\equiv n-lm^{-1}(mod\, q),\\ (mn,q)=1,\, M<m\le 2M,\, N<n\le 2N}}|a_m|.
\end{aligned}
$$

Возведём $W(k)$ в степень r и воспользуемся неравенством Гёльдера (лемма 1.2 а) полагая в нём

$$
\nu=\lambda,\quad a_\nu = I(\lambda),\quad b_\nu = \left|\sum_{h\le H}\chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|,
$$

получаем

$$
\begin{aligned}
W^r(k) &\ll \left(H^{-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)\left|\sum_{h\le H}\chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|\right)^r \le \\
&\le H^{-r}\left(\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)\right)^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1} I(\lambda)\left|\sum_{h\le H}\chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|^r.
\end{aligned}
$$

Возведём обе части последнего неравенства в квадрат, применяя неравенство Коши (лемма 1.2 b) и полагая в нём

$$\nu=\lambda,\quad a_\nu=I(\lambda),\quad b_\nu=\left|\sum_{h\le H}\chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|^r,$$

найдём

$$W^{2r}(k)\le H^{-2r}\,\nu^{2r-2}(q)\,\omega(q)\sum_{\lambda=0}^{q-1}\left|\sum_{h\le H}\chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|^{2r}, \tag{2.4}$$

$$\nu(q)=\sum_{\lambda=0}^{q-1}I(\lambda),\qquad \omega(q)=\sum_{\lambda=0}^{q-1}I^2(\lambda).$$

Оценим $\nu(q)$, воспользовавшись определением $I(\lambda)$. Тогда имеем

$$\nu(q)=\sum_{\lambda=0}^{q-1}\sum_{\substack{\lambda\equiv n-lm^{-1}(mod\,q),\\ (mn,q)=1,\,M<m\le 2M,\,N<n\le 2N}}|a_m|=\sum_{M<m\le 2M}|a_m|\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ (mn,q)=1}}\sum_{\substack{\lambda=0\\ \lambda\equiv n-lm^{-1}(mod\,q)}}^{q-1}1=$$
$$=\sum_{M<m\le 2M}|a_m|\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ (mn,q)=1}}1\ll\sum_{M<m\le 2M}\tau^c(m)\sum_{N<n\le 2N}1\ll MN\mathscr{L}^c.$$

В сумме $\omega(q)$, имея в виду что сравнения

$$n_1-lm_1^{-1}\equiv n_2-m_2^{-1}(mod\,q)$$

и

$$m_1m_2(n_1-n_2)\equiv l(m_2-m_1)(mod\,q)$$

равносильны, получаем

$$\omega(q)=\sum_{M<m_1,m_2\le 2M}|a_{m_1}||a_{m_2}|\sum_{\substack{n_1-lm_1^{-1}\equiv n_2-m_2^{-1}(mod\,q),\\ (m_1m_2n_1n_2,q)=1,\,N<n_1,n_2\le 2N}}1=$$
$$=\sum_{M<m_1,m_2\le 2M}|a_{m_1}||a_{m_2}|\sum_{\substack{m_1m_2(n_1-n_2)\equiv l(m_2-m_1)(mod\,q),\\ (m_1m_2n_1n_2,q)=1,\,N<n_1,n_2\le 2N}}1=\omega_1(q)+\omega_0(q)+\omega_2(q),$$

где $\omega_1(q)$, $\omega_0(q)$ и $\omega_2(q)$ – части суммы $\omega(q)$, отвечающим соответственно условиям $m_1 < m_2$, $m_1 = m_2$ и $m_1 < m_2$. Пользуясь условием $N < q$, имеем

$$\omega_0(q) = \sum_{M<m\le 2M} |a_m|^2 \sum_{\substack{n_1-n_2\equiv 0 (mod\, q)\\ N<n_1,n_2\le 2N\\ (mn_1n_2,q)=1}} 1 = \sum_{M<m\le 2M} |a_m|^2 \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ (mn,q)=1}} 1 \ll$$

$$\ll N \sum_{M<m\le 2M} \tau^c(m) \ll MN\mathscr{L}^c.$$

Суммы $\omega_1(q)$ и $\omega_2(q)$ оцениваются одинаково. Оценим $\omega_1(q)$:

$$\omega_1(q) = \sum_{M<m_1<m_2\le 2M} |a_{m_1}||a_{m_2}| \sum_{\substack{m_1m_2(n_1-n_2)\equiv l(m_2-m_1)(mod\, q),\\ (m_1m_2n_1n_2,q)=1,\, N<n_1,n_2\le 2N}} 1$$

Из условий $m_1 < m_2$ и $(m_1m_2n_1n_2, q) = 1$ в сравнении $m_1m_2(n_1 - n_2) \equiv l(m_2 - m_1)(mod\, q)$ следует, что $n_1 \ne n_2$. Разобьём сумму по n_1 на две части $\omega_1'(q)$ и $\omega_1''(q)$, для которых соответственно выполняются условия $n_1 > n_2$ и $n_1 < n_2$. Суммы $\omega_1'(q)$ и $\omega_1''(q)$ оцениваются одинаково. Оценим $\omega_1'(q)$:

$$\omega_1'(q) = \sum_{N<n_2\le 2N} \sum_{M<m_1\le 2M} |a_{m_1}| \sum_{m_1<m_2\le 2M} |a_{m_2}| \sum_{\substack{0<n_1-n_2\le 2N-n_2,\, (m_1m_2n_1n_2,q)=1\\ m_1m_2(n_1-n_2)\equiv l(m_2-m_1)(mod\, q)}} 1 \le$$

$$\le \sum_{N<n_2\le 2N} \sum_{M<m_1\le 2M} |a_{m_1}| \sum_{m_1<m_2\le 2M} |a_{m_2}| \sum_{\substack{0<n\le N,\, (m_1m_2n_2(n_2+n),q)=1\\ m_1m_2n\equiv l(m_2-m_1)(mod\, q)}} 1 =$$

$$= \sum_{N<n_2\le 2N} \sum_{0<n\le N} \sum_{\substack{M<m_1<m_2\le 2M\\ (m_1m_2n_2(n_2+n),q)=1\\ m_1m_2n\equiv l(m_2-m_1)(mod\, q)}} |a_{m_1}||a_{m_2}|. \qquad (2.5)$$

