На правах рукописи

Олифтаев Нодир Фезилобекович

НЕРАВЕНСТВА ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА ДЛЯ τ-МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ В L_2

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 6

Работа выполнена в Таджикском государственном университете коммерции

НАУЧНЫЕ РУКОВОДИТЕЛИ: доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор **Шабозов Мирганд Шабозович,** доктор физико-математических наук, профессор **Вакарчук Сергей Борисович**

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Алимов Алексей Ростиславович,** доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, научный сотрудник лаборатории вычислительных методов;

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич, доктор физико-математических наук, доцент, Таджикский национальный университет, доцент кафедры математического анализа и теории функций

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова

Защита состоится *27 января 2017 г. в 14:00 часов* на заседании диссертационного совета Д 047.007.02, созданного на базе Института математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г.Душанбе, ул Айни, 299/4, Институт математики им. А.Джураева.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте http://www.mitas.tj Института математики им. А.Джураева Академии наук Республики Таджикистан.

Автореферат разослан "___" ____________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета **Ш.А.Хайруллоев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория приближения функций представляет собой весьма обширную ветвь математического анализа, занимающуюся проблемами приближенного представления функций линейными суммами конечного числа более простых функций, так чтобы возникающая при этом погрешность была наименьшей. Особое внимание в этой теории уделяется решению экстремальных задач, в которых требуется определить точную верхнюю грань погрешности приближения на заданном классе функций или указать для этого класса наилучший метод приближения фиксированной размерности. Существенные результаты при решении сформулированных экстремальных задач теории аппроксимации были получены А.Лебегом, Ш.Ж.Валле-Пуссеном, Д.Джексоном, С.Н.Бернштейном, А.Зигмундом в начале двадцатого века и А.Н.Колмогоровым, Ж.Фаваром, Н.Ахиезером, М.Г.Крейном, Б.Надем, С.М.Никольским, С.Б.Стечкиным, В.К.Дзядыком, Н.П.Корнейчуком, В.М.Тихомировым в середине двадцатого века.

Одной из центральных экстремальных задач теории приближений является задача о точных константах в неравенствах типа Джексона-Стечкина. Под неравенствами типа Джексона-Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается через некоторую характеристику её гладкости. Следует отметить, что точные константы в неравенстве Джексона-Стечкина в различных нормированных пространствах найдены в работах Н.П.Корнейчука[1], Н.И.Черных[2], Л.В.Тайкова[3], А.А.Лигуна[4], В.И.Иванова[5], В.И.Иванова и О.И.Смирнова[6], В.Ю.Попова[7], В.В.Арестова[8], В.А.Юдина[9],

[1]Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. 1962. Т.145, №3. С.514-516.

[2]Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т.2, №5. С.513-522.

[3]Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т.20, №3. С.433-438.

[4]Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1988. Т.43, №6. С.757-769.

[5]Иванов В.И. Точные L_2-неравенства Джексона – Черных – Юдина в теории приближений // Изв. Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2012. №3. С.19-28.

[6]Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: ТулГУ, 1995, 192 с.

[7]Попов В.Ю. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. №6. С.65-73.

[8]Арестов В.В., Попов В.Ю. Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Известия вузов. 1995, №8. С.13-20.

[9]Юдин В.А. К теоремам Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1987. Т.41, №1. С.43-47.

С.Б.Вакарчука[10,11,12], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[13,14] и других.

В диссертационной работе установлены окончательные оценки наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами посредством τ-модулей гладкости произвольного порядка и даны их приложения в задаче отыскания точных значений n-поперечников некоторых функциональных классов.

Цель и задачи исследования. Цель работы состоит в нахождении точных верхних граней наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами на классах непрерывно-дифференцируемых функций, определяемых τ-модулями гладкости, и отыскании точных значений различных n-поперечников на указанных классах функций.

Основные методы исследования. В диссертации используются современные методы теории приближения оптимизационного содержания и методы решения экстремальных задач теории функций. Неоднократно используется известная теорема Тихомирова об оценке снизу n-поперечников.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- Найдены точные неравенства типа Джексона – Стечкина между величинами наилучших среднеквадратичных приближений периодических дифференцируемых функций и τ-модулями непрерывности высших порядков r-ых производных функций.
- Найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых τ-модулями непрерывности m-го порядка.
- Вычислены точные значения различных n-поперечников на классах функций, задаваемых усредненными с весом значениями τ-модулей непрерывности высших порядков производных.

