

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу  
Мирзорохимова Шерали Хусейнбоевича «О распределении значений  
характеров Дирихле по модулю, свободному от кубов,  
в последовательности сдвинутых простых чисел»,  
представленную на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

**1. Актуальность избранной темы.** Основным предметом исследования диссертационной работы Ш.Х. Мирзорохимова является вывод новой нетривиальной оценки суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю  $q$ , свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел, то есть сумм вида

$$T(\chi) = \sum_{p \leq x} \chi(p - l), \quad (l, q) = 1.$$

где  $\chi$  — характер по модулю  $q$ . При доказательстве теоремы о бесконечности множества простых чисел, лежащих в арифметической прогрессии, первый член которой взаимно прост с разностью прогрессии, Л. Дирихле ввёл функцию целочисленного аргумента, которая позднее стала называться характером Дирихле, и которая нашла многочисленные применения в математике. Многие арифметические проблемы аналитической теории чисел связаны с распределением значений характеров Дирихле в последовательностях, имеющих определённую арифметическую природу. В частности, вопрос о распределении значений неглавного характера на последовательности сдвинутых простых чисел возникает при решении следующих арифметических задач:

- о распределениях степенных вычетов, невычетов и первообразных корней по заданному модулю в последовательности сдвинутых простых чисел с простыми числами;
- о распределениях гольдбаховых чисел в коротких арифметических прогрессиях;
- о распределениях значений символов Якоби в последовательности сдвинутых простых чисел.

В 1937 г. И.М. Виноградов создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, с помощью которого решил проблему Гольдбаха. Он в 1938 г. стал рассматривать суммы  $T(\chi)$  по модулю  $q$ ,  $q$  — простое число. Совершенно ясно, что чем меньше  $x$ , тем труднее становится проблема. Первые нетривиальные оценки суммы  $T(\chi)$  И.М. Виноградов получил в 1938 г. при  $x \gg q^{3+\varepsilon}$ , а в 1943 г. при  $x \gg q^{1+\varepsilon}$ . Затем в 1952 г. И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку  $T(\chi)$  при  $x \geq q^{0,75+\varepsilon}$ , где  $q$  — простое число. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что  $T(\chi)$  можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей  $L$  — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для  $T(\chi)$ , получится нетривиальная оценка, но только при  $x \geq q^{1+\varepsilon}$ . Наилучший результат в случае, когда модуль характера  $q$  — простое число, принадлежит А.А. Карацубе, который в 1970 г. получил нетривиальную оценку суммы  $T(\chi)$  при  $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ ,  $q$  — простое.

Для составного модуля  $q$ , нетривиальные оценки суммы  $T(\chi)$  в разное время получили З.Х. Рахмонов (1985 г.), Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский (2010 г.). Наилучшая нетривиальная оценка суммы  $T(\chi)$  для составного модуля  $q$ , принадлежит З.Х. Рахмонову которую он получил в 2013 г, при  $x \gg q^{5/6+\varepsilon}$ .

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней доказана нетривиальная оценка суммы значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел —  $T(\chi_q)$ , если только длина суммы —  $x$  является величиной, превосходящей квадратный корень от модуля характера —  $q$ , являющегося числом, свободным от кубов.

**2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации.** Все утверждения теорем и научные положения, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и оценки, полностью обоснованы и доказаны в результате применения следующих современных методов теории чисел:

- метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова;
- метод А.А. Карацубы для оценки суммы  $T(\chi_q)$  для простого  $q$ ;
- метод З.Х. Рахмонова для оценки суммы  $T(\chi_q)$ ,  $\chi_q$  — примитивный характер по модулю  $q$ , ( $q$  — составное).

**3. Достоверность и новизна полученных результатов.** Полученные в диссертации результаты являются новыми и снабжены строгими математическими доказательствами, дополняют исследования, указанных в первом пункте ученых, и заключаются в следующем

- найдена нетривиальная оценка при  $y \geq q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$  коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по модулю, свободному от кубов в последовательности сдвинутых чисел, то есть сумм вида

$$S_y(u, \eta) = \sum_{\substack{u-y < n \leq u \\ (n, q) = 1}} \chi_q(n - \eta), \quad (\eta, q) = 1,$$

- для модулей  $q$ , свободных от кубов, получена оценка коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел вида

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{N < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q) = 1}} b_n \chi_q(mn - l), \quad (l, q) = 1,$$

являющаяся нетривиальной при  $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ ;

- доказана нетривиальная оценка суммы значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел, если только длина суммы является величиной, превосходящей квадратный корень от модуля характера, являющегося числом, свободным от кубов.

**4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов.** Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся тригонометрическими функциями, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. А. Джураева АН РТ, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В. Ломоносова, в Таджикском национальном университете и в других учебных заведениях.

**5. Оценка содержания диссертации, её завершенность.** Диссертация Ш.Х. Мирзорасимова состоит из введения, списка обозначений, трёх глав, перечня литературы. Во введении приведена краткая история по изученным задачам и изложено краткое содержание диссертации.

Основным содержанием первой главы является теорема 1.1, в которой получена нетривиальная оценка суммы значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел вида  $S_y(u, \eta)$  для модулей, свободных от кубов  $q$ , при  $y \geq q^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\delta}$

Во второй главе при  $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ , ( $q$  — число, свободное от кубов), получены нетривиальные оценки короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих соответственно

- сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера (теорема 2.1);
- сплошную сумму, длина которой не превосходит квадратного корня от длины двойной суммы (теорема 2.2).

Результаты, полученные в первой и во второй главах, приложены в третьей главе к доказательству теоремы 3.1 – получению нетривиальной оценки суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел.

**6. Достоинство и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования.** Безусловными достоинствами диссертационной работы Мирзорахимов Ш.Х. является тщательность проведенного анализа поставленных задач, строгое математическое доказательство приведённых утверждений, логичная последовательность изложения материалов и её основные результаты, отмеченные в пункте 3. А к недостаткам диссертации можно отнести несколько незначительных отпечатков и грамматических ошибок, не влияющих на научную значимость полученных результатов. В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо.

**7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.** Автореферат соответствует требованиям ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации, полно и правильно отражает положения диссертационной работы.

**8. Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011.** Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. В списке литературы библиографические записи соответствует требованиям ГОСТ в полной мере.

**9. Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14.** Диссертация Мирзорахимов Ш.Х. соответствует критериям, установленным «Положением о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14.

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты в тригонометрических суммах. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении некоторых задач в аналитической теории чисел.

(П.11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, четыре из которых входят в перечень ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации.

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Диссертационная работа Мирзорахимова-Шерали Хусейнбоевича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно - квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для коротких сумм характеров, и полностью соответствует требованиям П.9 Положения о присуждения учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент: Камарадинова Заррина Нусратуллоевна,  
кандидат физико-математических наук по специальности  
01.01.06-Математическая логика, алгебра и теория чисел,  
Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни,  
заведующая кафедрой алгебры и теории чисел

Контактная информация: Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни, 734003, город Душанбе, проспект Рудаки 121  
Телефон: +992 (37) 224-13-83, e-mail: tgpu2004@mail.ru.

Подпись З.Н. Камарадиновой, заверяю.  
Учёный секретарь Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни



З.Н. Камарадинова