Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский государственный университет коммерции

На правах рукописи

Олифтаев Нодир Фезилобекович

НЕРАВЕНСТВА ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА ДЛЯ τ-МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ В L_2

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
академик АН Республики Таджикистан,
профессор М.Ш.Шабозов,

доктор физико-математических наук,
профессор С.Б.Вакарчук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 6

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одной из наиболее важных задач теории приближения функций является задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина. Под неравенствами типа Джексона – Стечкина в широком смысле понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения конечномерным подпространством оценивается через некоторую ее характеристику гладкости. В качестве характеристики гладкости функции, как правило, рассматривают либо модуль непрерывности, либо различные модификации классического определения модуля непрерывности.

В диссертационной работе установлены окончательные оценки наилучших приближений тригонометрическими полиномами посредством τ-модулей гладкости произвольного порядка и даны их приложения в задаче отыскания точных значений n-поперечников некоторых функциональных классов.

Цель работы

Цель работы состоит в нахождении точных верхних граней наилучших приближений тригонометрическими полиномами на классах непрерывно-дифференцируемых функций, определяемых τ-модулями гладкости, и отыскании точных значений различных n-поперечников на указанных классов функций.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Найдены точные неравенства типа Джексона – Стечкина между величинами наилучших среднеквадратичных приближений периодических дифференцируемых функций и τ-модулями непрерывности высших порядков r-ых производных функций.
- Найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближе-

ний некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых τ-модулями непрерывности m-го порядка.

- Вычислены точные значения различных n-поперечников на классах функций, задаваемых усредненными с весом значениями τ-модулей непрерывности высших порядков производных.

Основные методы исследования

В диссертации используются современные методы теории приближения оптимизационного содержания и методы решения экстремальных задач теории функций. Неоднократно используется хорошо известная теорема Тихомирова об оценке снизу n-поперечников.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться при решении других задач теории приближения, в вопросах кодирования и восстановления функций. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2012-2016 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвящённой 80-летию член-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-

математических наук, профессора Стаценко Владислава Яковлевича „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений” (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);

- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложений” (Душанбе, 3-4 июня 2016 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г.)

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 8 работах [68–75]. Из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 4 статьи в трудах международных конференций. Из совместной с научным консультантом М.Ш.Шабозовым работы [69] на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 75 наименований, занимает 82 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации обосновывается актуальность рассматриваемых задач, формулируются цель и основные результаты работы.

В первом параграфе приведена краткая историческая справка о предварительных результатах, имеющих непосредственное отношение к теме диссертационной работы, а также дано описание различных модификаций классического определения модулей непрерывности с целью сравнения полученных результатов с ранее известными. Использование различных модификаций классического модуля непрерывности m-го порядка

$$\omega_m(f;t)_X = \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_X : \quad |h|\le t\Big\}, \tag{0.0.1}$$

где

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(x+(m-k)h)$$

– разность m-го порядка функции $f\in X$, X – произвольное нормированное пространство, продиктовано специфическими условиями рассматриваемых задач, раскрывающих сущность исследуемых проблем. В качестве примера использования разнообразных модификаций модулей непрерывности укажем на известные работы М.К.Потапова и его учеников [39–42], в которых были использованы вместо оператора сдвига $T_hf(x) := f(x+h)$ различные виды усредняющих операторов. В этой связи также укажем работу В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [1], где вместо оператора сдвига $T_hf(x)$ используется функция (оператор) Стеклова

$$S_hf(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt,\ h>0.$$

Согласно [1] для произвольной функции $f\in X$ конечные разности определим следующим образом:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f;x) = S_hf(x) - f(x) = (S_h - E)f(x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f;x) = \widetilde{\Delta}_h\left(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f;x);x\right) =$$

$$= (S_h-E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}S_h^kf(x),\quad m=2,3,...,$$

где

$$S_h^0f(x) = f(x),\ S_h^kf(x) = S_h\left(S_h^{k-1}f(x)\right),\ k=\overline{1,m},\ m\in\mathbb{N},$$

E – единичный оператор в пространстве X.

Наряду с величиной (0.0.1), модулем непрерывности m-го порядка функции $f\in X$ также называют величину

$$\widetilde{\Omega}_m(f;t) = \sup\left\{\left\|\widetilde{\Delta}_h^m(f;\cdot)\right\|_X :\ |h|\le t\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}S_h^k f(\cdot)\right\|_X :\ 0<h\le t\right\}. \tag{0.0.2}$$

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных чисел вещественной оси. Через $L_2 := L_2[0,2\pi]$ обозначим пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Под $\mathscr{T}_{2n-1}$ понимаем подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$.

Хорошо известно, что для произвольной функции $f\in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx), \tag{0.0.3}$$

где $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f\in L_2$, величина её наилучшего приближения элементами $T_{n-1}\in\mathscr{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\Big\{\|f-T_{n-1}\|_2 :\ T_{n-1}\in\mathscr{T}_{2n-1}\Big\} = \|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_2 =$$

$$= \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\Big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\Big)\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \tag{0.0.4}$$

где

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f)+b_k^2(f),$$

$$S_{n-1}(f;x) := \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)$$

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f.

Под $L_2^{(r)}$ ($r\in\mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)}=L_2$) понимаем множество функций $f\in L_2$, у которых производные $f^{(r-1)}$, $r\in\mathbb{N}$, абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)}\in L_2$.

При решении экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации функций $f \in L_2$ наиболее актуальным является вопрос отыскания точных констант

$$\chi_{m,n,r}(U_m;t) := \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{U_m(f^{(r)};t/n)_2}:\ f\in L_2^{(r)};\ f\neq const\right\} \qquad (0.0.5)$$

в неравенствах типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\chi}{n^r}U_m(f^{(r)};t/n)_2, \qquad (0.0.6)$$

где U_m – некоторая характеристика гладкости самой функции f или некоторой её производной $f^{(r)}, r \in \mathbb{N}$, например $U_m = \omega_m$ или $U_m = \widetilde{\Omega}_m$. Неравенство (0.0.6) и определение констант в (0.0.5) было объектом многочисленных исследований. В этой связи отметим, например, работы Н.И.Черных [55–57], Л.В.Тайкова [46–48], Н.Айнуллоева [2,3], А.Г.Бабенко [4–6], В.В.Жука [22–24], Х.Юссефа [67], В.И.Иванова и О.И.Смирнова [25], А.А.Лигуна [32–34], С.Н.Васильева [20], В.В.Шалаева [66], С.Б.Вакарчука [9–17], С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и В.И.Забутной [18, 19], М.Ш.Шабозова [58, 59], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [60–62], М.Ш.Шабозова и С.Б.Вакарчука [63] и многих других математиков (см., например, более полную библиографию в работах [17–19] и [60–63]).

Для исследования структурных и конструктивных свойств величины наилучшего приближения функций алгебраическими полиномами в пространствах $L_p[a, b]$ $(1 \leq p < \infty)$ и $C[a, b]$ Камен Г. Иванов [26, 27] ввёл в рассмотрение новые модификации модулей непрерывности — так называемые τ-модули гладкости, и изучил их свойства и связи с известными дифференциально-разностными характеристиками.

В диссертационной работе мы воспользуемся указанными величинами для решения ряда экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации в L_2, развивая и обобщая ранее известные результаты С.Б.Вакарчука [10] для τ-модулей гладкости.

Пусть λ есть произвольная положительная 2π-периодическая функция, а w – непрерывная неотрицательная функция периода 2π.

Определение [26,27]. *τ-модулем гладкости m-го порядка функции $f \in L_{\max(p,p')}[0,2\pi]$ $(p,p' \geq 1)$ называют величину*

$$\tau_m(f,w;\lambda)_{p,p'} = \|w(\cdot)\omega_m(f,\cdot;\lambda(\cdot))_{p'}\|_p\,, \qquad (0.0.7)$$

где

$$\omega_m(f,x;\lambda(x))_{p'} = \left\{\frac{1}{2\lambda(x)}\int\limits_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} |\Delta_h^m f(x)|^{p'}\,dh\right\}^{1/p'}.$$

Камен Г. Иванов в работе [26], в частности, установил, что если, например, $\lambda(x) \equiv u = const > 0$, $f \in L_p[0,2\pi]$, $w(x) \equiv 1$ и $p' \in [1,p], 1 < p < \infty$, то имеет место соотношение

$$\tau_m(f;1,u)_{p,p'} \asymp \omega_m(f,u)_p,$$

где символом „ $\asymp$ ” обозначают слабую эквивалентность приведённых характеристик гладкости. При изучении экстремальных задач теории аппроксимации функций $f \in L_2$, структурные характеристики которых выражаются τ-модулями гладкости, С.Б.Вакарчук ввёл в рассмотрение следующие экстремальные аппроксимационные величины:

$$\mathscr{K}_{n,r,m}(t)_{p'} := \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\tau_m(f^{(r)};1,t/n)_{p',2}} :\ f \in L_2^{(r)};\ f \neq const\right\}, \qquad (0.0.8)$$

$$\mathscr{K}^*_{n,r,m}(h)_{p'} :=$$

$$:= \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^2(f^{(r)};1,t)_{p',2}dt\right)^{1/2}} :\ f \in L_2^{(r)}, f \neq const\right\}, \qquad (0.0.9)$$

где $1 \leq p' \leq 2,\ t,h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$.

Следующие две теоремы принадлежат С.Б.Вакарчуку [10].

Теорема A. *Для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < t \leq \pi$ справедливо равенство*

$$\mathscr{K}_{n,r,m}(t)_2 = \left\{ \frac{t}{2^m \mathcal{J}_m(t)} \right\}^{1/2}, \tag{0.0.10}$$

где

$$\mathcal{J}_m(v) := \int\limits_0^v (1 - \cos\tau)^m d\tau. \tag{0.0.11}$$

Теорема B. *При любых $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и любой $h \in (0, \pi/n]$ выполнено следующее равенство*

$$\mathscr{K}^*_{n,r,m}(h)_2 = \left(\int\limits_0^h (nu)^{-1} \mathcal{J}_m(nu) du \right)^{-1/2}. \tag{0.0.12}$$

Эти теоремы являются отправным пунктом для нашего дальнейшего исследования в последующих параграфах.

Во втором параграфе первой главы, в частности, приведено обобщение результата теоремы B как следствие более общего утверждения. С этой целью докажем точное неравенство Джексона – Стечкина между величиной наилучшего приближения тригонометрическими полиномами гладкой функции из $L_2^{(r)}$ и L_q-нормой τ-модули гладкости m-го порядка её r-й производной.

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 1.2.1. *Пусть $p' = 2$, $1/r \leq q \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$ и $h \in [0, \pi/n]$. Тогда для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2}\, dt \right)^{1/q}}{2^{m/2}\, n^{r-1/q} \left(\int\limits_0^{nh} \left(t^{-1} \mathcal{J}_m(t) \right)^{q/2} dt \right)^{1/q}}. \tag{0.0.13}$$

Неравенство (0.0.13) точно в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, обращающая его в равенство.

Из теоремы 1.2.1 вытекает

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{2^{m/2}\,n^{r-1/q}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\tau_m^q(f^{(r)},1;t)_{2,2}\,dt\right)^{1/q}}=\left(\int\limits_0^{nh}\left(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2}dt\right)^{-1/q}. \qquad (0.0.14)$$

Замечание. Из равенства (0.0.14), в частности, при $q=2$ получаем утверждение теоремы B в виде равенства (0.0.12).

В третьем параграфе первой главы с целью выяснения структурных и конструктивных свойств функции $f\in L_2^{(r)}$ посредством τ-модулей гладкости m-го порядка вводится экстремальная аппроксимационная характеристика следующего вида:

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,q}(\tau_m,\varphi;h)_{p'}=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\tau_m^q(f^{(r)},1;t)_{p',2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}, \qquad (0.0.15)$$

где $1\le p'\le 2,\ 0<q\le 2,\ h\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ и φ – неотрицательная суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0,h]$ функция. Здесь и далее в соотношениях общего характера отношение $0/0$ будем считать равным нулю.

Для вычисления точных значений различных n-поперечников и вычисления точных верхних граней наилучших приближений на классах функций во второй главе определённый интерес представляет отыскание точного значения величины (0.0.15).

Имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ 0<q\le 2,\ r\in\mathbb{Z}_+,\ h\in(0,\pi/n],\ \varphi$ – *неотрицательная суммируемая и не эквивалентная нулю на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\beta_{n,m,r,q}(\varphi;h)}\le\widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi;h)_2\le\frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty}\beta_{k,m,r,q}(\varphi;h)}, \qquad (0.0.16)$$

где

$$\beta_{k,m,r,q}(\varphi;h):=\left(k^{rq}\int\limits_0^h\left((kt)^{-1}\mathcal{J}_m(kt)\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{1/q}. \qquad (0.0.17)$$

Отметим, что утверждение теоремы 1.3.1 в определённом смысле является обобщением результата М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [60], на случай оценки наилучшего полиномиального приближения функций $f \in L_2^{(r)}$ посредством модуля непрерывности m-го порядка (0.0.1) на случай наилучшего полиномиального приближения функций $f \in L_2^{(r)}$ посредством τ-модулей непрерывности m-го порядка (0.0.7).