---

[10]Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. 2005. Т.78, №5. С.792-796.

[11]Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. 2006. Т.80, №1. С.11-19.

[12]Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. 2012. Т.92, №4. С.497-514.

[13]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

[14]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал, 2011, т.52, №6, с.1414-1427.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться при решении других задач теории приближения, в вопросах кодирования и восстановления функций. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2012-2016 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвящённой 80-летию член-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стаценко Владислава Яковлевича „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложений" (Душанбе, 3-4 июня 2016 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г.)

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 8 работах [1–8]. Из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 4 статьи в трудах международных конференций. Из совместной с научным консультантом М.Ш.Шабозовым работы [2] на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 75 наименований, занимает 82 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации обосновывается актуальность рассматриваемых задач, формулируются цель и основные результаты работы.

В первом параграфе приведена краткая историческая справка о предварительных результатах, имеющих непосредственное отношение к теме диссертационной работы, а также дано описание различных модификаций классического определения модулей непрерывности с целью сравнения полученных результатов с ранее известными. Использование различных модификаций классического модуля непрерывности m-го порядка

$$\omega_m(f;t)_X = \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_X : \quad |h|\le t\Big\}, \tag{1}$$

где

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+(m-k)h)$$

– разность m-го порядка функции $f\in X$, X – произвольное нормированное пространство, продиктовано специфическими условиями рассматриваемых задач, раскрывающих сущность исследуемых проблем. В качестве примера использования разнообразных модификаций модулей непрерывности укажем на известные работы М.К.Потапова и его учеников[15], в которых были использованы вместо оператора сдвига $T_hf(x) := f(x+h)$ различные виды усредняющих операторов. В этой связи также укажем работу В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой[16], где вместо оператора сдвига $T_hf(x)$ используется функция (оператор) Стеклова

$$S_hf(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+t)dt, \ h>0.$$

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных чисел вещественной оси. Через $L_2 := L_2[0,2\pi]$ обозначим

[15] Потапов М.К. О применении одного оператора обобщённого сдвига в теории приближений // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем., мех., 1998, №3, с.38-48.

[16] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки, 2004, т.76, №6, с.803-811.

пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Под $\mathscr{T}_{2n-1}$ понимаем подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$.

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),$$

где $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$, величина её наилучшего приближения элементами $T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\|_2 :\ T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}\Big\} = \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_2 =$$

$$= \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\Big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\Big)\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

где

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f),$$

$$S_{n-1}(f;x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f.

Под $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$) понимаем множество функций $f \in L_2$, у которых производные $f^{(r-1)}$, $r \in \mathbb{N}$, абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)} \in L_2$. При решении экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации функций $f \in L_2$ наиболее актуальным является вопрос отыскания точных констант

$$\chi_{m,n,r}(U_m;t) := \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{U_m(f^{(r)};t/n)_2} :\ f \in L_2^{(r)};\ f \neq const\right\} \tag{2}$$

в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\chi}{n^r}\, U_m(f^{(r)};t/n)_2, \tag{3}$$

где U_m – некоторая характеристика гладкости самой функции f или некоторой её производной $f^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, например $U_m = \omega_m$ или $U_m = \widetilde{\Omega}_m$. Неравенство (3) и определение констант в (2) было объектом многочисленных исследований. В этой связи отметим, например, работы Н.И.Черных[2,17], Л.В.Тайкова[3], А.Г.Бабенко[18], В.В.Жука[19], В.И.Иванова и О.И.Смирнова[6], А.А.Лигуна[4], С.Н.Васильева[20], В.В.Шалаева[21], С.Б.Вакарчука[10,11,12,22,23,24], С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и В.И.Забутной[25], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[14] и многих других.

Для исследования структурных и конструктивных свойств величины наилучшего приближения функций алгебраическими полиномами в пространствах $L_p[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$ и $C[a,b]$ Камен Г. Иванов[26,27] ввёл в рассмотрение новые модификации модулей непрерывности — так называемые τ-модули гладкости, и изучил их свойства и связи с известными дифференциально-разностными характеристиками.