Пусть

$$l_1 = \left[q^{\frac{1}{2}}(MN)^{-\frac{1}{2}}\right] + 1, \qquad l_2 = \left[ql_1^{-1}\right] + 1,$$

тогда найдутся числа u_0, t_0, $1 \le |u_0| \le l_1$, $1 \le |t_0| \le l_2$, такие что

$$t_0 \equiv lu_0(mod\, q).$$

Действительно, рассматривая числа вида $lu - t$, когда u и t пробегают значения $1 \le u \le l_1$, $1 \le t \le l_2$, учитивая неравенство

$$l_1l_2 = l_1\left(\left[ql_1^{-1}\right] + 1\right) > q$$

чисел, среди которых найдутся два, сравнимые между собой по модулю q, то есть

$$lu_1 - t_1 \equiv lu_2 - t_2 (mod\, q), \qquad u_1 \neq u_2, \quad t_1 \neq t_2,$$

и следовательно, можно взять $u_0 = u_2 - u_1$, $t_0 = t_2 - t_1$. Умножая обе части сравнения $m_1 m_2 n \equiv l(m_2 - m_1)(mod\, q)$ на u_0, приходим к эквивалентному сравнению

$$u_0 m_1 m_2 n \equiv t_0 (m_2 - m_1)(mod\, q)$$

или к неопределенному уравнению

$$u_0 m_1 m_2 n + t_0 (m_1 - m_2) = qz, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned}
|z| &\ll \frac{|u_0| M^2 N + |t_0| M}{q} + 1 \ll \frac{l_1 M^2 N + \left(\left[q l_1^{-1}\right] + 1\right) M}{q} + 1 \ll \\
&\ll \frac{\left(q^{\frac{1}{2}} (MN)^{-\frac{1}{2}} + 1\right) M^2 N + \left(q \cdot q^{-\frac{1}{2}} (MN)^{\frac{1}{2}} + 1\right) M}{q} + 1 = \\
&= q^{-\frac{1}{2}} (MN)^{\frac{1}{2}} M + q^{-1} M^2 N + q^{-\frac{1}{2}} (MN)^{\frac{1}{2}} + q^{-1} M + 1 = \\
&= q^{-\frac{1}{2}} (MN)^{\frac{1}{2}} M \left(1 + \frac{(MN)^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{M} + \frac{1}{(qMN)^{\frac{1}{2}}}\right) + 1 \ll \\
&\ll q^{-\frac{1}{2}} (MN)^{\frac{1}{2}} M + 1.
\end{aligned}$$

Далее от уравнения (2.6) перейдём к уравнению

$$(nu_0)^2 m_1 m_2 + n u_0 t_0 (m_1 - m_2) = qznu_0,$$

или

$$(nu_0 m_1 - t_0)(nu_0 m_2 + t_0) + t_0^2 = qznu_0,$$

и неравенство (2.5) принимает вид

$$\omega_1'(q) \ll \sum_{N<n_2\le 2N}\ \sum_{0<n\le N}\ \sum_{z\ll q^{-\frac12}(MN)^{\frac12}M+1}\ \sum_{\substack{qznu_0-t_0^2=(nu_0m_1-t_0)(nu_0m_2+t_0)\\ M<m_1<m_2\le 2M\\ (m_1m_2n_2(n_2+n),q)=1}} \tau^c(m_1)\tau^c(m_2) \le$$

$$\le \sum_{N<n_2\le 2N}\ \sum_{v\ll q^{-\frac12}(MN)^{\frac32}+N}\ \sum_{\substack{qvu_0-t_0^2=(nu_0m_1-t_0)(nu_0m_2+t_0)\\ M<m_1<m_2\le 2M,\, n\backslash v,\, n\le N\\ (m_1m_2n_2(n_2+n),q)=1}} \tau^c(m_1)\tau^c(m_2).$$

При фиксированном v уравнение

$$vu_0 - t_0^2 = (nu_0m_1 - t_0)(nu_0m_2 + t_0)$$

относительно m_1, m_2, n имеет не более $\tau(qvu_0 - t_0^2)$ решений. Не ограничивая общности, будем считать, что $\tau(qvu_0 - t_0^2) \ll q^{\frac{\delta}{2r}}$ и $\tau^c(m_1)\tau^c(m_2) \ll q^{\frac{\delta}{2r}}$, поэтому

$$\omega_1'(q) \ll \left((MN)^{\frac32}Nq^{-\frac12} + N^2\right) q^{\frac{\delta}{r}}.$$

Отсюда, с учётом оценки $\omega_0(q)$, получим

$$\omega(q) \ll \frac{(MN)^{\frac32}N}{q^{\frac12-\frac{\delta}{r}}} + N^2q^{\frac{\delta}{r}} + MN\mathscr{L}^c.$$