Из теоремы 1.3.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1.3.1. *Пусть $k, n, m, r \in \mathbb{N}, k \geq n$; $1/r < q \leq 2$; $\varphi(t) \geq 0$ – суммируемая на $[0, h]$ функция, не эквивалентная нулю, $0 < h \leq \pi/n$. Тогда, если*

$$\inf\left\{\beta_{k,m,r,q}(\varphi; h) : \ k \geq n\right\} = \beta_{n,m,r,q}(\varphi; h), \tag{0.0.18}$$

то имеет место равенство

$$\widetilde{\mathscr{X}}_{n,m,r,q}(\varphi; h)_2 = \left\{\beta_{n,m,r,q}(\varphi; h)\right\}^{-1}. \tag{0.0.19}$$

В частности, равенство (0.0.19) выполняется для весовой функции

$$\varphi(t) := \varphi_1(t) = (kt)^{q/2}, \ n \leq k < \infty, \ k, n \in \mathbb{N} \ \ \textit{при} \ \ 1/r < q \leq 2, \ r \in \mathbb{N}.$$

Из теоремы 1.3.1 вытекает следующая

Теорема 1.3.2. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+; k, n \in \mathbb{N}; 0 < q \leq 2; 0 < a \leq \pi$; $g(t) \geq 0$ – суммируемая на отрезке $[0, a]$ функция, не эквивалентная нулю. Тогда имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{1}{\left\{\mu_{m,r,q}(a; g; 1)\right\}^{1/q}} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t/n)_{2,2}\, g(t) dt\right)^{1/q}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\left\{\inf\limits_{1 \leq x < \infty} \mu_{m,r,q}(a; g; x)\right\}^{1/q}},$$

где

$$\mu_{m,r,q}(a; g; x) := x^{rq} \int\limits_0^a \left((xt)^{-1} \mathcal{J}_m(xt)\right)^{q/2} g(t) dt.$$

Если при этом функция g такова, что

$$\inf\Big\{\mu_{m,r,q}(a;g;x):\ 1\le x<\infty\Big\}=\mu_{m,r,q}(a;g;1),$$

то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a\tau_m^q(f^{(r)};1,t/n)_{2,2}\,g(t)dt\right)^{1/q}}=\frac{1}{\Big\{\mu_{m,r,q}(a;g;1)\Big\}^{1/q}}. \tag{0.0.20}$$

В свою очередь из теоремы 1.3.2 вытекает

Следствие 1.3.2. *Пусть* $0<a\le\pi$; $m,n,r\in\mathbb{N}$. *Если для некоторого* $q\in(0,2]$ *функция* $g(t):=t^{rq-1}g_1(t)$, *где* $g_1(t)\ge 0$ *– невозрастающая суммируемая на отрезке* $[0,a]$ *и не эквивалентная нулю функция, то выполняется равенство*

$$\inf\Big\{\mu_{m,r,q}(a;t^{rq-1}g_1(t);x):\ 1\le x<\infty\Big\}=\mu_{m,r,q}(a;t^{rq-1}g_1(t);1) \tag{0.0.21}$$

и справедливо соотношение

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a\tau_m^q(f^{(r)};1,t/n)_{2,2}\,t^{rq-1}g_1(t)dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\frac{1}{\Big\{\mu_{m,r,q}(a;t^{rq-1}g_1(t);1)\Big\}^{1/q}}. \tag{0.0.22}$$

Приведенные результаты, в силу своей общности, не позволяют точно вычислить значения n-поперечников классов функций, естественно возникающих из определения величины (0.0.15). Однако это удается сделать в конкретной ситуации, например в случае $m=1$ для произвольной неотрицательной суммируемой весовой функции φ, которая не эквивалентной нулю.

Теорема 1.3.3. *Пусть* $m=1$, $n\in\mathbb{N}$, $0<q\le 2$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<h\le 3\pi/(4n)$, φ *– неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,h]$ *не эквива-*

лентная нулю функция. Тогда имеет место равенство

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{n,1,r,q}(\varphi;h)_2 = \left(n^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (0.0.23)$$

Равенство (0.0.23) перепишем в эквивалентном виде

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{\sqrt{2}\,n^rE_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (0.0.24)$$

Хорошо известно, что для функции $f\in L_2^{(r)}$, где $r=2,3,...$, её промежуточные производные $f^{(r-s)}$ $(s=1,2,\ldots,r-1)$ принадлежат пространству L_2. Представляет интерес отыскание точных верхних граней величины $E_{n-1}(f^{(r-s)})_2$ на классе $L_2^{(r)}$. Подобная задача решалась в работе [17], когда гладкостная характеристика функций $f\in L_2^{(r)}$ задавалась специальным модулем непрерывности m-го порядка $\widetilde{\Omega}_m(f;t)$, конструкция которого основана на m-кратной итерации оператора Стеклова

$$S_h(f;x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}f(x+t)dt.$$

В рассматриваемом нами случае доказательство нижеследующего утверждения основано на использовании экстремального равенства (0.0.24) и следующего неравенства типа Колмогорова

$$E_{n-1}(f^{(r-s)})_2\le E_{n-1}(f)_2^{s/r}E_{n-1}(f^{(r)})_2^{1-s/r},$$

верного при всех $s=1,2,\ldots,r$.

Теорема 1.3.4. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$; $s=1,2,\ldots,r-1$; $0<q\le 2$; $0<h\le 3\pi/(4n)$; $\varphi(t)\ge 0$ – *суммируемая на отрезке* $[0,h]$, *не*

эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{\sqrt{2}\,n^sE_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (0.0.25)$$

Пусть $n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$; $s=1,2,\ldots,r-1$; $q=2$; $0<h\leq 3\pi/(4n)$ *и* $\varphi(t)\equiv 1$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^sE_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^2(f^{(r)};1,t)_{2,2}dt\right)^{1/2}}=\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}, \qquad (0.0.26)$$

где $Si(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ – *интегральный синус.*

Если же $n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$; $s=1,2,\ldots,r-1$; $q=2$; $0<h\leq 3\pi/(4n)$ *и* $\varphi(t)\equiv t$, *то справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^sE_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h t\tau_1^2(f^{(r)};1,t)_{2,2}dt\right)^{1/2}}=\frac{1}{h\sqrt{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2}}. \qquad (0.0.27)$$

Во второй главе диссертационной работы рассматривается экстремальная задача вычисления точных значений n-поперечников различных классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых τ-модулями гладкости m-го порядка своих r-тых производных $f^{(r)}$. Необходимые определения и обозначения, которыми воспользуемся при вычислении различных n-поперечников заданных классов функций, излагаются в первом параграфе второй главы: пусть $\mathfrak{M}\subset L_2$ – некоторый класс функций и пусть $\mathcal{L}_n\subset L_2$ – некоторое подпространство заданной размерности n. Величину

$$E(\mathfrak{M},\mathcal{L}_n)_{L_2}=\sup\Big\{E(f;\mathcal{L}_n)_{L_2}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}=$$

$$=\sup\Big\{\inf\Big\{\|f-g\|_2:\ g\in\mathcal{L}_n\Big\}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} \tag{0.0.28}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством $\mathcal{L}_n$ размерности n. Величина (0.0.28) характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства $\mathcal{L}_n$ в метрике пространства L_2. Если обозначить через $\mathcal{A}(L_2,\mathcal{L}_n)$ – множество всех линейных непрерывных операторов $A:L_2\to\mathcal{L}_n$, действующих из L_2 в произвольно заданное подпространство $\mathcal{L}_n\subset L_2$ размерности n, то возникает следующая задача: требуется найти величину

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M},\mathcal{L}_n)_{L_2}=\inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f-Af\Big\|_2:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}:A\in\mathcal{A}(L_2,\mathcal{L}_n)\Big\} \tag{0.0.29}$$

и указать линейный оператор $A_*\subset\mathcal{A}(L_2,\mathcal{L}_n)$, реализующий точную нижнюю грань в правой части соотношения (0.0.29), то есть

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M},\mathcal{L}_n)_{L_2}=\sup\Big\{\Big\|f-A_*f\Big\|_2:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}.$$

Если же в $\mathcal{A}(L_2,\mathcal{L}_n)$ выделить класс $\mathcal{A}^{\perp}(L_2,\mathcal{L}_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство $\mathcal{L}_n$, то есть таких, что $Af=f$ при условии $f\in\mathcal{L}_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M},\mathcal{L}_n)_{L_2}=$$

$$=\inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f-Af\Big\|_2:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}:A\subset\mathcal{A}^{\perp}(L_2,\mathcal{L}_n)\Big\}. \tag{0.0.30}$$

С величинами (0.0.28) – (0.0.30) связана задача отыскания значения n-поперечников для различных классов функций $\mathfrak{M}$. Напомним определения n-поперечников, значения которых для конкретных классов $\mathfrak{M}$ вычислим в этой главе.

n-поперечником в смысле А.Н.Колмогорова [28] класса функций $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2 называют величину

$$d_n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\Big\{E(\mathfrak{M},\mathcal{L}_n)_{L_2}:\ \mathcal{L}_n\subset L_2\Big\}, \tag{0.0.31}$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам заданной размерности n из пространства L_2. Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}(\mathfrak{M},\mathcal{L}_n)_{L_2}$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\Big\{\mathcal{E}(\mathfrak{M},\mathcal{L}_n)_{L_2}:\ \mathcal{L}_n\subset L_2\Big\} \tag{0.0.32}$$

называют линейным n-поперечником класса $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2.

Аналогичным образом, взяв за основу величину (0.0.30), вводят в рассмотрение проекционный n-поперечник

$$\pi_n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\Big\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M},\mathcal{L}_n)_{L_2}:\ \mathcal{L}_n\subset L_2\Big\}. \tag{0.0.33}$$

Существуют ещё две величины, известные в теории приближений под названиями n-поперечник по Гельфанду и n-поперечник по Бернштейну.

Пусть S – единичный шар в пространстве L_2, то есть

$$S=\{x\in L_2,\ \|x\|_2\le 1\}.$$

Величину

$$d^n(\mathfrak{M},L_2)=\inf\Big\{\inf\Big\{\mathfrak{M}\cap\mathcal{L}^n\subset\varepsilon S:\ \varepsilon>0\Big\}:\ \mathcal{L}^n\subset L_2\Big\}, \tag{0.0.34}$$

где внешний инфимум берётся по всем подпространствам $\mathcal{L}^n$ коразмерности n, называют n-поперечником по Гельфанду, а величину

$$b_n(\mathfrak{M};L_2)=\sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon S\cap\mathcal{L}_{n+1}\subset\mathfrak{M}:\ \varepsilon>0\Big\}:\ \mathcal{L}_{n+1}\subset L_2\Big\} \tag{0.0.35}$$

называют n-поперечником по Бернштейну.

Хорошо известно, что в гильбертовом пространстве L_2 между величинами (0.0.31) – (0.0.35) выполняются следующие соотношения [38, 53]:

$$b_n(\mathfrak{M};L_2)\le d^n(\mathfrak{M};L_2)\le d_n(\mathfrak{M};L_2)=\delta_n(\mathfrak{M};L_2)=\pi_n(\mathfrak{M};L_2). \tag{0.0.36}$$

Исходя из полученных в первой главе результатов, связанных с характеристикой гладкости $\tau_m(f;1,u)_{p,p'}$, определим следующие классы функций.

Через $W_q^{(r)}(\tau_m;h)$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых при любых $r,m\in\mathbb{N}$, $h\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ и $1/r\le q\le 2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\tau_m^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,dt\le 1.$$

Символом $W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h)$, где $1/r<q\le 2$, $r\in\mathbb{N}$, обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ и произвольной неотрицательной суммируемой на отрезке $(0,h]$ функции φ выполняется ограничение

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)};1,u)_{2,2}\,\varphi(u)du\le 1.$$

Через $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$ обозначим множество функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых при любых $r\in\mathbb{N}$, $1/r<q\le 2$, $h\in[0,2\pi]$ выполняется условие

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)};1,u)_{2,2}\,du\le \Phi^q(h),$$

где $\Phi(h)$ – неотрицательная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$.

Основным результатом второго параграфа второй главы является следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *Пусть $r,m\in\mathbb{N}$, $h\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ и $1/r<q\le 2$. Тогда при любых $n\in\mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2)=\lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2)=E(W_q^{(r)}(\tau_m;h),\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}=$$

$$=2^{-m/2}n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1/q}, \qquad (0.0.37)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ или $\pi_n(\cdot)$.