В диссертационной работе мы воспользовались указанными величинами для решения ряда экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации в L_2, развивая и обобщая ранее известные результаты С.Б.Вакарчука[28] для τ-модулей гладкости.

Пусть λ есть произвольная положительная 2π-периодическая функция, а w – непрерывная неотрицательная функция периода 2π.

Определение[26,27]**.** *τ-модулем гладкости m-го порядка функции*

---

[17] Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0,2\pi)$ $(1 \leq p < 2)$ с точной константой // Труды МИРАН, 1992, т.198, с.232-241.

[18] Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки, 1986, т.39, №5, с.651-664.

[19] Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР, 1967, т.201, с.263-266.

[20] Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН, 2002, т.385, №1, с.11-14.

[21] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал, 1991, т.43, №1, с.125-129.

[22] Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Матем. заметки, 1999, т.66, №4, с.494-499.

[23] Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2 approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East Journal on Approx., 2004, v.10, №1-2, pp.27-39.

[24] Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia, 2008, v.14, №4, pp.411-421.

[25] Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences, 2015, v.206, №1, p.97-114.

[26] Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. **I** // Сердика Бълг. Мат. Списание, 1982, т.8, №3, с.262-279.

[27] Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. **II** // Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in $C[-1;1]$ and $L_p[-1;1]$. Сердика Бълг. Мат. Студ., 1983, т.5, с.151-163.

[28] Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Матем. заметки, 2001, т.70, №3, с.334-345.

$f \in L_{\max(p,p')}[0,2\pi]$ $(p,p' \geq 1)$ *называют величину*

$$\tau_m(f,w;\lambda)_{p,p'} = \|w(\cdot)\omega_m(f,\cdot;\lambda(\cdot))_{p'}\|_p\,, \tag{4}$$

где

$$\omega_m(f,x;\lambda(x))_{p'} = \left\{\frac{1}{2\lambda(x)}\int\limits_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} |\Delta_h^m f(x)|^{p'}\,dh\right\}^{1/p'}.$$

Камен Г. Иванов в работе[26], в частности, установил, что если, например, $\lambda(x) \equiv u = const > 0$, $f \in L_p[0,2\pi]$, $w(x) \equiv 1$ и $p' \in [1,p], 1 < p < \infty$, то имеет место соотношение

$$\tau_m(f;1,u)_{p,p'} \asymp \omega_m(f,u)_p,$$

где символом „ $\asymp$ ” обозначают слабую эквивалентность приведённых характеристик гладкости. При изучении экстремальных задач теории аппроксимации функций $f \in L_2$, структурные характеристики которых выражаются τ-модулями гладкости, С.Б.Вакарчук[28] ввёл в рассмотрение следующие экстремальные аппроксимационные величины:

$$\mathscr{K}_{n,r,m}(t)_{p'} := \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\tau_m(f^{(r)};1,t/n)_{p',2}} :\ f \in L_2^{(r)};\ f \neq const\right\},$$

$$\mathscr{K}^*_{n,r,m}(h)_{p'} := \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^2(f^{(r)};1,t)_{p',2}dt\right)^{1/2}} :\ f \in L_2^{(r)}, f \neq const\right\},$$

где $1 \leq p' \leq 2,\ t,h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$.

Во втором параграфе первой главы, в частности, приведено обобщение некоторых результатов С.Б.Вакарчука[28]. Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 1.2.1. *Пусть* $p' = 2,\ 1/r \leq q \leq 2,\ r \in \mathbb{N}$ *и* $h \in [0,\pi/n]$. *Тогда для произвольной функции* $f \in L_2^{(r)}$ *имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,dt\right)^{1/q}}{2^{m/2}\,n^{r-1/q}\left(\int\limits_0^{nh}\left(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2}dt\right)^{1/q}}. \tag{5}$$

Неравенство (5) точно в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, *обращающая его в равенство.*

Из теоремы 1.2.1 вытекает

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^{m/2}\, n^{r-1/q} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^{nh} \left(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2} dt\right)^{-1/q}.$$

В третьем параграфе первой главы с целью выяснения структурных и конструктивных свойств функции $f \in L_2^{(r)}$ посредством τ-модулей гладкости m-го порядка вводится экстремальная аппроксимационная характеристика следующего вида:

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,q}(\tau_m,\varphi;h)_{p'} = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)},1;t)_{p',2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}, \tag{6}$$

где $1 \le p' \le 2,\ 0 < q \le 2,\ h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ и φ – неотрицательная суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0,h]$ функция. Здесь и далее в соотношениях общего характера отношение $0/0$ будем считать равным нулю.