Подставляя эту оценку и оценку для $\nu(q)$ в (2.4), и воспользовавшись леммой 1.9, найдём

$$W^{2r}(k) \le H^{-2r}\,\nu^{2r-2}(q)\,\omega(q)\sum_{\lambda=0}^{q-1}\left|\sum_{h\le H}\chi_q(\lambda+h)e\left(\frac{kh}{q}\right)\right|^{2r} \ll$$

$$\ll \frac{(MN\mathscr{L}^c)^{2r-2}}{H^{2r}}\left(\frac{(MN)^{\frac32}N}{q^{\frac12-\frac{\delta}{r}}} + N^2q^{\frac{\delta}{r}} + MN\mathscr{L}^c\right)\left(H^rq + H^{2r}q^{\frac12+\delta}\right) \ll$$

$$\ll (MN)^{2r}\mathscr{L}^{2r-1}\left(\frac{N}{q^{\frac12-\frac{\delta}{r}}(MN)^{\frac12}} + \frac{N^2q^{\frac{\delta}{r}}}{(MN)^2} + \frac{1}{MN}\right)\left(H^{-r}q + q^{\frac12+\delta}\right).$$

Далее, воспользовавшись соотношениями $MN \asymp x$ и $H = q^{\frac{1}{2r}-\frac{\delta}{r}}$, получим

$$W^{2r}(k) \ll x^{2r}\mathscr{L}^{(2r-1)c}\left(\frac{N}{q^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{r}}x^{\frac{1}{2}}} + \frac{N^2q^{\frac{\delta}{r}}}{x^2} + \frac{1}{x}\right)q^{\frac{1}{2}+\delta} =$$

$$= x^{2r}\mathscr{L}^{(2r-1)c}\left(\frac{Nq^{\delta+\frac{\delta}{r}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{N^2q^{\frac{1}{2}+\delta+\frac{\delta}{r}}}{x^2} + \frac{q^{\frac{1}{2}+\delta}}{x}\right).$$

Извлекая корень $2r$ – й степени и подставляя её в (2.3), затем воспользовавшись соотношениями

$$H = q^{\frac{1}{2r}-\frac{\delta}{r}}, \quad \frac{1}{2r} < \theta, \quad q^{\theta} \le N \le q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta},$$

найдём

$$|W| \ll x\mathscr{L}^c\left(\frac{Nq^{\delta+\frac{\delta}{r}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{N^2q^{\frac{1}{2}+\delta+\frac{\delta}{r}}}{x^2} + \frac{q^{\frac{1}{2}+\delta}}{x}\right)^{\frac{1}{2r}} + \frac{xq^{\frac{1}{2r}-\frac{\delta}{r}}\mathscr{L}^c}{N} =$$

$$= x\mathscr{L}^c\left(\left(\frac{Nq^{\delta+\frac{\delta}{r}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{N^2q^{\frac{1}{2}+\delta+\frac{\delta}{r}}}{x^2} + \frac{q^{\frac{1}{2}+\delta}}{x}\right)^{\frac{1}{2r}} + \frac{q^{\frac{1}{2r}-\frac{\delta}{r}}}{N}\right) \ll$$

$$\ll x\mathscr{L}^c\left(\left(\frac{Nq^{\delta+2\delta\theta}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{N^2q^{\frac{1}{2}+\delta+2\delta\theta}}{x^2} + \frac{q^{\frac{1}{2}+\delta}}{x}\right)^{\frac{1}{2r}} + \frac{q^{\theta-2\delta\theta}}{N}\right) \ll$$

$$\ll x\mathscr{L}^c\left(\left(\frac{q^{\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\delta+2\delta\theta}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{q^{1+4\delta+2\delta\theta}}{x^2} + \frac{q^{\frac{1}{2}+\delta}}{x}\right)^{\frac{1}{2r}} + q^{-\frac{3}{2\sqrt{\mathscr{L}}}-\frac{c\,\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}}\right) =$$

$$= x\left(\left(\left(\frac{q^{\frac{1}{2}+5\delta+4\delta\theta+4æ}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{q^{\frac{1}{2}+2\delta+\delta\theta+æ}}{x}\right)^{2} + \frac{q^{\frac{1}{2}+\delta+2æ}}{x}\right)^{\frac{1}{2r}} + 1\right)q^{-\frac{3}{2\sqrt{\mathscr{L}}}}.$$

$$æ = \frac{3r}{2\sqrt{\mathscr{L}}} + \frac{rc\,\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}} \le \frac{7}{8\theta\sqrt{\mathscr{L}}} + \frac{7c\ln\mathscr{L}}{12\theta\,\mathscr{L}} \le \frac{1}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}$$

Таким образом при $x \ge q^{\frac{1}{2}+5\delta+4\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$, получим

$$|W| \ll xq^{-\frac{3}{2\sqrt{\mathscr{L}}}} = x\exp(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}).$$

Теорема доказана.

Глава 3

О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел

3.1. Формулировка результатов и вспомогательные леммы

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1938 г. он [2] доказал: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi) = \sum_{p\le x} \chi(p-l) \ll x^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{\sqrt[3]{x}}}. \tag{3.1}$$

Оценка (3.1) будет нетривиальной, если $x \ge q^{3+\varepsilon'}$, $\varepsilon' > 0$ – любое фиксированное число, и из нее следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mod q$ *вида* $p-l$, $p\le x$.

В 1943 г. И.М. Виноградов [3] уточнил оценку (3) и, оценил нелинейную сумму характеров с простыми числами, доказав, что

$$|T(\chi)| = \left|\sum_{p\le x}\chi(p-l)\right| \ll x^{1+\varepsilon}G, \tag{3.2}$$

$$|T_1(\chi)| = \left|\sum_{p\le x}\chi(p(p-l))\right| \ll x^{1+\varepsilon}G, \tag{3.3}$$

где

$$G = \sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}}.$$

Последние оценки будут нетривиальными, если $x \ge q^{1+\varepsilon'}$. Отметим, что оценки (3.1), (3.2), (3.3) представляют исключительный интерес, так как мало что известно даже о распределении простых чисел p в коротких арифметических прогрессиях, то есть в прогрессиях вида

$$p = l\,(modq), \qquad (l,q)=1, \qquad p \le q^A,$$

здесь A — фиксированное положительное число.

