

«Утверждаю»
Ректор Таджикского
национального университета
академик АН РТ, профессор
Имомзода М.С.
13 мая 2017 г.



**Отзыв ведущей организации
на диссертацию Мирзорахимова Шерали Хусейнбоевича
«О распределении значений характеров Дирихле по модулю,
свободному от кубов, в последовательности сдвинутых
простых чисел», представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел**

1. **Актуальность избранной темы.** Распределение значений характеров Дирихле по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел, то есть сумм вида

$$T(\chi) = \sum_{p \leq x} \chi(p - l), \quad (l, q) = 1.$$

первым начал изучать И.М. Виноградов. Воспользовавшись своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, доказал: *если q — простое нечётное, $(l, q) = 1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q , тогда*

$$|T(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}} \right). \quad (1)$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невыветов) mod q вида $p - l$, $p \leq x$. Затем И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x \geq q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы, по нулям соответствующей L — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$, получится нетривиальная оценка, но только при $x \geq q^{1+\varepsilon}$. Наилучший результат в случае, когда модуль характера q — простое число, принадлежит А.А. Карацубе. Он в 1970 г. с помощью развития своего, ранее разработанного метода, позволившего ему*

получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени и в соединении с методом И.М. Виноградова, получил нетривиальную оценку суммы $T(\chi)$ при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, q — простое.

Сумму $T(\chi)$ для составных модулей первым начал изучать З.Х. Рахмонов и обобщил оценку (1) в виде: пусть D — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D , χ_q — примитивный характер, порожденный характером χ , тогда

$$T(\chi) \leq x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x} \tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}} \tau(q_1) \right), \quad q_1 = \prod_{\substack{p \mid D \\ p \nmid q}} p. \quad (2)$$

В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский для составного q и примитивного характера χ_q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует при $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$. З.Х. Рахмонов в 2013 г., для составного q и примитивного характера χ_q нетривиальную оценку суммы $T(\chi_q)$ доказал при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

Основным результатом диссертационной работы является обобщение вышесказанной нетривиальной оценки А.А. Карацубы суммы $T(\chi_q)$ при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ для модулей q , являющихся свободными от кубов числами.

2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации. Все утверждения теорем и научные положения сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и оценки полностью обоснованы.

3. Достоверность и новизна полученных результатов. Полученные в диссертации результаты являются новыми и дополняют исследования, указанных в первом пункте учёных. Они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем

- найдена нетривиальная оценка при $y \geq q^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ коротких сумм значений примитивного характера Дирихле по модулю, свободному от кубов в последовательности сдвинутых чисел, то есть сумм вида

$$S_y(u, \eta) = \sum_{\substack{u-y < n \leq u \\ (n, q) = 1}} \chi_q(n - \eta), \quad (\eta, q) = 1,$$

- для модулей q , свободных от кубов, получена оценка коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел вида

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{N < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q) = 1}} b_n \chi_q(mn - l), \quad (l, q) = 1,$$

являющаяся нетривиальной при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$;

- доказана нетривиальная оценка суммы значений примитивного характера Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел, если только длина суммы является величиной, превосходящей квадратный корень от модуля характера, являющегося числом, свободным от кубов.

4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организацию, занимающихся тригонометрическими суммами и суммы характеров, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. А. Джураева АН РТ, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В. Ломоносова, в Таджикском национальном университете и в других учебных заведениях.

5. Оценка содержания диссертации, её завершенность. Диссертация Ш.Х. Мирзорахимова состоит из введения, списка обозначений, трёх глав, перечня литературы. Во введении приведена краткая история по изученным задачам и изложено краткое содержание диссертации.

Основным содержанием первой главы является теорема 1.1, в которой получена нетривиальная оценка сумма значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых чисел вида

$$S_y(u, \eta) = \sum_{\substack{u-y < n \leq u \\ (n, q) = 1}} \chi_q(n - \eta), \quad (\eta, q) = 1,$$

для модулей, свободных от кубов q , при $y \geq q^{\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\delta}$

Во второй главе при $x \geq q^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$, (q – число, свободное от кубов), получены нетривиальные оценки короткой двойной суммы значений характера Дирихле от сдвинутых произведений двух чисел, имеющих соответственно

- сумму, длина которой превосходит квадратный корень от модуля характера (теорема 2.1);
- сплошную сумму, длина которой не превосходит квадратного корня от длины двойной суммы (теорема 2.2).

Результаты, полученные в первой и во второй главах, приложены в третьей главе к доказательству теоремы 3.1 получение, нетривиальной оценке суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю, свободному от кубов, в последовательности сдвинутых простых чисел.

6. Достоинство и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования. Достоинствами диссертации являются полученные в ней основные

результаты, отмеченные в пункте 3. Диссертация оформлена аккуратно, за исключением отдельных опечаток редакционного характера: например:

1. с небольшими отличиями истории исследования сумм $S_y(u, \eta)$, двойных сумм W и сумма $T(\chi_q)$ приводится автором дважды – во введении (стр. 11-12, стр. 13-14, стр. 15-18), затем соответственно в главах 1, 2 и 3 (стр. 20-21, стр. 36-37, стр. 52-55). Вполне достаточно было приведенные истории во введении;
2. стр. 28, снизу стр. 5: не обосновано как появляется постоянная 4 перед максимумом;
3. стр. 4, последнюю строку следовало бы написать: $\mathcal{L} = \ln q$ в первой главе, $\mathcal{L} = \ln xq$ во второй и третьей главах.

7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации, полно и правильно отражает положения диссертационной работы.

8. Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. В списке литературы библиографические записи соответствует требованиям ГОСТ в полной мере.

9. Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14. Диссертация Мирзорахимов Ш.Х. соответствует критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней» по пунктам 10, 11 и 14.

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты в тригонометрических суммах. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении некоторых задач в аналитической теории чисел.

(П.11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, четыре из которых входят в перечень ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации.

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Диссертационная работа Мирзорахимова Шерали Хусейнбоевича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное

значение для коротких тригонометрических сумм, и полностью соответствует требованиям П.9 Положения о присуждения учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теории чисел.

Отзыв составили кандидаты физико-математических наук, доценты А.З. Азамов, Р. Бобоева, Ш.Л. Бобоёров. Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры алгебры и теории чисел, механико-математического факультета Таджикского национального университета, протокол №9 пункт 1 от 20 мая 2017 года.

Заведующий кафедрой
алгебры и теории чисел,
кандидат физ.-мат. наук

Азамов А.З.

Контактная информация ведущей организации
Таджикский национальный университет.

Адрес: 734025, г.Душанбе, проспект Рудаки, 17

сайт: <http://www.tnu.tj/index.php/ru>, телефон:(992-372) 21-77-11

E-mail: tgnu@mail.tj

Подпись кандидата физ.-мат. наук
Азамова Аслиддина Замоновича заверяю
Начальник управления кадров
и специальной части ТНУ



Тавкиев Э.Ш.