Для вычисления точных значений различных n-поперечников и вычисления точных верхних граней наилучших приближений на классах функций во второй главе определённый интерес представляет отыскание точного значения величины (6).

Имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $m,n \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,\pi/n]$, φ – *неотрицательная суммируемая и не эквивалентная нулю на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\beta_{n,m,r,q}(\varphi;h)} \le \widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi;h)_2 \le \frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty} \beta_{k,m,r,q}(\varphi;h)},$$

где

$$\beta_{k,m,r,q}(\varphi;h) := \left(k^{rq}\int\limits_0^h \left((kt)^{-1}\mathcal{J}_m(kt)\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{1/q}.$$

Отметим, что утверждение теоремы 1.3.1 в определённом смысле является обобщением результата М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[13], на случай оценки наилучшего полиномиального приближения функций $f \in L_2^{(r)}$ посредством модуля непрерывности m-го порядка (1) на случай наилучшего полиномиального приближения функций $f \in L_2^{(r)}$ посредством τ-модулей непрерывности m-го порядка (4).

Из теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *Пусть $k, n, m, r \in \mathbb{N}, k \geq n$; $1/r < q \leq 2$; $\varphi(t) \geq 0$ – суммируемая на $[0, h]$ функция, не эквивалентная нулю, $0 < h \leq \pi/n$. Тогда, если*

$$\inf\Big\{\beta_{k,m,r,q}(\varphi; h) : \ k \geq n\Big\} = \beta_{n,m,r,q}(\varphi; h),$$

то имеет место равенство

$$\widetilde{\mathscr{X}}_{n,m,r,q}(\varphi; h)_2 = \Big\{\beta_{n,m,r,q}(\varphi; h)\Big\}^{-1}. \qquad (7)$$

В частности, равенство (7) выполняется для весовой функции

$$\varphi(t) := \varphi_1(t) = (kt)^{q/2}, \ n \leq k < \infty, \ k, n \in \mathbb{N} \ \text{ при } \ 1/r < q \leq 2, \ r \in \mathbb{N}.$$

Из теоремы 1.3.1 также вытекает следующая

Теорема 1.3.2. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+; k, n \in \mathbb{N}; 0 < q \leq 2; 0 < a \leq \pi$; $g(t) \geq 0$ – суммируемая на отрезке $[0, a]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{1}{\Big\{\mu_{m,r,q}(a; g; 1)\Big\}^{1/q}} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t/n)_{2,2}\, g(t) dt\right)^{1/q}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Big\{\inf\limits_{1 \leq x < \infty} \mu_{m,r,q}(a; g; x)\Big\}^{1/q}},$$

где

$$\mu_{m,r,q}(a; g; x) := x^{rq} \int\limits_0^a \Big((xt)^{-1} \mathcal{J}_m(xt)\Big)^{q/2} g(t) dt.$$

Если при этом функция g такова, что

$$\inf\Big\{\mu_{m,r,q}(a; g; x) : \ 1 \leq x < \infty\Big\} = \mu_{m,r,q}(a; g; 1),$$

то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t/n)_{2,2}\, g(t) dt\right)^{1/q}} = \frac{1}{\Big\{\mu_{m,r,q}(a; g; 1)\Big\}^{1/q}}.$$

В свою очередь из теоремы 1.3.2 вытекает

Следствие 1.3.2. *Пусть* $0 < a \le \pi$; $m, n, r \in \mathbb{N}$. *Если для некоторого* $q \in (0, 2]$ *функция* $g(t) := t^{rq-1} g_1(t)$, *где* $g_1(t) \ge 0$ *– невозрастающая суммируемая на отрезке* $[0, a]$ *функция, не эквивалентная нулю, то выполняется равенство*

$$\inf \left\{ \mu_{m,r,q}(a; t^{rq-1} g_1(t); x) : \ 1 \le x < \infty \right\} = \mu_{m,r,q}(a; t^{rq-1} g_1(t); 1)$$