В 1952 г. И.М. Виноградов [6] доказал, что

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(q^{\frac{3}{4}}x^{-1}\right). \tag{3.4}$$

Из этой оценки видно, что она становится нетривиальной, если $x \ge q^{0.75+\varepsilon'}$. Это совершенно удивительный результат. Если к указанной проблеме применять аналитический метод Римана, то естественно ожидать нетривиальной оценки $|T(\chi)|$ в том случае, когда в распределении простых чисел p в арифметических прогрессиях с разностью q наступит “порядок”, а это будет, самое лучшее, при $x \ge q^{2+\varepsilon'}$, так как из расширенной гипотезы Римана следует, что

$$\pi(x;q,l) = \frac{\pi(x)}{q-1} + O\left(x^{0.5+\varepsilon}\right),$$

то есть

$$\pi(x;q,l) \sim \frac{\pi(x)}{q-1} \qquad \text{при} \qquad x \ge q^{2+\varepsilon'}.$$

Правда, если представить в виде суммы по нулям соответствующих L – функций Дирихле и только потом воспользоваться расширенной гипотезой Римана, то тогда получится оценка $|T(\chi)|$, нетривиальная уже при $x \ge q^{1+\varepsilon'}$, то есть упомянутый выше результат Виноградова 1943 г. Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник в 1971 г. писал по этому поводу: *“Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что даёт непосредственное применение расширенной гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна)”* (см. [30]; с. 29).

В 1953 г. И.М. Виноградов [7] уточнил (3.4), доказав, что

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(\left(q^{\frac{3}{4}}x^{-1}\right)\frac{1}{3}+x^{-0.1}\right).$$

Работы Виноградова по оценкам сумм характеров с простыми числами были продолжены Г.И. Перельмутером [31], который нетривиально оценил нелинейные суммы самого общего вида при числе слагаемых x большем, чем $q^{1+\varepsilon}$.

В 1968 г. А.А. Карацуба [9, 10, 11] разработал новый метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В работе [12] он с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова доказал: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

и применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества чисел вида $p(p'+k))$ в арифметической прогрессии с растущей разностью[].

В 1986 г. З.Х. Рахмонов [20, 21, 22] обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порожденный характером χ, тогда*

$$T(\chi) \leq x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right), \qquad q_1=\prod_{\substack{p\backslash D\\ p\not\backslash q}}p. \tag{3.5}$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то оценка (3.5) принимает вид

$$T(\chi_q) \leq x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}} \right),$$

и она нетривиальна при $x > q(\ln q)^{13}$.

В 2010 г. Дж.Б. Фридландер, К.Гонг, И.Е. Шпарлинский [24] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q. Они доказали: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T(\chi_q) \ll xq^{-\delta}.$$

З.Х. Рахмонов в [25, 26, 27] для составного q доказал нетривиальную оценку $T(\chi_q)$ при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

В третьей главе, используя результаты предыдущих глав, а именно:

- теорему 1.1 о нетривиальной оценке коротких сумм значений характера Дирихле в последовательности сдвинутых чисел по модулю свободному от кубов;

- теорему 2.1 о нетривиальной оценке короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих, сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера;

- теорему 2.2 о нетривиальной оценке короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих не очень короткую сплошную сумму, длина которой не превосходит корня четвёртой степени от длины двойной суммы,

доказываем теорему 3.1 о нетривиальной оценке суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел.

Теорема 3.1. *Пусть q – достаточно большое натуральное число свободное от кубов, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l,q)=1$, ε — положительное сколь угодно малое постоянное число, $\mathscr{L}=\ln q$, $x\ge q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Тогда имеем*

$$T(\chi_q)=\sum_{p\le x}\chi_q(p-l)\ll x\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы 3.1 проводится методом оценок суммы с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами А.А. Карацубы [12] об оценке "короткой" суммы $T(\chi_q)$ для простого q, методам З.Х. Рахмонова [27] об оценке "короткой" суммы $T(\chi_q)$ для составного q. Его основу, как уже отмечали, составляют теорема 1.1 первой главы и теоремы 2.1 и 2.2 второй главы.

Лемма 3.1. *Пусть $f(n)$ — произвольная комплекснозначная функция, $u\le x$, $r\ge 1$,*

$$C_r^k=\frac{r!}{k!(r-k)!},\quad \lambda(n)=\sum_{d\backslash n,\, d\le u}\mu(n).$$

Тогда имеет место тождество:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)f(n)=$$
$$=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{m_k\le u\\ m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\le x}}\mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_k}\ln n_1 f(m_1n_1\cdots m_km_k)+$$
$$+(-1)^r\sum_{n_1\ge u}\lambda(n_1)\cdots\sum_{\substack{n_r\ge u\\ m_1\cdots m_kn_1\cdots n_k\le x}}\lambda(n_r)\sum_{m}\Lambda(m)f(n_1\cdots n_rm).$$

Доказательство см. [33].