Следствие 2.2.1. *При выполнении условий теоремы 2.2.1 справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;h);L_2)=\lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;h);L_2)=E(W_q^{(r)}(\tau_1;h),\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}=$$

$$=2^{-1/2}n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right)^{-1/q}. \qquad (0.0.38)$$

В частности, при $q=2$ имеем

$$\lambda_{2n}(W_2^{(r)}(\tau_1;h);L_2)=\lambda_{2n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1;h);L_2)=E(W_2^{(r)}(\tau_1;h),\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}=$$

$$= n^{-r}\left(\frac{nh}{2(nh-Si(nh))}\right)^{1/2}, \quad 0 < nh \le \pi. \tag{0.0.39}$$

Отметим, что равенства (0.0.39) в определённом смысле являются обобщением одного результата Л.В.Тайкова [46] о наилучшем полиномиальном приближении периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0,2\pi]$, структурные свойства которых характеризуются усреднёнными значениями модулей непрерывности первого порядка их производных $f^{(r)} \in L_2$.

В третьем параграфе второй главы вычислены точные значения всех перечисленных выше n-поперечников классов функций, определяемых усреднёнными значениями τ-модуля гладкости и произвольной неотрицательной не эквивалентной нулю весовой функции. Из полученных общих результатов выведены некоторые следствия для конкретных весовых функций, а также вычислены точные верхние грани модулей абсолютных значений коэффициентов Фурье на указанных классах функций.

Теорема 2.3.1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \le 2$, $0 < h \le 3\pi/(4n)$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h),\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} =$$

$$= 2^{-1/2}n^{-r}\left\{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/q}, \tag{0.0.40}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ или $\pi_n(\cdot)$.

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы 2.3.1 при $q = 2$ и $\varphi(t) \equiv 1$ справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;1,h);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;1,h);L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;1,h),\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} = n^{-r}\left\{\frac{nh}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}.$$

Следствие 2.3.2. *В условиях теоремы 2.3.1 при $q = 2$, $\varphi(t) = t$ имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1; t, h); L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1; t, h); L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_2^{(r)}(\tau_1; t, h), \mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} =$$

$$= \frac{1}{n^r h}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}, \ 0 < nh \le \pi.$$

В частности, при $nh = \pi$ имеем:

$$\lambda_{2n}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1; t, \pi/n); L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1; t, \pi/n); L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_2^{(r)}(\tau_1; t, \pi/n); \mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \cdot \frac{1}{n^{r-1}}, \ r \in \mathbb{N}.$$

В 1910 году Лебегом в терминах модулей непрерывности первого порядка $\omega(f; \delta)$ впервые были получены оценки скорости сходимости к нулю коэффициентов Фурье функции $f \in \mathbb{C}[0, 2\pi]$. Эти оценки уточняли известные результаты Римана о скорости сходимости к нулю коэффициентов Фурье при $n \to \infty$. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций в разное время рассматривались А.В.Ефимовым [21], А.Ф.Тиманом [51], Н.П.Корнейчуком [29, 30], В.И.Бердышевым [7, 8], С.Милорадовичем [35, 36], С.А.Теляковским [49, 50], А.И.Степанцом [44]. Все вышеперечисленные результаты подытожены в монографии А.И.Степанца [44]. Аналогичные вопросы для некоторых классов дифференцируемых функций рассмотрены С.Б.Вакарчуком [10, 13, 14, 16, 17], М.Ш.Шабозовым [58–63] и многими другими математиками.

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащих пространству L_2, то требуется найти величину

$$V_n(\mathfrak{M}) = \sup\Big\{ \, |a_n(f)|, \, |b_n(f)| : \ f \in \mathfrak{M} \, \Big\},$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Из теоремы 2.3.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.3.2. *Если выполнены условия теоремы 2.3.1, то справедливы равенства*

$$V_n\left(W_q^{(r)}(\tau_1;1,h)\right)=2^{-1/2}\,n^{-r+1/2}\left\{\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}.$$

В частности, при $q=2$ имеем

$$V_n\left(W_2^{(r)}(\tau_1;1,\pi/n)\right)=n^{-r}\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}.$$

Параграф завершается следующим утверждением.

Теорема 2.3.3. *Если выполнены условия теоремы 2.3.1, то при $q=2$ и $\varphi(t)=t$ имеют место равенства*

$$V_n\left(W_2^{(r)}(\tau_1;t,h)\right)=\frac{1}{n^rh}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2},\ 0<nh\le\pi.$$

В частности, при $nh=\pi$ выполняются равенства

$$V_n\left(W_2^{(r)}(\tau_1;t,\pi/n)\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi^2-4}}\cdot\frac{1}{n^{r-1}},\ r\in\mathbb{N}.$$

В четвёртом параграфе вычислены точные значения n-поперечников класса $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$. Следуя работе [61], полагая при $t=0$ значение функции $\dfrac{\sin t}{t}$ равным 1, через t_* обозначим значение её аргумента, при котором эта функция достигает на полусегменте $[0,\infty)$ своего наименьшего значения. При этом t_* $(4,49<t_*<4,51)$ есть минимальный положительный корень уравнения $\operatorname{tg}x=x$. Положим

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*=\begin{cases}1-\dfrac{\sin t}{t}, & \text{если } 0\le t\le t_*,\\[2mm] 1-\dfrac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если } t_*\le t<\infty.\end{cases}$$

В этих обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.1. *Пусть $1/r<q\le 2; m,n\in\mathbb{N}; r\in\mathbb{Z}_+$. Если мажоранта Φ при любых $h\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi^q(h)}{\Phi^q(\pi/n)}\ge\frac{\pi}{nh}\left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{q/2}dt\right)\left(\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right)^{-1},\qquad(0.0.41)$$

то имеют место равенства

$$\lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=$$

$$=E(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}=$$

$$=\frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}n^r}\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad (0.0.42)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (0.0.41), не пусто.*

Из теоремы 2.4.1 вытекает следующее

Следствие 2.4.1. *При выполнении условий теоремы (2.4.1) имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=\lambda_{2n}(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=$$

$$=E(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(\pi-Si(\pi))}}\cdot\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

В связи с утверждением теоремы 2.4.1 определённый интерес представляет изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(r-s)})_{L_2}$, где $s=1,\ldots,r-1; r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ на классах функций $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $q=2$, $r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$. *Если функция* Φ *при любом* $h\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^2\geq\frac{\int\limits_0^{nh}\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)_*dt}{nh\left(1-\dfrac{Si(\pi)}{\pi}\right)},$$

то для $s=1,\ldots,r-1$ *справедливы равенства*

$$\sup\Big\{E_{n-1}(f^{(r-s)})_2:\ f\in W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi)\Big\}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(\pi-Si(\pi))}}\cdot\frac{1}{n^s}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

ГЛАВА I

Наилучшее полиномиальное приближение функций в $L_2[0,2\pi]$, структурные свойства которых характеризуются τ-модулями гладкости

§1.1. Описание различных модификаций модуля непрерывности. τ-модули гладкости

1.1.1. История вопроса и предварительные результаты

В последнее время при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций вместо классического модуля непрерывности m-го порядка

$$\omega_m(f;t)_X = \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f)\|_X : \quad |h| \le t\Big\}, \tag{1.1.1}$$

где

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f(x+(m-k)h)$$

— разность m-го порядка функции $f \in X$, X – произвольное нормированное пространство, часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности. Использование различных модификаций модуля непрерывности продиктовано специфическими условиями рассматриваемых задач и позволяет получить неожиданные результаты, раскрывающие сущность исследуемых проблем. В качестве примера укажем на работы М.К.Потапова [39, 42] и его учеников, в частности на работу А.Ю.Напедениной [37], где при аппроксимации непериодических функций алгебраическими полиномами предложены различные модификации определения модуля непрерывности (1.1.1), использующие вместо оператора сдвига $T_h f(x) := f(x+h)$ различные усредняющие операторы.

В случае аппроксимации 2π-периодических функций вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ В.А.Абиловым и Ф.В.Абиловой [1] была использована функция Стеклова

$$S_h f(x) := f_h(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt, \quad h > 0$$

для произвольной функции $f \in X$. Определим аналоги конечных разностей в рассматриваемом случае:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f;x) = S_h f(x) - f(x) = (S_h - E)f(x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f;x) = \widetilde{\Delta}_h^1\left(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f;x);x\right) =$$

$$= (S_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_h^k f(x),$$

где

$$S_h^0 f(x) := f(x),\ S_h^k f(x) := S_h\left(S_h^{k-1} f(x)\right),\ k = \overline{1,m},\ m \in \mathbb{N},$$

E – единичный оператор в пространстве X.

Наряду с величинами (1.1.1), модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in X$ также называют величину

$$\widetilde{\Omega}_m(f;t) = \sup\left\{\left\|\widetilde{\Delta}_h^m(f)\right\|_X :\ 0 < h \leq t\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_h^k f(\cdot)\right\|_X :\ 0 < h \leq t\right\}. \qquad (1.1.2)$$

Отметим также, что в ряде работ С.Б.Вакарчука [13, 14] и С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и В.И.Забутной [18, 19, 65], при решении некоторых экстремальных задач теории аппроксимации функций в L_2 вместо модуля непрерывности m-го порядка использовалась следующая усреднённая характеристика гладкости:

$$\Omega_m(f;t) = \left\{\frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f\|_{L_2}^2 dh_1 \cdots dh_m\right\}^{1/2},$$

где $t>0$; $\overline{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_m)$; $\Delta^m_{\overline{h}}=\Delta^1_{h_1}\circ\Delta^1_{h_2}\circ\cdots\circ\Delta^1_{h_m}$; $\Delta^1_{h_j}f(x):=f(x+h_j)-f(x)$, $j=\overline{1,m}$.

Подобного рода усреднённая характеристика гладкости функций ранее рассматривалась К.В.Руновским [43] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым, П.Освальдом [45].

Необходимо отметить также, что усреднённые модули непрерывности несколько другого вида ещё ранее изучались Р.М.Тригубом [54] в пространствах L_p $(p\geq 1)$, где была показана их слабая эквивалентность обычным модулям непрерывности.

Введём следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных чисел вещественной оси. Через $L_2:=L_2[0,2\pi]$ обозначим пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|_2:=\|f\|_{L_2[0,2\pi]}=\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}<\infty.$$

Пусть $\mathscr{T}_{2n-1}$ – подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка $n-1$, т.е.

$$\mathscr{T}_{2n-1}=\left\{T_{n-1}(x):\ T_{n-1}(x)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right\}.$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f\in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx), \tag{1.1.3}$$

где

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx,\quad b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)\sin kxdx$$

– косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f\in L_2$, величина её наилучшего приближения элементами $T_{n-1}\in\mathscr{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)_2 = E_{n-1}(f)_{L_2} = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\|_2 : \ T_{n-1}(x) \in \mathscr{T}_{2n-1}\Big\} =$$
$$= \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \qquad (1.1.4)$$

где

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f,

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f), \ k \in \mathbb{N},$$

$a_k(f)$, $b_k(f)$ – соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье.

Под $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$) понимаем множество функций $f \in L_2$, у которых производные $f^{(r-1)}$, $r \in \mathbb{N}$, абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)} \in L_2$. Если $f \in L_2^{(r)}$, то, дифференцируя r раз разложения (1.1.3), получаем

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k(f)\cos\left(kx + \frac{r\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx + \frac{r\pi}{2}\right)\right), \qquad (1.1.5)$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике L_2.

Для определения явного вида модулей непрерывности (1.1.1) и (1.1.2) из равенства (1.1.5) после несложных вычислений получим вид разностей m-го порядка функции $f \in L_2$. Для этого сопоставим функции f её разложение в ряд Фурье в комплексной форме

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = a_k + ib_k.$$

Для производной порядка r отсюда имеем

$$f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k e^{ikx}.$$

Тогда получаем

$$\Delta_h^m(f^{(r)}; x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k e^{ikx}(1 - e^{ikh})^m, \qquad (1.1.6)$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства L_2.