и справедливо соотношение

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t/n)_{2,2} \, t^{rq-1} g_1(t) dt \right)^{1/q}} = \frac{1}{\left\{ \mu_{m,r,q}(a; t^{rq-1} g_1(t); 1) \right\}^{1/q}}.$$

Приведенные результаты, в силу своей общности, не позволяют точно вычислить значения n-поперечников классов функций, естественно возникающих из определения величины (6). Однако это удается сделать в конкретной ситуации, например в случае $m = 1$ для произвольной неотрицательной суммируемой весовой функции φ, не эквивалентной нулю.

Теорема 1.3.3. *Пусть* $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \le 3\pi/(4n)$, φ *– неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{\sqrt{2}\, n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2} \, \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{q/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}.$$

Хорошо известно, что для функции $f \in L_2^{(r)}$,где $r = 2, 3, ...$, её промежуточные производные $f^{(r-s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$ принадлежат пространству L_2. Представляет интерес отыскание точных верхних граней величины $E_{n-1}(f^{(r-s)})_2$ на классе $L_2^{(r)}$. Подобная задача решалась в работе[29], когда гладкостная характеристика функций $f \in L_2^{(r)}$ задавалась специальным модулем непрерывности m-го порядка $\widetilde{\Omega}_m(f; t)$, конструкция которого основана на m-кратной итерации оператора Стеклова $S_h(f; x)$.

Теорема 1.3.4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$; $s = 1, \ldots, r-1$; $0 < q \le 2$; $0 < h \le 3\pi/(4n)$; $\varphi(t) \ge 0$ *– суммируемая на отрезке* $[0, h]$, *не эквивалент-*

[29] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки, 2012, т.92, №4, с.497-514.

ная нулю функция. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}\,n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}.$$

Пусть $n\in\mathbb{N};\ r\in\mathbb{N}\backslash\{1\};\ s=1,\ldots,r-1;\ q=2;\ 0<h\leq 3\pi/(4n)$ *и* $\varphi(t)\equiv 1$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^2(f^{(r)};1,t)_{2,2}dt\right)^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2},$$

где $Si(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ *– интегральный синус.*

Если же $n\in\mathbb{N};\ r\in\mathbb{N}\backslash\{1\};\ s=1,\ldots,r-1;\ q=2;\ 0<h\leq 3\pi/(4n)$ *и* $\varphi(t)\equiv t$, *то справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h t\tau_1^2(f^{(r)};1,t)_{2,2}dt\right)^{1/2}} = \frac{1}{h\sqrt{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2}}.$$

Во второй главе диссертационной работы рассматривается экстремальная задача вычисления точных значений n-поперечников различных классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых τ-модулями гладкости m-го порядка своих r-тых производных $f^{(r)}$. Необходимые определения и обозначения, которыми воспользуемся при вычислении различных n-поперечников заданных классов функций, излагаются в первом параграфе второй главы: пусть $\mathfrak{M}\subset L_2$ – некоторый класс функций и пусть $\mathcal{L}_n\subset L_2$ – некоторое подпространство заданной размерности n. Величину

$$E(\mathfrak{M},\mathcal{L}_n)_{L_2} = \sup\Big\{E(f;\mathcal{L}_n)_{L_2}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} = \\ = \sup\Big\{\inf\Big\{\|f-g\|_2:\ g\in\mathcal{L}_n\Big\}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} \qquad (8)$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством $\mathcal{L}_n$ размерности n. Величина (8) характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства $\mathcal{L}_n$ в метрике пространства L_2. Если обозначить через $\mathcal{A}(L_2,\mathcal{L}_n)$

— множество всех линейных непрерывных операторов $A : L_2 \to \mathcal{L}_n$, действующих из L_2 в произвольно заданное подпространство $\mathcal{L}_n \subset L_2$ размерности n, то возникает следующая задача: требуется найти величину

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} = \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_2 : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \in \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)\Big\} \qquad (9)$$

и указать линейный оператор $A_* \subset \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$, реализующий точную нижнюю грань в правой части соотношения (9), то есть