3.2 . Распределение значений характеров Дирихле по модулю, свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел

Теорема 3.1. *Пусть q – достаточно большое натуральное число свободное от кубов, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l,q)=1$, ε — положительное сколь угодно малое постоянное число, $\mathscr{L}=\ln q$, $x\geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Тогда имеем*

$$T(\chi_q)=\sum_{p\leq x}\chi_q(p-l)\ll x\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать, что

$$x=q^{\frac{1}{2}+\varepsilon},\quad \varepsilon=5\delta+\frac{6\delta^2}{1-\delta}+\frac{8(1-\delta)}{3\delta\sqrt{\mathscr{L}}}\leq 10^{-3},\quad \delta\leq 10^{-4}.$$

Рассмотрим сумму

$$T(\chi_q)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\chi_q(n-l).$$

В сумме $T(\chi_q)$ вклад слагаемых с условием $(n,q)>1$ является величиной, модуль которой не превосходит $\ll\mathscr{L}^2$. Поэтому

$$T(\chi_q)=\sum_{\substack{n\leq x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)\chi_q(n-l)+O\left(\mathscr{L}^2\right).$$

Вводим новый параметр

$$\theta=\frac{3\delta}{2(1-\delta)}=\frac{3\delta}{2}+\frac{3\delta^2}{2(1-\delta)},\qquad \theta<10^{-3}$$

и представим ε в вида

$$\varepsilon=5\delta+4\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}=2\delta+2\theta+2\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}},\tag{3.6}$$

Пусть r – натуральное число с условием

$$q^{(r-1)\theta}<x\leq q^{r\theta},\tag{3.7}$$

то есть
$$r \geq \frac{0,5+2\delta+2\theta+2\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}{\theta}.$$
Отсюда и из условия $\theta < 10^{-3}$ следует, что $r \geq 500$.

В лемме 3.1 возьмём $k = r$, $u_1 = x^{\frac{1}{r}}$ и
$$f(n) = \begin{cases} \chi_q(n-l), & \text{при } (n,q)=1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$
Имеем
$$T(\chi_q) = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k C_r^k T_k(\chi_q), \tag{3.8}$$
$$T_k(\chi_q) = \sum_{m_1\leq u_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{m_k\leq u_1 \\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\leq x,\ (m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k,q)=1}}\mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_k}\ln n_1\chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k-l),$$
Разобьём в $T_k(\chi_q)$ области изменения каждого $m_1,\cdots,m_k,n_1,\cdots,n_k$ на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $M_j < m_j \leq 2M_j$, $N_j < n_j \leq 2N_j$, $j=1,2,\cdots,k$. Получим
$$T_k(\chi_q) = \sum^{\mathscr{L}^{2k}}\hat{T}_k(\chi_q,M,N), \tag{3.9}$$
$$\hat{T}_k(\chi_q,M,N) = \sum_{M_1<m_1\leq 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{M_k<m_k\leq 2M_k \\ m_1n_1\cdots m_kn_k\leq x,\ (m_1n_1\cdots m_kn_k,q)=1}}\mu(m_k)\sum_{N_1<n_1\leq 2N_1}\cdots\sum_{N_k<n_k\leq 2N_k}\chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k-l)\ln n_1 =$$
$$= \sum_{M_1<m_1\leq 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{M_k<m_k\leq 2M_k \\ m_1n_1\cdots m_kn_k\leq x,\ (m_1n_1\cdots m_kn_k,q)=1}}\mu(m_k)\sum_{N_1<n_1\leq 2N_1}\cdots\sum_{N_k<n_k\leq 2N_k}\chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k-l)\int_1^{n_1}\frac{dv}{v} =$$
$$= \int_1^{2N_1}\sum_{M_1<m_1\leq 2M_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{M_k<m_k\leq 2M_k \\ m_1n_1\cdots m_kn_k\leq x,\ (m_1n_1\cdots m_kn_k,q)=1}}\mu(m_k)\sum_{\max(u,N_1)<n_1\leq 2N_1}\cdots\sum_{N_k<n_k\leq 2N_k}\chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k-l)d\ln u.$$
Через $U_1 = \max(u,N_1)$ обозначим такое число u, при котором модуль подынтегральной функции принимает максимальное значение, тогда
$$|\hat{T}_k(\chi_q,M,N)| \ll \mathscr{L}\,|T_k(\chi_q,M,N)|\,, \tag{3.10}$$

где

$$T_k(\chi_q, M, N) = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1} \mu(m_1) \cdots \sum_{\substack{M_k<m_k\le 2M_k \\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\le x,\ (m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k, q)=1}} \mu(m_k) \sum_{U_1<n_1\le 2N_1} \cdots \sum_{U_k<n_k\le 2N_k} \chi_q(m_1n_1\cdots m_kn_k - l),$$

$$N_j \le U_j < 2N_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Подставляя (3.10) в (3.9), а затем и(3.8), получим

$$T(\chi_q) \ll \sum_{k=1}^{r} \mathscr{L}^{2k} \max |T_k(\chi_q, M, N)|, \tag{3.11}$$

Вводим следующие обозначения:

$$\prod_{j=1}^{k} M_jN_j = Y, \qquad \prod_{j=1}^{k} M_jU_j = X, \qquad Y < X \le x, \qquad M_j \le x^{\frac{1}{r}} < q^{\theta},$$

далее, будем предполагать что

$$Y \ge x \exp\left(-1,2\sqrt{\mathscr{L}}\right), \tag{3.12}$$

так как в противном случае, оценивая $T_k(\chi_q, M, N)$ тривиально, будем иметь

$$T_k(\chi_q, M, N) \ll \sum_{X<n\le 2^kY} \tau_{2k}(n) \ll 2^kY\mathscr{L}^{2k-1} \ll x\,2^k\mathscr{L}^{2k-1}\exp\left(-1,2\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll$$

$$\ll x\mathscr{L}^{2k-1}\exp\left(-1,2\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll x\mathscr{L}^{-6}\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Суммы $T_k(\chi_q, M, N)$, $k = 1, \ldots, r$ оцениваются почти одинаково. Остановимся на оценке суммы $T_r(\chi_q, M, N)$. Не ограничивая общности, будем считать, что выполняются условия

$$M_1 \ge M_2 \ge \cdots \ge M_r, \qquad\qquad N_1 \ge N_2 \ge \cdots \ge N_r. \tag{3.13}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N_1:

1. $N_1 > q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$;

2. $q^{\theta} < N_1 \le q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$;

3. $N_1 \ldots N_{k-1} \le q^{\theta}$, $q^{\theta} < N_1 \ldots N_k \le q^{2\theta}$, $k = 1, \ldots, r$;

4. $N_1 \dots N_r < q^\theta$.