Аналогичным образом, после ряда простых выкладок и упрощений из равенства (1.1.5) получаем

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f^{(r)};x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{m-k}k^r\left(1-\frac{\sin kh}{kh}\right)^m\times$$

$$\times\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{r\pi}{2}\right)+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{r\pi}{2}\right)\right). \tag{1.1.7}$$

Применяя равенство Парсеваля, из соотношений (1.1.6) и (1.1.7) имеем

$$\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2=2^m\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m, \tag{1.1.8}$$

$$\left\|\widetilde{\Delta}_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)\left(1-\frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m}. \tag{1.1.9}$$

Из равенств (1.1.8) и (1.1.9), учитывая (1.1.1) и (1.1.2), запишем

$$\omega_m^2(f^{(r)};t)_2=\sup\Big\{\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2:\ |h|\le t\Big\}=$$

$$=\sup\left\{2^m\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m:\ |h|\le t\right\}, \tag{1.1.10}$$

$$\widetilde{\Omega}_m^2(f^{(r)};t)_2=\sup\left\{\left\|\widetilde{\Delta}_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2:\ 0<h\le t\right\}=$$

$$=\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)\left(1-\frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m}:\ 0<h\le t\right\}. \tag{1.1.11}$$

В дальнейшем при установлении точности полученных результатов часто будем пользоваться экстремальными функциями $f_0(x):=\sin nx\in L_2^{(r)}$

и $g_0(x) := \cos nx \in L_2^{(r)}$. Для этих функций из равенств (1.1.10) и (1.1.11) следует, что

$$\omega_m^2(f_0^{(r)};t)_2 = \omega_m^2(g_0^{(r)};t)_2 = 2^m n^{2r}(1-\cos nt)^m,$$

$$\widetilde{\Omega}_m^2(f_0^{(r)};t)_2 = \widetilde{\Omega}_m^2(g_0^{(r)};t)_2 = n^{2r}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{2m}.$$

При решении экстремальных задач теории полиномиальных приближений функций $f \in L_2$ наиболее актуальным является вопрос отыскания точных констант

$$\chi_{m,n,r}(U_m;t) \overset{def}{=} \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{U_m(f^{(r)};t/n)_2} :\ f \in L_2^{(r)};\ f \neq const\right\} \tag{1.1.12}$$

в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\chi}{n^r} U_m(f^{(r)};t/n)_2,\ r \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1.13}$$

где U_m – некоторая характеристика гладкости самой функции f или некоторой её производной $f^{(r)}, r \in \mathbb{N}$, например $U_m = \omega_m$ или $U_m = \widetilde{\Omega}_m$. Неравенство (1.1.13) и определение констант в (1.1.12) было объектом многочисленных исследований. В этой связи отметим, например, работы Н.И.Черных [55–57], Л.В.Тайкова [46–48], Н.Айнуллоева [2,3], А.Г.Бабенко [4–6], В.В.Жука [22–24], Х.Юссефа [67], В.И.Иванова и О.И.Смирнова [25], А.А.Лигуна [32–34], С.Н.Васильева [20], В.В.Шалаева [66], С.Б.Вакарчука [9–17], С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и В.И.Забутной [18, 19], М.Ш.Шабозова [58, 59], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [60–62], М.Ш.Шабозова и С.Б.Вакарчука [63] и многих других математиков (см., например, более полную библиографию в работах [17–19] и [60–63]). Так, например, Л.В.Тайковым [46] было доказано, что

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)_2}{\int\limits_0^h \omega_1(f^{(r)};t)_2 dt} = \frac{n}{2(nh - \sin nh)}, \quad 0 < nh \leq \pi/2. \tag{1.1.14}$$

Обобщая результат Л.В.Тайкова (1.1.14), С.Б.Вакарчук [14] доказал, что при любых $m, n \in \mathbb{N},\ 0 < nh \leq \pi/2$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; t)_2 dt\right\}^{m/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{m/2}. \qquad (1.1.15)$$

Следующий шаг в обобщении результата (1.1.15) был сделан М.Ш.Шабозовым [58], который доказал, что для любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2,\ 0 < h \leq \pi/n$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{2^m n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.1.16)$$

В (1.1.16), полагая $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$, получаем результат (1.1.15).

В дальнейшем, учитывая замечание Н.И.Черных о том, что для характеристики величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_2$ более естественным является не джексоновский функционал $\omega_m(f^{(r)}; t)$ $(m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, 0 < h \leq \pi/n)$, а усреднённый с неотрицательным суммируемым на полуинтервале $(0, h]$ не эквивалентным нулю весом $\varphi(t)$ $(0 < t \leq h)$ функционал

$$\Phi_m(f^{(r)}; h) = \left\{\int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \Bigg/ \int\limits_0^h \varphi(t) dt\right\}^{1/2},$$

поскольку при любом $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \leqslant \pi$ имеем

$$\Phi_m(f^{(r)}; h) \leq \omega_m(f^{(r)}; h)_2.$$

М.Ш.Шабозовым и Г.А.Юсуповым [60] была введена в рассмотрение следующая экстремальная аппроксимационная характеристика:

$$\chi_{m,n,r,p}(U_m;\varphi,h) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h U_m^p(f^{(r)};t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.1.17}$$

где $m,n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, а φ – неотрицательная суммируемая и не эквивалентная нулю на отрезке $[0,h]$ весовая функция. При $U_m = \omega_m$ была доказана справедливость соотношений

$$\left\{A_{n,p}^{r,m}(\varphi;h)\right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p}(\omega_m;\varphi;h) \leq \left\{\inf_{n\leq k<\infty} A_{k,p}^{r,m}(\varphi;h)\right\}^{-1}, \tag{1.1.18}$$

где

$$A_{k,p}^{r,m}(\varphi;h) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}, \quad k \geq n. \tag{1.1.19}$$

Отметим, что с целью отыскании точной константы в неравенстве Джексона при $p = 2$ неравенство (1.1.18) ранее было доказано А.А.Лигуном [32].

При решении некоторых экстремальных задач теории аппроксимации функций в L_2 вместо обычного модуля непрерывности m-го порядка (1.1.1) С.Б.Вакарчуком, М.Ш.Шабозовым и В.И.Забутной [65] использовалась следующая усреднённая характеристика гладкости:

$$\Omega_m(f;t) := \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f\|_2^2 dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/2}, \tag{1.1.20}$$

где $t > 0$; $\overline{h} := (h_1,h_2,\ldots,h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$; $\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x+h_j) - f(x)$, $j = 1,2,\ldots,m$. Следует отметить, что в ходе исследования важных вопросов конструктивной теории функций в метрическом пространстве L_p $(0 < p < 1)$ подобного рода усреднённая характеристика гладкости функций рассматривалась К.В.Руновским [43] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым, П.Освальдом [45].

Поскольку функции $\{exp(ikx)\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ образуют на отрезке $[0, 2\pi]$ ортогональную систему, то, применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\left\|\Delta_{\overline{h}}^{m} f^{(r)}\right\|_2^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \prod_{\nu=1}^{m} (1 - \cos h_\nu) \rho_k^2(f). \tag{1.1.21}$$

Подставляя (1.1.21) в формулу (1.1.20), после несложных вычислений получаем

$$\Omega_m^2(f^{(r)}; t) = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^m. \tag{1.1.22}$$

Модуль непрерывности $\Omega_m(f)$ обладает основными свойствами модуля непрерывности m-го порядка (1.1.1). Данные свойства были приведены в статье [65]. Изучая характеристику (1.1.17) для случая $U_m = \Omega_m$, С.Б.Вакарчук, М.Ш.Шабозов и В.И.Забутная в [65] показали, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$ и неотрицательной измеримой суммируемой на отрезке $[0, h]$ функции φ, которая не эквивалентна нулю, справедливы неравенства

$$\{\mathscr{D}_{m,n,r,p}(\varphi; h)\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p}(\Omega_m; \varphi; h) \leq \left\{\inf_{n \leq k < \infty} \mathscr{D}_{m,k,r,p}(\varphi; h)\right\}^{-1}, \tag{1.1.23}$$

где

$$\mathscr{D}_{m,k,r,p}(\varphi; h) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt\right)^{1/p}. \tag{1.1.24}$$

1.1.2. Определение τ-модуля гладкости m-го порядка и связанные с ним известные результаты

Для исследования структурных и конструктивных свойств величины наилучшего приближения функций алгебраическими полиномами в пространствах $L_p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$ и $C[a,b]$ Камен Г. Иванов [26, 27] ввёл в рассмотрение новые модификации модулей гладкости и изучил их свойства и связи с известными дифференциально-разностными характеристиками. В данной работе мы воспользуемся указанными модификациями модулей гладкости для решения ряда экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации в L_2 для τ-модулей гладкости, развивая и обобщая приведенные в пункте 1.1.1 результаты.

Пусть $\lambda(x)$ есть произвольная положительная 2π-периодическая функция, а $w(x)$ – непрерывная неотрицательная функция периода 2π, не эквивалентная нулю.

Определение [26,27]. *τ-модулем гладкости m-го порядка функции $f \in L_{\max(p,p')}[0,2\pi]$ $(p,p' \ge 1)$ называют величину*

$$\tau_m(f,w;\lambda)_{p,p'} = \|w(\cdot)\omega_m(f,\cdot;\lambda(\cdot))_{p'}\|_p\,,$$

где

$$\omega_m(f,x;\lambda(x))_{p'} = \left\{\frac{1}{2\lambda(x)}\int\limits_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} |\Delta_h^m f(x)|^{p'}\,dh\right\}^{1/p'}.$$

Камен Г. Иванов в работе [26], в частности, установил, что если, например, $\lambda(x) \equiv u = const > 0$, $f \in L_p[0,2\pi]$, $w(x) \equiv 1$ и $p' \in [1,p], 1 < p < \infty$, то имеет место следующее отношение слабой эквивалентности

$$\tau_m(f,1;u)_{p,p'} \asymp \omega_m(f,u)_p. \tag{1.1.25}$$

При изучении экстремальных задач теории аппроксимации функций $f \in L_2$, структурные характеристики которых выражаются τ-модулями гладкости, С.Б.Вакарчук [10] ввёл в рассмотрение следующие экстремальные аппроксимационные величины

$$\mathscr{K}_{n,r,m}(t)_{p'} := \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\tau_m(f^{(r)};1,t/n)_{p',2}} :\ f\in L_2^{(r)};\ f\neq const\right\}, \qquad (1.1.26)$$

$$\mathscr{K}^*_{n,r,m}(h)_{p'} :=$$

$$:= \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^2(f^{(r)};1,t)_{p',2}dt\right)^{1/2}} :\ f\in L_2^{(r)}, f\neq const\right\}, \qquad (1.1.27)$$

где $1\leq p'\leq 2;\ t,h\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$.

Следующие две теоремы принадлежат С.Б.Вакарчуку [10].

Теорема A. *Для любых чисел* $m,n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+$ *и* $0<t\leq\pi$ *справедливо равенство*

$$\mathscr{K}_{n,r,m}(t)_2 = \left\{\frac{t}{2^m\mathcal{J}_m(t)}\right\}^{1/2}, \qquad (1.1.28)$$

где

$$\mathcal{J}_m(v) := \int\limits_0^v (1-\cos\tau)^m d\tau. \qquad (1.1.29)$$

Теорема B. *При любых* $m,n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+$ *и любом* $h\in(0,\pi/n]$ *выполнено следующее равенство*

$$\mathscr{K}^*_{n,r,m}(h)_2 = \left(\int\limits_0^h (nu)^{-1}\mathcal{J}_m(nu)du\right)^{-1/2}. \qquad (1.1.30)$$

Эти теоремы для нас являются отправным пунктом для дальнейшего исследования в последующих параграфах.

§1.2. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и τ-модуль гладкости функций из L_2

В этом параграфе, в частности, мы приведём обобщение результата теоремы B, которая будет выступать уже как следствие более общего утверждения. С этой целью докажем точное неравенство типа Джексона – Стечкина между величиной наилучшего приближения тригонометрическими полиномами гладкой функции f из $L_2^{(r)}$ и осредненным τ-модулем гладкости m-го порядка её r-й производной. Имеет место

Теорема 1.2.1. *Пусть $p' = 2$, $1/r \le q \le 2$, $r \in \mathbb{N}$ и $h \in [0, \pi/n]$. Тогда для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_2 \le \frac{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2}\, dt\right)^{1/q}}{2^{m/2}\, n^{r-1/q} \left(\int\limits_0^{nh} \left(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2} dt\right)^{1/q}}. \tag{1.2.1}$$

Неравенство (1.2.1) точно в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, обращающая его в равенство.