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} = \sup\Big\{\Big\|f - A_*f\Big\|_2 : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Если же в $\mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$ выделить класс $\mathcal{A}^{\perp}(L_2, \mathcal{L}_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство $\mathcal{L}_n$, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in \mathcal{L}_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} = \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_2 : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{A}^{\perp}(L_2, \mathcal{L}_n)\Big\}. \qquad (10)$$

С величинами (8)−(10) связана задача отыскания значения n-поперечников для различных классов функций $\mathfrak{M}$. Напомним определения n-поперечников, значения которых для конкретных классов $\mathfrak{M}$ вычислим в этой главе.

n-поперечником в смысле А.Н.Колмогорова класса функций $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2 называют величину

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} : \ \mathcal{L}_n \subset L_2\Big\}, \qquad (11)$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам заданной размерности n из пространства L_2. Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2}$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} : \ \mathcal{L}_n \subset L_2\Big\} \qquad (12)$$

называют линейным n-поперечником класса $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2.

Аналогичным образом, взяв за основу величину (10), вводят в рассмотрение проекционный n-поперечник

$$\pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} : \ \mathcal{L}_n \subset L_2\Big\}. \qquad (13)$$

Существуют ещё две величины, известные в теории приближений под названиями n-поперечник по Гельфанду и n-поперечник по Бернштейну.

Пусть S – единичный шар в пространстве L_2, то есть

$$S = \{x \in L_2, \ \|x\|_2 \le 1\}.$$

Величину

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}^n \subset \varepsilon S: \ \varepsilon > 0\Big\}: \ \mathcal{L}^n \subset L_2\Big\}, \tag{14}$$

где внешний инфимум берётся по всем подпространствам $\mathcal{L}^n$ коразмерности n, называют n-поперечником по Гельфанду, а величину

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M}: \ \varepsilon > 0\Big\}: \ \mathcal{L}_{n+1} \subset L_2\Big\} \tag{15}$$

называют n-поперечником по Бернштейну.

Хорошо известно, что в гильбертовом пространстве L_2 между величинами (11)$-$(15) выполняются следующие соотношения[30,31]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \le d^n(\mathfrak{M}; L_2) \le d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}; L_2).$$

Исходя из полученных в первой главе результатов, связанных с характеристикой гладкости $\tau_m(f; 1, u)_{p,p'}$, определим следующие классы функций.

Через $W_q^{(r)}(\tau_m; h)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $r, m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ и $1/r < q \le 2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2}\, dt \le 1.$$

Символом $W_q^{(r)}(\tau_1; \varphi, h)$, где $1/r < q \le 2$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ и произвольной неотрицательной суммируемой на отрезке $(0, h]$ функции φ выполняется ограничение

$$\frac{1}{h}\int_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, u)_{2,2}\, \varphi(u) du \le 1.$$

Через $W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \le 2$, $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ выполняется условие

$$\frac{1}{h}\int_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, u)_{2,2}\, du \le \Phi^q(h),$$

где $\Phi(h)$ – неотрицательная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$.

Основным результатом второго параграфа второй главы является следующее утверждение.

[30]Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985, 252 p.

[31]Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 325 с.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $r, m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ *и* $1/r < q \leq 2$. *Тогда при любых* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2) = \lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2) = E(W_q^{(r)}(\tau_m;h),\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2} =$$

$$= 2^{-m/2}n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1/q},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ *или* $\pi_n(\cdot)$.

Следствие 2.2.1. *При выполнении условий теоремы 2.2.1 справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;h);L_2) = \lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;h);L_2) = E(W_q^{(r)}(\tau_1;h),\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2} =$$

$$= 2^{-1/2}n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right)^{-1/q}.$$

В частности, при $q = 2$ *имеем*

$$\lambda_{2n}(W_2^{(r)}(\tau_1;h);L_2) = \lambda_{2n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1;h);L_2) = E(W_2^{(r)}(\tau_1;h),\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2} =$$

$$= n^{-r}\left(\frac{nh}{2(nh - Si(nh))}\right)^{1/2}, \quad 0 < nh \leq \pi. \tag{16}$$

Отметим, что равенства (16) в определённом смысле являются обобщением одного результата Л.В.Тайкова[3] о наилучшем полиномиальном приближении периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0,2\pi]$, структурные свойства которых характеризуются усреднёнными значениями модулей непрерывности первого порядка их r-ых производных $f^{(r)} \in L_2$.