Для рассмотрения случаев 1 и 2 сумму $T_r(\chi_q, M, N)$ несколько преобразуем. Введём обозначения:

$$a_m = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1} \mu(m_1)\dots \sum_{\substack{M_r<m_r\le 2M_r\\ m_1\dots m_r n_2\dots n_r=m}} \mu(m_r) \sum_{U_2<n_2\le 2N_2} \dots \sum_{U_r<n_r\le 2N_r} 1, \quad |a_m| \le \tau_{2r-1}(m).$$

Тогда сумма $T_r(\chi_q, M, N)$ в следующем виде:

$$T_r(\chi_q, M, N) = \sum_{XU_1^{-1}<m\le 2^{2r-1}YN_1^{-1}} a_m \sum_{\substack{U_1<n\le 2N_1\\ mn\le x,\,(mn,q)=1}} \chi_q(mn-l), \qquad XU_1^{-1} \ge YN_1^{-1}.$$

В сумме $T_r(\chi_q, M, N)$ интервал суммирования $XU_1^{-1} < m \le 2^{2r-1}YN_1^{-1}$ разобьём на интервалы вида $H < m \le 2H$. Получим не более $2r-1$ сумм вида

$$T_r(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H<m\le 2H} a_m \sum_{\substack{U_1<n\le \min(xm^{-1}, 2N_1)\\ (mn,q)=1}} \chi_q(mn-l). \tag{3.14}$$

Случай 1. $N_1 > q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$**.** Определяя m_q^{-1} из сравнения $mm_q^{-1} \equiv 1 \pmod q$, найдём

$$T_r(\chi_q, M, N, H) = \sum_{H<m\le 2H} a_m\chi_q(m) \sum_{\substack{U_1<n\le \min(xm^{-1}, 2N_1)\\ (n,q)=1}} \chi_q(n-lm_q^{-1}).$$

Переходя к оценке, получим

$$|T_r(\chi_q, M, N, H)| \le \sum_{\substack{H<m\le 2H\\ (m,q)=1}} \tau_{2r-1}(m) \left| \sum_{\substack{U_1<n\le \min(xm^{-1}, 2N_1)\\ (n,q)=1}} \chi_q(n-lm_q^{-1}) \right|.$$

Применяя к сумме по n следствие 1.1.1 при $\eta = lm_q^{-1}$, $u = \min(xm^{-1}, 2N_1)$,

$y=\min(xm^{-1},2N_1)-U_1\le N_1$, имеем

$$T_r(\chi_q,M,N)\ll\sum_{\substack{H<m\le 2H\\(m,q)=1}}\tau_{2r-1}(m)\ N_1\exp\left(-2\sqrt{\mathscr{L}}\right)\ll$$
$$\ll H\mathscr{L}^{2r-2}\ N_1\exp\left(-2\sqrt{\mathscr{L}}\right)\le$$
$$\le 2^{2r-1}YN_1^{-1}\mathscr{L}^{2r-2}N_1\exp\left(-2\sqrt{\mathscr{L}}\right)\ll$$
$$\ll x\mathscr{L}^{2r-2}\exp\left(-2\sqrt{\mathscr{L}}\right)\ll x\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Случай 2. $q^\theta<N_1\le q^{\frac14+\frac32\delta}$**.** Имеем

$$T_r(\chi_q,M,N,H)=\sum_{H<m\le 2H}a_m\sum_{\substack{U_1<n\le\min(xm^{-1},2N_1)\\(mn,q)=1}}\chi_q(mn-l).$$

Воспользовавшись теоремой 2.2 при

$$M=H,\qquad U=U_1,\qquad N=N_1,\qquad \theta=\frac{3\delta}{2(1-\delta)},$$

и имея в виду, что $|a_m|\le\tau^c(m)$, при $x\ge q^{\frac12+5\delta+4\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$, получаем

$$T_r(\chi_q,M,N,H)\ll x\ \exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Случай 3. $N_1\dots N_{k-1}\le q^\theta$**,** $q^\theta<N_1\dots N_k\le q^{2\theta}$**,** $k=1,\dots,r$. Сумму $T_r(\chi_q,M,N)$ преобразуем, для этого вводя обозначения

$$a_m=\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\dots\sum_{M_r<m_r\le 2M_r}\mu(m_r)\sum_{U_{k+1}<n_{k+1}\le 2N_{k+1}}\dots\sum_{\substack{U_r<n_r\le 2N_r\\m_1\dots m_rn_{k+1}\dots n_r=m}}1,\quad |a_m|\le\tau_{2r-k}(m),$$

$$b_n=\sum_{U_1<n_1\le 2N_1}\dots\sum_{\substack{U_k<n_k\le 2N_k\\n_1n_2\dots n_k=n}}1,\qquad b_n\le\tau_k(n),$$

запишем её в виде:

$$T_r(\chi_q,M,N)=\sum_{X(U_1\dots U_k)^{-1}<m\le 2^{2r-k}Y(N_1\dots N_k)^{-1}}a_m\sum_{\substack{U_1\dots U_k<n\le 2^kN_1\dots N_k\\mn\le x,\ (mn,q)=1}}b_n\chi_q(mn-l).$$

В сумме $T_r(\chi_q, M, N)$ интервал суммирования по m и по n разобьём соответственно на интервалы вида $H < m \le 2H$ и $V < n \le 2V$. Получим не более $(2r-k)k$ сумм вида

$$T_r(\chi_q, M, N, H, V) = \sum_{H<m\le 2H} a_m \sum_{\substack{V<n\le \min(xm^{-1}, 2V)\\ (mn,q)=1}} b_n \chi_q(mn-l).$$