Доказательство. Пусть u – произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству $0 < nu \le \pi$. Тогда для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ из определения τ-модуля гладкости m-го порядка, при $p = p' = 2$, получаем

$$\tau_m^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2} = \frac{1}{2\pi u}\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_{-u}^{u} |\Delta_h^m f^{(r)}(x)|^2 dh =$$

$$= \frac{1}{2\pi u}\int\limits_{-u}^{u}\left(\int\limits_0^{2\pi} |\Delta_h^m f^{(r)}(x)|^2 dx\right) dh = \frac{1}{2u}\int\limits_{-u}^{u} \|\Delta_h^m f^{(r)}\|_2^2\, dh =$$

$$= \frac{2^{m-1}}{u}\int\limits_{-u}^{u}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) k^{2r}(1 - \cos kh)^m\right) dh =$$

$$= \frac{2^m}{u} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) k^{2r} \int\limits_0^u (1 - \cos kh)^m dh. \tag{1.2.2}$$

Учитывая обозначение (1.1.29), соотношение (1.2.2) запишем

$$\tau_m^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2} = \frac{2^m}{u} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) k^{2r} \int\limits_0^u (1 - \cos kh)^m dh =$$

$$= \frac{2^m}{u} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) k^{2r-1} \int\limits_0^{ku} (1 - \cos t)^m dt = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) k^{2r} (ku)^{-1} \mathcal{J}_m(ku).$$

Отсюда следует нужное нам для дальнейшего неравенство

$$\tau_m^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2} \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) k^{2r} (ku)^{-1} \mathcal{J}_m(ku). \tag{1.2.3}$$

Воспользуемся далее упрощённым вариантом неравенства Минковского, приведённого в монографии А.Пинкуса [38, с.104]:

$$\left(\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{q/2} dt \right)^{1/q} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^h |f_k(t)|^q dt \right)^{2/q} \right)^{1/2}, \tag{1.2.4}$$

которое справедливо при любом $h \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ и $0 < q \leq 2$. Учитывая неравенство (1.2.3) и равенство (1.2.4), будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2}\, dt \right)^{1/q} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_0^h \left(2^m \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) k^{2r} (kt)^{-1} \mathcal{J}_m(kt) \right)^{q/2} dt \right)^{1/q} \geq$$

$$\geq 2^{m/2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\rho_k^q(f) k^{rq} \int\limits_0^h \left[(kt)^{-1} \mathcal{J}_m(kt) \right]^{q/2} dt \right)^{2/q} \right)^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(k^{rq} \int\limits_0^h \left((kt)^{-1} \mathcal{J}_m(kt) \right)^{q/2} dt \right)^{2/q} \right)^{1/2}. \tag{1.2.5}$$

Далее докажем, что функция натурального аргумента

$$\varphi(k) = k^{rq} \int\limits_0^h \left((kt)^{-1}\mathcal{J}_m(kt)\right)^{q/2} dt$$

в области $Q = \{k:\ n \le k < \infty\}$ является строго возрастающей. Для этого рассмотрим φ как функцию непрерывного аргумента $u \in [n, \infty)$:

$$\varphi(u) = u^{rq} \int\limits_0^h \left((ut)^{-1}\mathcal{J}_m(ut)\right)^{q/2} dt,$$

дифференцируя которую, получаем

$$\varphi'(u) = \left(u^{rq} \int\limits_0^h \left((ut)^{-1}\mathcal{J}_m(ut)\right)^{q/2} dt\right)' = \left(u^{rq-1} \int\limits_0^{uh} \left(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2} dt\right)' =$$

$$= (rq-1)u^{rq-2} \int\limits_0^{uh} \left(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2} dt + u^{rq-1}h\left((uh)^{-1}\mathcal{J}_m(uh)\right)^{q/2} =$$

$$= u^{rq-2}\left\{(rq-1)\int\limits_0^{uh} \left(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2} dt + uh\left((uh)^{-1}\mathcal{J}_m(uh)\right)^{q/2}\right\}.$$

Поскольку $q \geqslant 1/r$, то отсюда следует, что неравенство $\varphi'(u) \geqslant 0$ имеет место для любого n. Следовательно,

$$\inf\Big\{\varphi(u):\ n \leqslant u < \infty\Big\} = \varphi(n) = n^{rq} \int\limits_0^h \left((nt)^{-1}\mathcal{J}_m(nt)\right)^{q/2} dt. \qquad (1.2.6)$$

Учитывая соотношение (1.2.6), из неравенства (1.2.5) имеем

$$\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2}\, dt\right)^{1/q} \ge$$

$$\ge 2^{m/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\left(k^{rq}\int\limits_0^h \left((kt)^{-1}\mathcal{J}_m(kt)\right)^{q/2} dt\right)^{2/q}\right)^{1/2} \ge$$

$$\geq 2^{m/2}n^r\left(\int\limits_0^h\left((nt)^{-1}\mathcal{J}_m(nt)\right)^{q/2}dt\right)^{1/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}=$$

$$=2^{m/2}n^{r-1/2}\left(\int\limits_0^{nh}\left(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2}dt\right)^{1/q}E_{n-1}(f)_2. \qquad (1.2.7)$$

Из (1.2.7) для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ получаем неравенство

$$E_{n-1}(f)_2\leq\frac{\left(\int\limits_0^h\tau_m^q\left(f^{(r)};1,t\right)_{2,2}dt\right)^{1/q}}{2^{m/2}n^{r-1/q}\left(\int\limits_0^{nh}\left(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2}dt\right)^{1/q}},$$

откуда и следует соотношение (1.2.1). Покажем, что существует функция $f_0\in L_2^{(r)}$, для которой в (1.2.1) имеет место знак равенства. Для этого рассмотрим функцию $f_0(x)=\sin nx$, которая принадлежит классу $L_2^{(r)}$. Для нее

$$E_{n-1}(f_0)_2=\|f_0-S_{n-1}(f_0)\|_2=\|f_0\|_2=1$$

и, как следует из (1.2.2),

$$\tau_m^2(f_0^{(r)},1;t)_{2,2}=\frac{2^m}{t}n^{2r}\int\limits_0^t(1-\cos nh)^m dh=$$

$$=2^m n^{2r}(nt)^{-1}\int\limits_0^{nt}(1-\cos\tau)^m d\tau=2^m n^{2r}(nt)^{-1}\mathcal{J}_m(nt).$$

Возводя обе части последнего соотношения в степень $q/2$ $(0<q\leq 2)$, интегрируя их по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=h$, и возводя затем полученный результат в степень $1/q$, имеем

$$\left(\int\limits_0^h\tau_m^q(f_0^{(r)},1;t)_{2,2}dt\right)^{1/q}=2^{m/2}n^r\left(\int\limits_0^h\left((nt)^{-1}\mathcal{J}_m(nt)\right)^{q/2}dt\right)^{1/q}=$$

$$= 2^{m/2} n^{r-1/q} \left(\int\limits_0^{nh} \left(t^{-1} \mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2} dt \right)^{1/q}.$$

С учётом полученного равенства запишем

$$\frac{\left(\int\limits_0^{h} \tau_m^q(f_0^{(r)}, 1; t)_{2,2}\, dt \right)^{1/q}}{2^{m/2} n^{r-1/q} \left(\int\limits_0^{nh} \left(t^{-1} \mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2} dt \right)^{1/q}} \equiv 1 = E_{n-1}(f_0)_2,$$

откуда и будет следовать вторая часть утверждения теоремы 1.2.1.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{2^{m/2}\, n^{r-1/q} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^{h} \tau_m^q(f^{(r)}, 1; t)_{2,2}\, dt \right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^{nh} \left(t^{-1} \mathcal{J}_m(t)\right)^{q/2} dt \right)^{-1/q}. \qquad (1.2.8)$$

Замечание. Из равенства (1.2.8) при $q = 2$ получаем утверждение теоремы B в виде равенства (1.1.30).

§1.3. Общая экстремальная задача для τ-модулей гладкости m-го порядка в L_2

В связи с введённой в первом параграфе экстремальной аппроксимационной величиной (1.1.17), содержащей характеристики гладкости U_m и полностью исследованной для случаев $U_m = \omega_m$ и $U_m = \Omega_m$, а также в связи с неравенствами (1.1.18) и (1.1.23), для выяснения структурных и конструктивных свойств функции $f \in L_2^{(r)}$ посредством τ-модулей гладкости m-го порядка их r-тых производных, с нашей точки зрения, определённый интерес представляет отыскание точного значения экстремальной величины

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r,q}(\tau_m, \varphi; h)_{p'} = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)}, 1; t)_{p',2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}, \tag{1.3.1}$$

где $1 \le p' \le 2$, $0 < q \le 2$, $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ и φ – неотрицательная суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0, h]$ функция. Здесь и далее в соотношениях общего характера отношение $0/0$ будем считать равным нулю.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi/n]$, φ – *неотрицательная суммируемая и не эквивалентная нулю на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\beta_{n,m,r,q}(\varphi; h)} \le \widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi; h)_2 \le \frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty} \beta_{k,m,r,q}(\varphi; h)}, \tag{1.3.2}$$

где

$$\beta_{k,m,r,q}(\varphi; h) := \left(k^{rq}\int\limits_0^h \Big((kt)^{-1}\mathcal{J}_m(kt)\Big)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{1/q}. \tag{1.3.3}$$

Доказательство. Пусть $u \ge 0$ – любое число, удовлетворяющее неравенство $0 < nu \le \pi$. Тогда для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ $(f \neq const)$ имеет место неравенство (1.2.3). Как и в предыдущем параграфе, воспользовавшись неравенством (1.2.4), с учётом неравенства (1.2.3), будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)\,dt\right)^{1/q} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_0^h \left[2^m \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) k^{2r} (kt)^{-1} \mathcal{J}_m(kt)\right]^{q/2} \varphi(t)dt\right)^{1/q} \geq$$

$$\geq 2^{m/2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\rho_k^q(f) k^{rq} \int\limits_0^h \Big((kt)^{-1}\mathcal{J}_m(kt)\Big)^{q/2} \varphi(t)dt\right)^{2/q}\right)^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(k^{rq} \int\limits_0^h \Big((kt)^{-1}\mathcal{J}_m(kt)\Big)^{q/2} \varphi(t)dt\right)^{2/q}\right)^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\, \beta_{k,m,r,q}^2(\varphi;h)\right)^{1/2} \geq 2^{m/2} E_{n-1}(f)_2 \inf_{n\leq k<\infty} \beta_{k,m,r,q}(\varphi;h).$$

Для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ отсюда получаем

$$\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)},1;t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{\inf\limits_{n\leq k<\infty} \beta_{k,m,r,q}(\varphi;h)}. \tag{1.3.4}$$

Используя определение величины (1.3.1), из (1.3.4) сразу получаем оценку сверху

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi;h)_2 \leq \Big\{ \inf_{n\leq k<\infty} \beta_{k,m,r,q}(\varphi;h)\Big\}^{-1}. \tag{1.3.5}$$

Для получения оценки снизу величины (1.3.1) рассмотрим функцию $g_0(x) := \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой путем простых вычислений имеем

$$E_{n-1}(g_0)_2 = 1,\ \tau_m(g_0^{(r)},1;t)_{2,2} = 2^{m/2} n^r \Big((nt)^{-1}\mathcal{J}_m(nt)\Big)^{1/2}.$$

Учитывая эти равенства, получаем оценки снизу величины (1.3.1)

$$\widetilde{\chi}_{n,m,r,q}(\varphi;h)_2 \geq \frac{2^{m/2}E_{n-1}(g_0)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q(g_0^{(r)},1;t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \frac{1}{\left(n^{rq}\int\limits_0^h \Big((nt)^{-1}\mathcal{J}_m(nt)\Big)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{1/q}} = \Big\{\beta_{n,m,r,q}(\varphi;h)\Big\}^{-1}. \qquad (1.3.6)$$

Требуемое соотношение (1.3.2) является результатом сопоставления неравенств (1.3.5) и (1.3.6), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1.

Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1.3.1. *Пусть* $k,n,m,r\in\mathbb{N}, k\geq n$, $1/r<q\leq 2$, $\varphi(t)\geq 0$ *– суммируемая на* $[0,h]$ *функция, не эквивалентная нулю,* $0<h\leq\pi/n$. *Тогда, если*

$$\inf\Big\{\beta_{k,m,r,q}(\varphi;h):\ k\geq n\Big\} = \beta_{n,m,r,q}(\varphi;h), \qquad (1.3.7)$$

то имеет место равенство

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi;h)_2 = \Big\{\beta_{n,m,r,q}(\varphi;h)\Big\}^{-1}. \qquad (1.3.8)$$

В частности, равенство (1.3.8) выполняется для весовой функции

$$\varphi(t):=\varphi_1(t)=(kt)^{q/2},\ n\leq k<\infty,\ k,n\in\mathbb{N}\ \ \textit{при}\ \ 1/r<q\leq 2,\ r\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. В самом деле, так как в этом случае

$$\beta_{k,m,r,q}(\varphi_1;h) = \left(k^{rq}\int\limits_0^h\Big(\mathcal{J}_m(kt)\Big)^{q/2}dt\right)^{1/q},$$

то достаточно доказать, что функция

$$y_1(k):=k^{rq}\int\limits_0^h\Big(\mathcal{J}_m(kt)\Big)^{q/2}dt = \beta^q_{k,m,r,q}(\varphi_1;h)$$

возрастает при $n \le k < \infty$, где $k, n \in \mathbb{N}$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$y_1(u) := u^{rq} \int\limits_0^h \Big(\mathcal{J}_m(ut)\Big)^{q/2} dt$$

непрерывного аргумента $u \in (0, \infty)$ и найдем ее первую производную, используя в процессе вычисления интегрированием по частям:

$$y_1'(u) := rqu^{rq-1} \int\limits_0^h \Big(\mathcal{J}_m(ut)\Big)^{q/2} dt + u^{rq} \int\limits_0^h \frac{\partial}{\partial u}\Big(\mathcal{J}_m(ut)\Big)^{q/2} dt =$$

$$= rqu^{rq-1} \int\limits_0^h \Big(\mathcal{J}_m(ut)\Big)^{q/2} dt + u^{rq-1} \int\limits_0^h t\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{J}_m(ut)\Big)^{q/2} dt =$$

$$= u^{rq-1} h\Big(\mathcal{J}_m(uh)\Big)^{q/2} + (rq-1)u^{rq-1} \int\limits_0^h \Big(\mathcal{J}_m(ut)\Big)^{q/2} dt.$$

Поскольку $q \geqslant 1/r$, то отсюда получаем $y_1'(u) \geqslant 0$. Следовательно

$$\inf_{n \le k < \infty} \beta_{k,m,r,q}(\varphi_1; h) = \beta_{n,m,r,q}(\varphi_1; h).$$

Из последнего соотношения в связи с неравенством (1.3.2) получаем

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{n,m,r,q}(\varphi_1; h)_2 = \Big\{\beta_{n,m,r,q}(\varphi_1; h)\Big\}^{-1},$$

чем и завершаем доказательство следствия 1.3.1.