В третьем параграфе второй главы вычислены точные значения всех перечисленных выше n-поперечников классов функций, определяемых усреднёнными значениями τ-модуля гладкости и произвольной неотрицательной не эквивалентной нулю весовой функции. Из полученных общих результатов выведены некоторые следствия для конкретных весовых функций, а также вычислены точные верхние грани модулей абсолютных значений коэффициентов Фурье на указанных классах функций.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \leq 2$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$. *Тогда при любом* $n \in \mathbb{N}$ *выполняются равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h),\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} = 2^{-1/2}n^{-r}\left\{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/q},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ или $\pi_n(\cdot)$.

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы 2.3.1 при $q = 2$ и $\varphi(t) \equiv 1$ справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;1,h);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;1,h);L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;1,h),\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} = n^{-r}\left\{\frac{nh}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}.$$

Следствие 2.3.2. *В условиях теоремы 2.3.1 при $q = 2$, $\varphi(t) = t$ имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,h);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,h);L_2\Big) = E\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,h),\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} =$$

$$= \frac{1}{n^r h}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2},\ 0 < nh \le \pi.$$

В частности, при $nh = \pi$ имеем:

$$\lambda_{2n}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,\pi/n);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,\pi/n);L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,\pi/n);\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2-4}}\cdot\frac{1}{n^{r-1}},\ r\in\mathbb{N}.$$

В 1910 году Лебегом в терминах модулей непрерывности первого порядка $\omega(f;\delta)$ впервые были получены оценки скорости сходимости к нулю коэффициентов Фурье функции $f \in \mathbb{C}[0,2\pi]$. Эти оценки уточняли известные результаты Римана о скорости сходимости к нулю коэффициентов Фурье при $n \to \infty$. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций в разное время рассматривались, например, А.В.Ефимовым, А.Ф.Тиманом, Н.П.Корнейчуком, В.И.Бердышевым, С.Милорадовичем, С.А.Теляковским, А.И.Степанцом. Аналогичные вопросы для некоторых классов дифференцируемых функций рассмотрены М.Ш.Шабозовым и С.Б.Вакарчуком[32] и многими другими математиками.

[32]Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica, 2012, tomus 38, №2, pp.154-165.

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащих пространству L_2, то требуется найти величину

$$V_n(\mathfrak{M}) = \sup\Big\{ |a_n(f)|,\, |b_n(f)| : \ f \in \mathfrak{M} \Big\},$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Из теоремы 2.3.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.3.2. *Если выполнены условия теоремы 2.3.1, то справедливы равенства*

$$V_n\left(W_q^{(r)}(\tau_1; 1, h)\right) = 2^{-1/2}\, n^{-r+1/2} \left\{ \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right\}^{-1/q}.$$

В частности, при $q = 2$ имеем

$$V_n\left(W_2^{(r)}(\tau_1; 1, \pi/n)\right) = n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \right\}^{1/2}.$$

Параграф завершается следующим утверждением.

Теорема 2.3.3. *Если выполнены условия теоремы 2.3.1, то при $q = 2$ и $\varphi(t) = t$ имеют место равенства*

$$V_n\left(W_2^{(r)}(\tau_1; t, h)\right) = \frac{1}{n^r h} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \ 0 < nh \le \pi.$$

В частности, при $nh = \pi$ выполняются равенства

$$V_n\left(W_2^{(r)}(\tau_1; t, \pi/n)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \cdot \frac{1}{n^{r-1}}, \ r \in \mathbb{N}$$

В четвёртом параграфе вычислены точные значения n-поперечников класса $W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi)$. Следуя работе[14], полагая при $t = 0$ значение функции $\dfrac{\sin t}{t}$ равным 1, через t_* обозначим значение её аргумента, при котором эта функция достигает на полусегменте $[0, \infty)$ своего наименьшего значения. При этом t_* $(4,49 < t_* < 4,51)$ есть минимальный положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$. Положим

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin t}{t}, & \text{если } \ 0 \le t \le t_*, \\[2ex] 1 - \dfrac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если } \ t_* \le t < \infty. \end{cases}$$

В этих обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.1. *Пусть $1/r < q \le 2; m, n \in \mathbb{N}; r \in \mathbb{Z}_+$. Если мажоранта Φ при любых $h \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi^q(h)}{\Phi^q(\pi/n)} \geq \frac{\pi}{nh}\left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{q/2}dt\right)\left(\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right)^{-1}, \qquad (17)$$

то имеют место равенства

$$\lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2) = \lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2) =$$

$$= E(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2} = \frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}n^r}\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (17), не пусто.