Эту сумму оценим, воспользовавшись теоремой 2.1, полагая

$$M = H, \qquad N = V, \qquad B = q^{\theta\delta}.$$

Из условия рассматриваемого случая и из условия $x \ge q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\theta+2\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}$ следует, что

$$\begin{aligned}
H \ge & \frac{x}{4V} \ge \frac{x}{2^{k+1}N_1\dots N_k} \ge \frac{q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\theta+2\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}{2^{k+1}\,q^{2\theta}} > \frac{q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}{e^{r+1}} = \\
&= q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}-\frac{r+1}{\mathscr{L}}} > q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\delta\theta+\frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}-\frac{1}{\theta\mathscr{L}}} > q^{\frac{1}{2}+2\delta+2\delta\theta+\frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}},\\
V \ge & U_1\dots U_k \ge N_1\dots N_k \ge q^{\theta},\\
|a_m| \le & \tau_{2r-k}(m) \le \tau^c(m), \qquad\qquad |b_n| \le \tau_k(n) \le n^{\frac{\delta}{2}} \le (q^{2\theta})^{\frac{\delta}{2}} = q^{\theta\delta},
\end{aligned}$$

то есть выполняются условия теоремы 2.1. Согласно этой теореме имеем

$$|T_r(\chi_q, M, N, H, V)| \ll BHVq^{-\delta\theta}\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll x\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Случай 4. $N_1\dots N_r < q^{\theta}$. Покажем, что в этом случае выполняется неравенство

$$M_1M_2 > q^{\theta}.$$

Пусть последнее неравенство не выполняется, то есть $M_1M_2 \le q^{\theta}$, тогда из условия (3.13) следует, что

$$M_3\dots M_r \le (M_1M_2)^{\frac{r-2}{2}}.$$

Отсюда, для рассматриваемого случая, из соотношения $r > 500$, а также из (3.7), найдём

$$\begin{aligned}
Y &\le N_1\dots N_r(M_1M_2)^{1+\frac{r-2}{2}} = N_1\dots N_r(M_1M_2)^{\frac{r}{2}} \le q^{\theta\left(\frac{r}{2}+1\right)} = \\
&= q^{\theta(r-1)-0,5\theta(r-4)} < q^{\theta(r-1)-\theta} < xq^{-\theta} < xq^{-\delta} < x\exp\left(-1,2\sqrt{\mathscr{L}}\right),
\end{aligned}$$

что противоречит соотношению (3.12).

Сумму $T_r(\chi_q, M, N)$ преобразуем, вводя обозначения

$$a_m = \sum_{M_2 < m_2 \le 2M_2} \mu(m_2) \ldots \sum_{M_r < m_r \le 2M_r} \mu(m_r) \sum_{U_1 < n_1 \le 2N_1} \ldots \sum_{\substack{U_r < n_r \le 2N_r \\ m_2 \ldots m_r n_1 \ldots n_r = m}} 1, \qquad |a_m| \le \tau_{2r-2}(m),$$

$$b_n = \sum_{M_1 < m_1 \le 2M_1} \mu(m_1) \sum_{M_2 < m_2 \le 2M_2} \mu(m_2), \qquad |b_n| \le \tau(n),$$

к следующему виду:

$$T_r(\chi_q, M, N) = \sum_{X(M_1M_2)^{-1} < m \le 2^{2r-k} Y (M_1M_2)^{-1}} a_m \sum_{\substack{M_1M_2 < n \le 4M_1M_2 \\ mn \le x, \ (mn,q)=1}} b_n \chi_q(mn - l).$$

В сумме $T_r(\chi_q, M, N)$ интервал суммирования по m и по n разобьём соответственно на интервалы вида $H < m \le 2H$ и $V < n \le 2V$. Получим не более $2(2r-2)$ сумм вида

$$T_r(\chi_q, M, N, H, V) = \sum_{H < m \le 2H} a_m \sum_{\substack{V < n \le \min(xm^{-1}, 2V) \\ (mn,q)=1}} b_n \chi_q(mn - l).$$

Из условий

$$x = q^{\frac{1}{2} + 2\delta + 2\theta + 2\delta\theta + \frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}, \qquad M_1M_2 \le q^{2\theta},$$

следует, что

$$H \ge \frac{x}{V} \ge \frac{x}{4M_1M_2} \ge \frac{q^{\frac{1}{2} + 2\delta + 2\theta + 2\delta\theta + \frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}{4q^{2\theta}} > \frac{q^{\frac{1}{2} + 2\delta + 2\delta\theta + \frac{4}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}}}{4} > q^{\frac{1}{2} + 2\delta + 2\delta\theta + \frac{2}{\theta\sqrt{\mathscr{L}}}},$$

то есть выполняются условия теоремы 2.1. Согласно этой теореме, при

$$M = H, \qquad N = V, \qquad B = \tau(n) \le n^{\frac{\delta}{2}} \le q^{\theta\delta},$$

имеем

$$|T_r(\chi_q, M, N, H, V)| \ll BHVq^{-\delta\theta} \exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right) \ll x \exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Из полученных оценок $T_k(\chi_q, M, N)$, $k = 1, \ldots, r$, вследствие условия (3.11), получим утверждение теоремы.

Заключение

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- найдена нетривиальная оценка при $y \geq q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по модулю свободных от кубов на последовательности сдвинутых чисел;
- для модулей q – свободных от кубов получена оценка коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел;
- доказана нетривиальная оценка суммы значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел, если только длина суммы является величиной превосходящей квадратный корень от модуля характера являющиеся числом свободных от кубов.