Используя схему доказательства теоремы 1.3.1, в качестве следствия из нее получаем такие утверждения.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+; k, n \in \mathbb{N}; 0 < q \le 2; 0 < a \le \pi;\ g(t) \ge 0$ *– суммируемая на отрезке* $[0, a]$ *функция, не эквивалентная нулю. Тогда имеют место следующие неравенства*

$$\frac{1}{\Big\{\mu_{m,r,q}(a; g; 1)\Big\}^{1/q}} \le \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t/n)_{2,2}\, g(t) dt\right)^{1/q}} \le$$

$$\leq \frac{1}{\left\{\inf\limits_{1\leq x<\infty}\mu_{m,r,q}(a;g;x)\right\}^{1/q}},$$

где

$$\mu_{m,r,q}(a;g;x) := x^{rq}\int\limits_0^a \Big((xt)^{-1}\mathcal{J}_m(xt)\Big)^{q/2} g(t)dt.$$

Если при этом функция g такова, что

$$\inf\Big\{\mu_{m,r,q}(a;g;x):\ 1\leq x<\infty\Big\} = \mu_{m,r,q}(a;g;1),$$

то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \tau_m^q(f^{(r)};1,t/n)_{2,2}\, g(t)dt\right)^{1/q}} = \frac{1}{\Big\{\mu_{m,r,q}(a;g;1)\Big\}^{1/q}}. \qquad (1.3.9)$$

Следствие 1.3.2. *Пусть $0<a\leq\pi$; $m,n,r\in\mathbb{N}$. Если для некоторого $q\in(0,2]$ функция $g(t):=t^{rq-1}g_1(t)$, где $g_1(t)\geq 0$ – невозрастающая суммируемая на отрезке $[0,a]$ функция, не эквивалентная нулю, то выполняется равенство*

$$\inf\Big\{\mu_{m,r,q}(a;t^{rq-1}g_1(t);x):\ 1\leq x<\infty\Big\} = \mu_{m,r,q}(a;t^{rq-1}g_1(t);1) \qquad (1.3.10)$$

и справедливо соотношение

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^a \tau_m^q(f^{(r)};1,t/n)_{2,2}\, t^{rq-1}g_1(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \frac{1}{\Big\{\mu_{m,r,q}(a;t^{rq-1}g_1(t);1)\Big\}^{1/q}}. \qquad (1.3.11)$$

Доказательство. Докажем равенство (1.3.10), поскольку равенство (1.3.11) с учётом (1.3.9) вытекает из (1.3.10). Следуя [32], полагаем

$$g_0(t) := \Big\{g_1(t),\ \text{если}\ \ 0<t\leq a;\ \ g_1(a),\ \text{если}\ \ a\leq t<\infty\Big\}.$$

Тогда при всех $1 \le x < \infty$ имеем

$$\mu_{m,r,q}(a; t^{rq-1}g_1(t); x) := x^{rq}\int\limits_0^a \Big((xt)^{-1}\mathcal{J}_m(xt)\Big)^{q/2} t^{rq-1}g_1(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{ax}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2} t^{rq-1}g_0(t/x)dt \ge \int\limits_0^{ax}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2} t^{rq-1}g_0(t)dt \ge$$

$$\ge \int\limits_0^{a}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2} t^{rq-1}g_1(t)dt = \mu_{m,r,q}(a; t^{rq-1}g_1(t); 1),$$

откуда немедленно следует (1.3.10). Следствие 1.3.2 доказано.

В случае $m = 1$ получаем следующее утверждение.

Теорема 1.3.3. *Пусть* $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < q \le 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \le 3\pi/(4n)$, φ *– неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{n,1,r,q}(\varphi; h)_2 = \left(n^{rq}\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{1.3.12}$$

Доказательство. Для того, чтобы установить равенство (1.3.12), достаточно доказать, что функция натурального аргумента

$$y(k) = k^{rq}\int\limits_0^h \Big((kt)^{-1}\mathcal{J}_1(kt)\Big)^{q/2}\varphi(t)dt$$

возрастает на множестве $n \le k < \infty$, $k, n \in \mathbb{N}$. В самом деле, так как

$$\mathcal{J}_1(kt) = kt - \sin kt,$$

то мы имеем

$$y(k) = k^{rq}\int\limits_0^h \Big((kt)^{-1}(kt - \sin kt)\Big)^{q/2}\varphi(t)dt =$$

$$= k^{rq}\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt. \tag{1.3.13}$$

Теперь докажем, что если функция φ суммируема на $[0,h]$ и не эквивалентна нулю, то $y(x)$ при всех $x \geq n$ монотонно возрастает и

$$\inf\left\{y(x):\ n \leqslant x < \infty\right\} = y(n) = n^{rq} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2} \varphi(t)dt. \qquad (1.3.14)$$

В самом деле, дифференцируя функцию (1.3.13), получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2} = \frac{t}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2}, \quad 0 < q \leq 2,$$

где $x \neq 0$ и $t \neq 0$. На основании второй теоремы о среднем значении имеем

$$\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2} d(t\varphi(t)) = \left(1 - \frac{\sin x\xi}{x\xi}\right)^{q/2} h\varphi(h), \quad 0 \leq \xi \leq h.$$

Тогда с учетом двух последних соотношений для всех $0 \leq \xi \leq \pi/n$ получаем

$$y'(x) = rqx^{rq-1} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2} \varphi(t)dt + x^{rq} \int\limits_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2} \varphi(t)dt =$$

$$= rqx^{rq-1} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2} \varphi(t)dt + x^{rq-1} \int\limits_0^h (t\varphi(t)) \frac{\partial}{\partial t}\left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2} dt =$$

$$= rqx^{rq-1} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2} \varphi(t)dt + x^{rq-1} \left\{h\varphi(h)\left(1 - \frac{\sin xh}{xh}\right)^{q/2} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2} d(t\varphi(t))\right\} = rqx^{rq-1} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin xt}{xt}\right)^{q/2} \varphi(t)dt +$$

$$+ x^{rq-1}\left\{h\varphi(h)\left[\left(1 - \frac{\sin xh}{xh}\right)^{q/2} - \left(1 - \frac{\sin x\xi}{x\xi}\right)^{q/2}\right]\right\} \geq 0,\ 0 \leq \xi \leq h. \quad (1.3.15)$$

Отсюда следует справедливость равенства (1.3.14). Следовательно

$$\beta_{k,1,r,q}(\varphi;h)=\left(k^{rq}\int\limits_0^h\Big((kt)^{-1}\mathcal{J}_1(kt)\Big)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{1/q}=$$

$$=\left(k^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{1/q}\geq$$

$$\geq\left(n^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{1/q}=\beta_{n,1,r,q}(\varphi;h).$$

Последнее соотношение означает, что

$$\inf_{n\leq k<\infty}\beta_{k,1,r,q}(\varphi;h)=\beta_{n,1,r,q}(\varphi;h). \tag{1.3.16}$$

Требуемое равенство (1.3.12) вытекает из соотношения (1.3.16) и неравенства (1.3.2). Теорема 1.3.3 доказана.

Равенство (1.3.12) перепишем в эквивалентном виде

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{\sqrt{2}\,n^rE_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{1.3.17}$$

Хорошо известно, что для функции $f\in L_2^{(r)}$, где $r=2,3,...$, её промежуточные производные $f^{(r-s)}$ $(s=1,2,\ldots,r-1)$ принадлежат пространству L_2. Представляет интерес отыскание точных верхних граней величин $E_{n-1}(f^{(r-s)})_2$ на классе $L_2^{(r)}$. Подобная задача решалась в работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [17], когда гладкостная характеристика функций $f\in L_2^{(r)}$ задавалась специальным модулем непрерывности m-го порядка $\widetilde{\Omega}_m(f;t)$, конструкция которого основано на m-кратной итерации оператора

Стеклова

$$S_h(f;x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}f(x+t)dt.$$

В рассматриваемом нами случае доказательство нижеследующего утверждения основано на использовании экстремального равенства (1.3.17).

Теорема 1.3.4. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$; $s=1,\ldots,r-1$; $0<q\le 2$; $0<h\le 3\pi/(4n)$; $\varphi(t)\ge 0$ – *суммируемая на отрезке* $[0,h]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{\sqrt{2}\,n^sE_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (1.3.18)$$

Пусть $n\in\mathbb{N}; r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $s=1,\ldots,r-1$; $q=2$; $0<h\le 3\pi/(4n)$ *и* $\varphi(t)\equiv 1$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^sE_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\tau_1^2(f^{(r)};1,t)_{2,2}dt\right)^{1/2}}=\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}, \qquad (1.3.19)$$

где $Si(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ – *интегральный синус.*

Если же $n\in\mathbb{N}; r\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $s=1,\ldots,r-1$; $q=2$; $0<h\le 3\pi/(4n)$ *и* $\varphi(t)\equiv t$, *то справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^sE_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h t\tau_1^2(f^{(r)};1,t)_{2,2}dt\right)^{1/2}}=\frac{1}{h\sqrt{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2}}. \qquad (1.3.20)$$

Доказательство. Из соотношения (1.3.17) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2}\, \varphi(t) dt\right)^{1/q}}{\sqrt{2}\, n^r \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2} \varphi(t) dt\right)^{1/q}}. \tag{1.3.21}$$

Поскольку неравенство (1.3.21) имеет место при $r = 0$, то имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f; 1, t)_{2,2}\, \varphi(t) dt\right)^{1/q}}{\sqrt{2} \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2} \varphi(t) dt\right)^{1/q}}. \tag{1.3.22}$$

Из определения класса $L_2^{(r)}$ следует, что $f^{(r)} \in L_2$. Исходя из этого и заменяя в неравенстве (1.3.22) f на $f^{(r)}$, будем иметь

$$E_{n-1}(f^{(r)})_2 \leq \frac{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2}\, \varphi(t) dt\right)^{1/q}}{\sqrt{2} \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2} \varphi(t) dt\right)^{1/q}}. \tag{1.3.23}$$

В монографии [31, с.122-124] было показано, что из неравенства типа Колмогорова

$$\|f^{(r-s)}\|_2 \leq \|f\|_2^{s/r}\, \|f^{(r)}\|_2^{1-s/r}$$

вытекает неравенство аналогичного содержания для наилучшего приближения тригонометрическими полиномами последовательных производных функций $f \in L_2^{(r)}$:

$$E_{n-1}(f^{(r-s)})_2 \leq E_{n-1}(f)_2^{s/r} E_{n-1}(f^{(r)})_2^{1-s/r}. \tag{1.3.24}$$

Подставляя в правую часть формулы (1.3.24) вместо величин $E_{n-1}(f)_2$ и $E_{n-1}(f^{(r)})_2$ их оценки сверху из неравенств (1.3.21) и (1.3.23), получаем

$$E_{n-1}(f^{(r-s)})_2 \leq \frac{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}}{\sqrt{2}\,n^s\left(\int\limits_0^h \left(1-\dfrac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{1/q}}.$$

Отсюда для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеем

$$\frac{\sqrt{2}\,n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \leq \left(\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \quad (1.3.25)$$

Докажем, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, для которой в (1.3.25) имеет место знак равенства. В самом деле, достаточно в качестве экстремальной функции рассмотреть $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$. Путем несложных вычислений получаем

$$E_{n-1}(f_0^{(r-s)})_2 = n^{r-s}, \quad \tau_1(f_0^{(r)};u)_{2,2} = n^r\left[2\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)\right]^{1/2},\ 0 < nt \leq \pi.$$

Следовательно, и

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}\,n^s E_{n-1}(f^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \geq \frac{\sqrt{2}\,n^s E_{n-1}(f_0^{(r-s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f_0^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \quad (1.3.26)$$

Сравнивая оценку сверху (1.3.25) и оценку снизу (1.3.26), получаем требуемое равенство (1.3.18). Соотношения (1.3.19) и (1.3.20) доказываются непосредственным вычислением, чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.4.