Из теоремы 2.4.1 вытекает следующее

Следствие 2.4.1. *При выполнении условий теоремы (2.4.1) имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2) = \lambda_{2n}(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2) =$$

$$= E(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(\pi - Si(\pi))}}\cdot\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

В связи с утверждением теоремы 2.4.1 определённый интерес представляет изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(r-s)})_{L_2}$, где $s = 1,\ldots,r-1; r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ на классе функций $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$.

Теорема 2.4.2. *Пусть $q = 2$, $r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ Если функция Φ при любом $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^2 \geq \frac{\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*dt}{nh\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)},$$

то для $s = 1,\ldots,r-1$ справедливы равенства

$$\sup\Big\{E_{n-1}(f^{(r-s)})_2:\ f \in W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi)\Big\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(\pi - Si(\pi))}}\cdot\frac{1}{n^s}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- Найдены точные неравенства типа Джексона – Стечкина между величинами наилучших среднеквадратичных приближений периодических дифференцируемых функций и τ-модулями непрерывности высших порядков r-ых производных функций.
- Найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых τ-модулями непрерывности m-го порядка.
- Вычислены точные значения различных n-поперечников на классах функций, задаваемых усредненными с весом значениями τ-модулей непрерывности высших порядков производных.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с оптимизацией точных констант в неравенстве Джексона-Стечкина для других модификаций модулей непрерывности с тем, чтобы иметь возможность выявить наименьшую константу Джексона-Стечкина среди различных неравенств указанного типа. Кроме того, это даёт возможность выбора конкретной модификации модуля непрерывности при определении функциональных классов в задаче отыскания точных значений n-поперечников, исходя из содержательной сущности исследуемых задач.

Благодарности

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям, академику АН РТ М.Ш.Шабозову и профессору С.Б.Вакарчуку, за постановку задач и постоянное внимание при работе над диссертацией.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

1. Олифтаев, Н.Ф. О значениях поперечников некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 [Текст] / Н.Ф. Олифтаев // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2013, №1(150), с.21-31.
2. Олифтаев, Н.Ф. Наилучшие приближения и точные значения поперечников некоторых классов периодических функций в L_2 [Текст] / М.Ш. Шабозов, Н.Ф. Олифтаев // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2013, №4(153), с.23-31.
3. Олифтаев, Н.Ф. Неравенства Джексона для τ-модулей гладкости и значения поперечников в L_2 [Текст] / Н.Ф. Олифтаев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2015, т.58, №12, с.1071–1077.
4. Олифтаев, Н.Ф. Точные неравенства Джексона-Стечкина в терминах обобщённых модулей непрерывности [Текст] / Н.Ф. Олифтаев // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г., с.191-194).

В других изданиях:

5. Олифтаев, Н.Ф. О наилучших приближениях периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 [Текст] / Н.Ф. Олифтаев // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г., с.194-198).
6. Олифтаев, Н.Ф. О наилучшем приближении периодических функций в пространстве L_2 [Текст] / Н.Ф. Олифтаев // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 2014, №2(150), с.62-67).

7. Олифтаев, Н.Ф. Об одной экстремальной аппроксимационной характеристике для периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 [Текст] / Н.Ф. Олифтаев // Материалы международной научной конференции, посвящённой 80-летию член-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стаценко Владислава Яковлевича „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г., с.34-36)
8. Олифтаев, Н.Ф. Наилучшие приближения и точные значения поперечников периодических функций в L_2 [Текст] / Н.Ф. Олифтаев // Материалы международной научной конференции, посвящённой 25-летию Государственной независимости Республики Таджикистан „Современные проблемы математики и её приложений" (Душанбе, 3-4 июня 2016 г., с.81-85)