Результаты полученные в диссертации носят теоретический характер, её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Литература

[1] Виноградов И. М. Избранные труды / И. М. Виноградов // М.: Изд-во АН СССР. 1952.

[2] Виноградов И. М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю / И. М. Виноградов // Математический сборник. 1938. Т. 3. №45. С. 311 – 320.

[3] Виноградов И. М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами / И. М. Виноградов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. С. 17 – 34.

[4] Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм /И. М. Виноградов // М.: Наука. 1976.

[5] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел /И. М. Виноградов // М.: Наука. 1980

[6] Виноградов И. М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ /И. М. Виноградов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1952. Т. 16. С. 197 – 210.

[7] Виноградов И. М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ /И. М. Виноградов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1953. Т. 17, С. 285 – 290.

[8] Виноградов И. М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии /И. М. Виноградов // Известия АН СССР. Серия математическая. 1966. Т. 30. С. 481 – 496.

[9] Карацуба А. А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле /А. А. Карацуба // Успехи математических наук. 2008, том 63, выпуск 4(382). С. 43 — 92.

[10] Карацуба А. А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях /А. А. Карацуба // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. №6. С. 1287 – 1289.

[11] Карацуба А. А. Об оценках сумм характеров /А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.

[12] Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами /А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.

[13] Карацуба А. А. О суммах характеров с простыми числами /А. А. Карацуба // Доклады АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 517 – 518.

[14] Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях /А. А. Карацуба // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 – 727.

[15] Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии /А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1971. Т. 35. №3. С. 469 – 484.

[16] Карацуба А. А. Суммы характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их применения /А. А. Карацуба //Математические заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 155 – 159.

[17] Карацуба А. А. О некоторых проблемах современной аналитической теории чисел / А. А. Карацуба // Математические заметки. 1975. Т. 17. № 2. С. 341 – 349.

[18] Карацуба А. А. О распределении значений неглавных характеров /А. А. Карацуба // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1976. Т. 142. С. 156 – 164.

[19] Карацуба А. А. Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами / А. А. Карацуба // Известия АН СССР. Серия математическая. 1978. Т. 42. № 2. Т. 315 – 324.

[20] Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле /З. Х. Рахмонов // Успехи математических наук. 1986. Т. 41. № 1. С. 201 – 202.

[21] Рахмонов З. Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами /З. Х. Рахмонов // Доклады АН Таджикский ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.

[22] Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения / З. Х. Рахмонов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.

[23] Рахмонов З. Х. О наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии / З. Х. Рахмонов // Известия АН Таджикский ССР. Отделение физико-математических и геолого-химических наук. 1986. № 2. С. 103 – 106.

[24] Фридландера Дж. Б., Гонгв К., Шпарлинский И. Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах /Дж. Б. Фридландера, К. Гонгв, И. Е. Шпарлинский // Математические заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.

[25] Рахмонов З. Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел /З. Х. Рахмонов // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. №1. С. 5 – 9.

[26] Рахмонов З. Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел /З. Х. Рахмонов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13. Вып. 4(2). С. 113–117.

[27] Рахмонов З. Х. Суммы характеров с простыми числами /З. Х. Рахмонов // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15 . В. 2(50). С. 73 – 100

[28] Burgess D. A. On character sums and L – series /D. A. Burgess // Proc. London Math. Soc. 1962, v. 12, №3, pp. 193 – 206.

[29] Burgess D. A. On character sums and L – series II /D. A. Burgess // Proc. London Math. Soc. 1963, v. 13, №3, pp. 524 – 536.

[30] Линник Ю. В. Новейшие работы И. М. Виноградова /Ю. В. Линник // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1973. Т. 132. С. 27 – 29.

[31] Перельмутер Г. И. Оценка одной суммы с простыми числами /Г. И. Перельмутер // Доклады АН СССР. 1962. Т. 144. № 1. С. 48 – 51.

[32] Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы /К. К. Марджанишвили // ДАН СССР. 1939. Т. 22, №7. 391-393.

[33] Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения/З. Х. Рахмонов // Известия РАН, сер. матем. 1993. Т. 57. №4. С. 55 – 71.

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

[34] Мирзорахимов Ш. Х. Оценка короткой суммы значений характера Дирихле по модулю, свободному от кубов на последовательности сдвинутых чисел /с // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. №4. С. 823 – 830.

[35] Мирзорахимов Ш. Х. О распределении значений характеров Дирихле по модулю свободному от кубов в последовательности сдвинутых простых чисел. /З. Х. Рахмонов, Ш. Х. Мирзорахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. №4. С. 357 – 362.

[36] Мирзорахимов Ш. Х. Короткая двойная сумма значений характеров Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел /Ш. Х. Мирзорахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. №4. С. 273 – 278.

[37] Мирзорахимов Ш. Х. О распределении значений характеров Дирихле по модулю свободному от кубов в последовательности сдвинутых простых чисел /З. Х. Рахмонов, Ш. Х. Мирзорахимов // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 4(56). С. 201 – 216.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

[38] Мирзорахимов Ш. Х. Короткая двойная сумма значений характеров Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел /Ш. Х. Мирзорахимов // Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" посвященной 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. С. 29 – 31.

[39] Мирзорахимов Ш. Х. О распределении значений характеров Дирихле по модулю свободного от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел /З. Х. Рахмонов, Ш. Х. Мирзорахимов // Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" посвященной 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. С. 29 – 31.

[40] Мирзорахимов Ш. Х. О распределении значений характеров Дирихле по модулю свободного от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел /З. Х. Рахмонов, Ш. Х. Мирзорахимов //В сборнике "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения",Материалы XIII Международная конференция посвященная восьмидесятилетнею со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогический университет им.Л.Н. Толстого. 2015г. С. 238 – 239