Отметим, что равенство (1.3.19) является своеобразным распространением одного результата Л.В.Тайкова [46]

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)};t)_2\,dt\right)^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{1/2}, \tag{1.3.27}$$

на рассматриваемый нами случай, который получаем заменами модуля непрерывности $\omega(f^{(r)};t)_2$ на τ-модуль гладкости $\tau_1(f^{(r)};t)_{2,2}$, а функции $\sin nh$ — на интегральный синус $Si(nh)$.

ГЛАВА II

Значения n-поперечников классов функций, определяемых τ-модулями гладкости

§2.1. Необходимые определения и обозначения

В этом пункте излагаем необходимые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $\mathfrak{M} \subset L_2$ – некоторый класс функций и пусть $\mathcal{L}_n \subset L_2$ – некоторое подпространство заданной размерности n. Величину

$$E(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} = \sup\Big\{E(f; \mathcal{L}_n)_{L_2}: \ f \in \mathfrak{M}\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\inf\Big\{\|f - g\|_2: \ g \in \mathcal{L}_n\Big\}: \ f \in \mathfrak{M}\Big\} \qquad (2.1.1)$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством $\mathcal{L}_n$ заданной размерности n. Величина (2.1.1) характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства $\mathcal{L}_n$ в метрике пространства L_2.

Если обозначить через $\mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$ множество всех непрерывных операторов $A : L_2 \to \mathcal{L}_n$, действующих из L_2 в произвольно заданное подпространство $\mathcal{L}_n \subset L_2$ размерности n, то возникает следующая задача: найти величину

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} = \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_2: \ f \in \mathfrak{M}\Big\}: A \in \mathcal{A}(L_2, L_n)\Big\} \qquad (2.1.2)$$

и указать оператор $A_* \subset \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$, реализующий точную нижнюю грань в (2.1.2):

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} = \sup\Big\{\Big\|f - A_*f\Big\|_2: \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Задачу (2.1.2) можно рассматривать в более узком смысле: нижнюю грань искать не по всему множеству $\mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$ непрерывных операторов $A : L_2 \to \mathcal{L}_n$, а только по некоторому классу таких операторов, которые определяются тем или иным способом задания. В частности, можно выделить в

$\mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$ некоторый класс линейных непрерывных операторов $A\colon L_2 \to \mathcal{L}_n$ и рассматривать величину

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} = \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_2 :\ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)\Big\}. \qquad (2.1.3)$$

Если в выделенном классе существует оператор $A^*\colon L_2 \to \mathcal{L}_n$, для которого достигается внешняя нижняя грань в (2.1.3), то такой оператор определяет наилучший линейный метод приближения в задаче (2.1.3), то есть

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} = \sup\Big\{\Big\|f - A^*f\Big\|_2 :\ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Если же в $\mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$ выделить класс $\mathcal{A}^\perp(L_2, \mathcal{L}_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство $\mathcal{L}_n$, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in \mathcal{L}_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}^\perp(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} = \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_2 :\ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{A}^\perp(L_2, \mathcal{L}_n)\Big\}. \qquad (2.1.4)$$

С величинами (2.1.1) – (2.1.4) связана задача отыскания значения ряда n-поперечников для различных классов функций $\mathfrak{M}$.

Напомним определения n-поперечников, значения которых для конкретных классов $\mathfrak{M}$ вычислим в этой главе.

n-поперечником в смысле А.Н.Колмогорова [28] класса функций $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2 называют величину

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} :\ \mathcal{L}_n \subset L_2\Big\}, \qquad (2.1.5)$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам заданной размерности n из пространства L_2.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2}$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} :\ \mathcal{L}_n \subset L_2\Big\} \qquad (2.1.6)$$

называют *линейным n-поперечником* класса $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2.

Аналогичным образом, взяв за основу величину (2.1.4), вводят в рассмотрение *проекционный n-поперечник*

$$\pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\mathcal{E}^\perp(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_n)_{L_2} :\ \mathcal{L}_n \subset L_2\Big\}. \qquad (2.1.7)$$

Существуют ещё две величины, известные в теории приближений под названиями n-поперечник по Гельфанду и n-поперечник по Бернштейну. Пусть S – единичный шар в пространстве L_2, то есть

$$S = \{x \in L_2,\ \|x\|_2 \leq 1\}.$$

Величину

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}^n \subset \varepsilon S:\ \varepsilon > 0\Big\}:\ \mathcal{L}^n \subset L_2\Big\}, \qquad (2.1.8)$$

где внешний инфимум берётся по всем подпространствам $\mathcal{L}^n$ коразмерности n, называют *n-поперечником по Гельфанду*, а величину

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M}:\ \varepsilon > 0\Big\}:\ \mathcal{L}_{n+1} \subset L_2\Big\} \qquad (2.1.9)$$

называют *n-поперечником по Бернштейну*.

Очевидно, что между величинами (2.1.5) – (2.1.9) в пространстве L_2 выполняются соотношения [38, 53]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}; L_2). \qquad (2.1.10)$$

Первое неравенство $b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}; L_2)$ в (2.1.10) можно найти в монографии A.Pinkus [38, с.19], а все остальные — в монографии В.М.Тихомирова [53, с.239].

Используя характеристику гладкости $\tau_m(f; u)_{p,p'}$ и исходя из полученных в первой главе результатов, определим следующие классы функций.

Через $W_q^{(r)}(\tau_m; h)$, где $1/r < q \leq 2$ — некоторое фиксированное число, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2}\, dt \leq 1.$$

Здесь $r, m \in \mathbb{N},\ h \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$.

Пусть φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ и не эквивалентная нулю функция. Символом $W_q^{(r)}(\tau_1; \varphi, h)$, $1/r < q \leq 2$; $r \in \mathbb{N}$, $h \in$

$\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых выполняется ограничение

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)};1,u)_{2,2}\,\varphi(u)du \le 1.$$

Через $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$, где $r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \le 2$, обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ выполняется условие

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)};1,u)_{2,2}\,du \le \Phi^q(h).$$

Здесь Φ — определенная на множестве $[0,\infty)$ возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$.

§2.2. Точные значения n-поперечников класса $W_q^{(r)}(\tau_m;h)$

Теорема 2.2.1. *Пусть $r,m\in\mathbb{N}$, $h\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ и $1/r<q\leq 2$. Тогда при любых $n\in\mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2)=\lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2)=E(W_q^{(r)}(\tau_m;h),\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}=$$

$$=2^{-m/2}n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1/q}, \qquad (2.2.1)$$

где λ_n – любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ или $\pi_n(\cdot)$.

Доказательство. В самом деле, пользуясь утверждением следствия 1.2.1, для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ запишем неравенство

$$E_{n-1}(f)_2\leq$$

$$\leq 2^{-m/2}\,n^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1/q}\left(\int\limits_0^{h}\tau_m^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,dt\right)^{1/q}=$$

$$=2^{-m/2}\,n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{h}\tau_m^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,dt\right)^{1/q}.$$

Отсюда, для произвольной $f\in W_q^{(r)}(\tau_m;h)$ согласно определению класса $W_q^{(r)}(\tau_m;h)$ получаем

$$E(W_q^{(r)}(\tau_m;h),\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}\leq$$

$$\leq 2^{-m/2}\,n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.2.2)$$

Из неравенства (2.2.2), учитывая соотношение (2.1.10), получаем оценку сверху

$$b_n(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2)\leq d^n(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2)\leq d_n(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2)\leq$$

$$\leq \delta_n(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2) \leq \pi_n(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-m/2}n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1/q}, \qquad (2.2.3)$$

Для получения оценки снизу, пользуясь схемой рассуждений [10], в множестве $\mathscr{T}_{2n+1}\cap L_2$ введём в рассмотрение шар полиномов

$$\mathbb{B}_{2n+1} = \left\{T_n \in \mathscr{T}_{2n+1}:\ \|T_n\| \leqslant 2^{-m/2}n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1/q}\right\}$$

и докажем включение $\mathbb{B}_{2n+1}\subset W_q^{(r)}(\tau_m;h)$. Воспользовавшись тем, что согласно неравенству (1.2.2) для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ выполняется равенство

$$\tau_m^2(f^{(r)},1;u)_{2,2} = 2^m\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)k^{2r}((ku)^{-1}\mathcal{J}_m(ku))$$

и заменив f на произвольный полином $T_n\in\mathscr{T}_{2n+1}$, будем иметь

$$\tau_m^2(T_n^{(r)},1;u)_{2,2} = 2^m\sum_{k=1}^{n}\rho_k^2(T_n)k^{2r}((ku)^{-1}\mathcal{J}_m(ku)). \qquad (2.2.4)$$

Обычными средствами дифференциального исчисления легко доказать, что

$$\max_{1\leq k\leq n}\Big\{\,k^{2r}((ku)^{-1}\mathcal{J}_m(ku))\Big\} = n^{2r}((nu)^{-1}\mathcal{J}_m(nu)).$$

Используя это соотношение, из равенства (2.2.4) получаем неравенство

$$\tau_m^2(T_n^{(r)},1;u)_{2,2} \leq 2^m n^{2r}((nu)^{-1}\mathcal{J}_m(nu))\sum_{k=1}^{n}\rho_k^2(T_n) =$$

$$= 2^m n^{2r}\|T_n\|_2^2\,((nu)^{-1}\mathcal{J}_m(nu)).$$

Последнее неравенство возведём в степень $q/2$ $(1/r\leqslant q\leq 2)$ и, интегрируя по u в пределах от 0 до h, для произвольного полинома $T_n\in\mathscr{T}_{2n+1}$

получаем неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \tau_m^q(T_n^{(r)},1;u)_{2,2}\,du \le 2^{mq/2}n^{rq}\|T_n\|_2^q\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Big((nu)^{-1}\mathcal{J}_m(nu)\Big)^{q/2}du \le$$

$$\le 2^{mq/2}n^{rq}2^{-mq/2}n^{-rq+1}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1}\times$$

$$\times\frac{1}{h}\int\limits_0^h((nu)^{-1}\mathcal{J}_m(nu))^{q/2}du =$$

$$= n\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1}\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Big((nu)^{-1}\mathcal{J}_m(nu)\Big)^{q/2}du =$$

$$= \left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right) = 1.$$

Этим мы доказали, что шар $\mathbb{B}_{2n+1}\subset W_q^{(r)}(\tau_m;h)$. Согласно определению бернштейновского n-поперечника и в силу соотношения (2.1.10) получаем следующие оценки снизу:

$$b_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2)\ge b_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_m;h);L_2)\ge$$

$$\ge b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1};L_2) = 2^{-m/2}n^{-r+1/q}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{nh}\Big(t^{-1}\mathcal{J}_m(t)\Big)^{q/2}dt\right)^{-1/q}. \tag{2.2.5}$$

Требуемые равенства (2.2.1) получаем из сопоставления оценок сверху всех n-поперечников (2.2.3) и оценки снизу бернштейновского n-поперечника (2.2.5). Теорема 2.2.1 доказана.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 2.2.1. *При выполнении условий теоремы 2.2.1 справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;h);L_2) = \lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;h);L_2) = E(W_q^{(r)}(\tau_1;h),\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2} =$$

$$= 2^{-1/2} n^{-r+1/q} \left(\frac{1}{h} \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right)^{q/2} dt \right)^{-1/q}. \qquad (2.2.6)$$

В частности, при $q = 2$ *имеем*

$$\lambda_{2n}(W_2^{(r)}(\tau_1; h); L_2) = \lambda_{2n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1; h); L_2) =$$

$$= E(W_2^{(r)}(\tau_1; h), \mathscr{T}_{2n-1})_{L_2} = n^{-r} \left(\frac{nh}{2(nh - Si(nh))} \right)^{1/2}, \quad 0 < nh \le \pi. \quad (2.2.7)$$

Доказательство. В самом деле, поскольку

$$\frac{1}{t}\, \mathcal{J}_1(t) = 1 - \frac{\sin t}{t},$$

то из правой части равенства (2.2.1) при $m = 1$ получаем соотношение (2.2.6). Полагая в интеграле в правой части (2.2.6) $q = 2$ и имея ввиду равенство

$$\int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right) dt = nh - Si(nh),$$

получаем соотношение (2.2.7), чем и завершаем доказательство следствие 2.2.1.

В завершение этого параграфа отметим, что равенства (2.2.7) в определённом смысле являются распространением одного результата Л.В.Тайкова [46] о наилучшем полиномиальном приближении периодических функций, принадлежащих пространству L_2, структурные свойства которых характеризуются усреднёнными значениями модулей непрерывности первого порядка производной $f^{(r)} \in L_2$, на случай, когда указанные свойства характеризуются τ-модулем первого порядка для $f^{(r)} \in L_2$.

§2.3. Точные значения n-поперечников класса $W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h)$ и некоторые следствия из полученных результатов

В этом параграфе вычислим точные значения n-поперечников, перечисленных в первом параграфе второй главы, для произвольной неотрицательной неэквивалентной нулю весовой функции и выведем некоторые следствия из полученных результатов для конкретных весовых функций.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $r\in\mathbb{N}$, $1/r<q\le 2$, $0<h\le 3\pi/(4n)$. *Тогда при любом* $n\in\mathbb{N}$ *выполняются равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big)=\lambda_{2n-1}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big)=$$

$$=E\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2}=$$

$$=2^{-1/2}n^{-r}\left\{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/q}, \tag{2.3.1}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ *или* $\pi_n(\cdot)$.

Доказательство. В самом деле, из соотношения (1.3.12) для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ запишем неравенство

$$E_{n-1}(f)_2\le 2^{-1/2}\,n^{-r}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/q}\left\{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,\varphi(t)dt\right\}^{1/q}. \tag{2.3.2}$$

Из неравенства (2.3.2), с учётом определения класса $W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h)$ и соотношения (2.1.10), получаем оценки сверху

$$\lambda_{2n}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big)\le\lambda_{2n-1}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big)\le$$

$$\leq d_{2n-1}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big)\leq E\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2}\leq$$

$$\leq 2^{-1/2}n^{-r}\left\{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/q}. \qquad (2.3.3)$$

Для получения соответствующих оценок снизу всех рассматриваемых n-поперечников оценим бернштейновский n-поперечник $b_{2n}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big)$ снизу. С этой целью введём в рассмотрение $(2n+1)$-мерный шар полиномов

$$\overline{\mathbb{B}}_{2n+1}:=$$

$$:=\left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}:\ \|T_n\|\leq 2^{-1/2}n^{-r}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}\right\} \qquad (2.3.4)$$

и покажем, что выполняется включение $\overline{\mathbb{B}}_{2n+1}\subset W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h)$. Для этого используем одно неравенство, полученное Л.В.Тайковым в работе [48] для произвольных тригонометрических полиномов $T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}$:

$$\left\|\Delta_h^1T_n^{(r)}\right\|_2^2\leq 2(1-\cos nh)\,n^{2r}\|T_n\|_2^2,\quad 0<nh\leq\pi. \qquad (2.3.5)$$

Из соотношения (2.3.5) для любого тригонометрического полинома $T_n\subset\overline{\mathbb{B}}_{2n+1}$ имеем

$$\tau_1^2\Big(T_n^{(r)};1,t\Big)_{2,2}=\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^t\left\|\Delta_h^1T_n^{(r)}\right\|_2^2dh\leq$$

$$\leq 2n^{2r}\|T_n\|_2^2\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t(1-\cos nh)dh=2n^{2r}\|T_n\|_2^2\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right). \qquad (2.3.6)$$

Отсюда получаем

$$\tau_1^q\Big(T_n^{(r)};1,t\Big)_{2,2}\leq 2^{q/2}n^{rq}\|T_n\|_2^q\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2},\ 0<nt\leq\pi.$$

Обе части полученного неравенства умножим на функцию $\varphi(t) \geq 0$ и проинтегрируем по переменному t от 0 до h $(0 < h \leq \pi)$. В результате имеем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \tau_1^q\Big(T_n^{(r)};1,t\Big)_{2,2}\varphi(t)dt \leq 2^{q/2}n^{rq}\|T_n\|_2^q\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt \leq$$

$$\leq \left\{\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right\}\left\{\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1} = 1.$$

Таким образом, из полученного неравенства следует, что $\overline{\mathbb{B}}_{2n+1} \subset W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h)$. Теперь, используя определение бернштейновского n-поперечника и неравенства между n-поперечниками (2.1.10), запишем оценки снизу

$$\lambda_{2n}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big) \geq b_{2n}\Big(W_q^{(r)}(\tau_1;\varphi,h);L_2\Big) \geq b_{2n}\Big(\overline{\mathbb{B}}_{2n+1};L_2\Big) \geq$$

$$\geq 2^{-1/2}n^{-r}\left\{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/q}. \qquad (2.3.7)$$

Требуемые равенства (2.3.1) следуют из сопоставления неравенств (2.3.3) и (2.3.7), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.1.

Из доказанной теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы 2.3.1 при $q = 2$ и $\varphi(t) \equiv 1$ справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;1,h);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;1,h);L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;1,h);\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} = n^{-r}\left\{\frac{nh}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}.$$

Следствие 2.3.2. *В условиях теоремы 2.3.1 при $q = 2$, $\varphi(t) \equiv t$ имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,h);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,h);L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,h);\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} = \frac{1}{n^r h}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2},\ 0<nh\le\pi.$$

В частности, при $nh=\pi$ имеем:

$$\lambda_{2n}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,\pi/n);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,\pi/n);L_2\Big) =$$

$$= E\Big(W_2^{(r)}(\tau_1;t,\pi/n);\mathscr{T}_{2n-1}\Big)_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2-4}}\cdot\frac{1}{n^{r-1}},\ r\in\mathbb{N}.$$

В 1910 году Лебегом в терминах модулей непрерывности первого порядка $\omega(f;\delta)$ впервые были получены оценки скорости сходимости к нулю коэффициентов Фурье функции $f\in\mathbb{C}[0,2\pi]$. Эти оценки уточняли известные результаты Римана о скорости сходимости к нулю коэффициентов Фурье при $n\to\infty$. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций в разное время рассматривались А.В.Ефимовым [21], А.Ф.Тиманом [51], Н.П.Корнейчуком [29, 30], В.И.Бердышевым [7, 8], С.Милорадовичем [35, 36], С.А.Теляковским [49, 50], А.И.Степанцом [44]. Все вышеперечисленные результаты подытожены в монографии А.И.Степанца [44]. Аналогичные вопросы для некоторых классов дифференцируемых функций рассмотрены С.Б.Вакарчуком [10, 13, 14, 16, 17], М.Ш.Шабозовым [58–63] и многими другими математиками.

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащий пространству L_2, то требуется найти величину

$$V_n(\mathfrak{M}) = \sup\Big\{\,|a_n(f)|, |b_n(f)|:\ f\in\mathfrak{M}\,\Big\},$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f.

Для рассмотренных выше классов функций, по нашему мнению, эта задача также имеет определённый интерес. Из доказанной теоремы 2.3.1 в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Теорема 2.3.2. *Если выполнены условия теоремы 2.3.1, то справедливы равенства*

$$V_n\left(W_q^{(r)}(\tau_1;1,h)\right) = \sup\Big\{\,|a_n(f)|, |b_n(f)|:\ f\in W_q^{(r)}(\tau_1;1,h)\,\Big\} =$$

$$=2^{-1/2}\,n^{-r+1/2}\left\{\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}.$$

В частности, при $q=2$ *имеем*

$$V_n\left(W_2^{(r)}(\tau_1;1,\pi/n)\right)=\sup\Big\{\,|a_n(f)|,|b_n(f)|:\ f\in W_q^{(r)}(\tau_1;1,\pi/n)\,\Big\}=$$

$$=n^{-r}\left\{\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\right\}^{1/2}.$$

Доказательство. Без умаления общности, докажем утверждение теоремы, например, для косинус-коэффициентов Фурье $a_n(f)$. В силу ортогональности частичной суммы $S_{n-1}(f)$ и функции $\cos nx$ формулу косинус-коэффициентов Фурье $a_n(f)$ представим в следующем виде:

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[f(x)-S_{n-1}(f)]\cos nxdx. \qquad (2.3.8)$$

Применяя к интегралу в правой части (2.3.8) неравенство Гёльдера, с учётом (1.1.4) и определения класса $W_q^{(r)}(\tau_1;1,h)$, из соотношения (2.3.2) получим оценку сверху

$$\sup\Big\{\,|a_n(f)|:\ f\in W_q^{(r)}(\tau_1;1,h)\Big\}\le$$

$$\le\sup\Big\{E_n(f)_2:\ f\in W_q^{(r)}(\tau_1;1,h)\Big\}=E\left(W_q^{(r)}(\tau_1;1,h);\mathscr{T}_{2n-1}\right)_{L_2}=$$

$$\le 2^{-1/2}\,n^{-r+1/2}\left\{\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}. \qquad (2.3.9)$$

С целью получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_1(x)=2^{-1/2}\,n^{-r+1/2}\left\{\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}\cos nx.$$

Легко заметить, что $f_1 \in W_q^{(r)}(\tau_1; 1, h)$. Следовательно

$$\sup\left\{\, |a_n(f)| :\; f \in W_q^{(r)}(\tau_1; 1, h)\right\} \geq |a_n(f_1)| =$$

$$= 2^{-1/2}\, n^{-r+1/2} \left\{ \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right\}^{-1/q}. \tag{2.3.10}$$

Сравнивая неравенства (2.3.9) и (2.3.10), получаем

$$\sup\left\{\, |a_n(f)| :\; f \in W_q^{(r)}(\tau_1; 1, h)\right\} =$$

$$= 2^{-1/2}\, n^{-r+1/2} \left\{ \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right\}^{-1/q}.$$

Аналогичный результат можно получить и для синус-коэффициента Фурье $b_n(f)$, чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.2.

Аналогичным образом доказывается следующая

Теорема 2.3.3. *Если выполнены условия теоремы 2.3.1, то при* $q = 2$ *и* $\varphi(t) \equiv t$ *имеют место равенства*

$$V_n\left(W_2^{(r)}(\tau_1; t, h)\right) = \sup\left\{\, |a_n(f)|, |b_n(f)| :\; f \in W_2^{(r)}(\tau_1; t, h)\,\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^r h}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2},\; 0 < nh \leq \pi.$$

В частности, при $nh = \pi$ *имеют место равенства*

$$V_n\left(W_2^{(r)}(\tau_1; t, \pi/n)\right) = \sup\left\{\, |a_n(f)|, |b_n(f)| :\; f \in W_2^{(r)}(\tau_1; t, \pi/n)\,\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \cdot \frac{1}{n^{r-1}};\; r \in \mathbb{N}.$$

§2.4. Точные значения n-поперечников класса $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$

Следуя работе [61] и полагая при $t=0$ значение функции $\dfrac{\sin t}{t}$ равным 1, через t_* обозначим величину её аргумента, при котором эта функция достигает на полусегменте $[0,\infty)$ своего наименьшего значения. При этом t_* $(4,49<t_*<4,51)$ есть минимальный положительный корень уравнения $\operatorname{tg} t=t$. Полагаем

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*=\begin{cases}1-\dfrac{\sin t}{t}, & \text{если }\ 0\le t\le t_*,\\[2mm] 1-\dfrac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если }\ t_*\le t<\infty.\end{cases}$$

В этих обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.1. *Пусть $1/r<q\le 2; m,n\in\mathbb{N}; r\in\mathbb{Z}_+$. Если мажоранта Φ при любых $h\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi^q(h)}{\Phi^q(\pi/n)}\ge\frac{\pi}{nh}\left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{q/2}dt\right)\left(\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right)^{-1},\qquad(2.4.1)$$

то имеют место равенства

$$\lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)=E(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}=$$

$$=\frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}n^r}\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),\qquad(2.4.2)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (2.4.1), не пусто.

Доказательство. В самом деле, для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ из соотношения (1.3.17) при $\varphi\equiv 1$ имеем

$$E_{n-1}(f)_2\le\frac{\left(\int\limits_0^h\tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,dt\right)^{1/q}}{\sqrt{2}n^r\left(\int\limits_0^h\left(1-\dfrac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}dt\right)^{1/q}}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$ и последнее неравенство, запишем его в нужном нам виде

$$E_{n-1}(f)_2\le\frac{\left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_0^h\tau_1^q(f^{(r)};1,t)_{2,2}\,dt\right)^{1/q}}{\sqrt{2}n^r\left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_0^h\left(1-\dfrac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}dt\right)^{1/q}}.$$

Для произвольной функции $f\in W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$ из последнего неравенства при $h=\pi/n$ имеем

$$E_{n-1}(f)_2\leqslant E(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}\leqslant$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2}n^r}\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2}dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}n^r}\left(\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\qquad(2.4.3)$$

Воспользуясь неравенством (2.4.3) и соотношением (2.1.10) между n-поперечниками, запишем оценки сверху

$$b_n(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)\le d^n(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)\le d_n(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)\le$$

$$\le\delta_n(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)\le\pi_n(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)\le E(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2}\le$$

$$\le\frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}n^r}\left(\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right)^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\qquad(2.4.4)$$

Для получения оценок снизу указанных n-поперечников рассмотрим $2n$-поперечник $b_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2)$. Введём в рассмотрение $(2n+1)$-мерный шар тригонометрических полиномов

$$\mathbb{B}^*_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathscr{T}_{2n+1} : \ \|T_n\|_2 \leq \frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}n^r} \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right)^{-1/q} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и докажем включение $\mathbb{B}^*_{2n+1} \subset W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi)$. Используя неравенство (2.3.6), запишем

$$\tau_1^q\Big(T_n^{(r)}; t\Big)_{2,2} \leq 2^{q/2} n^{rq} \|T_n\|_2^q \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{q/2}. \tag{2.4.5}$$

Из неравенства (2.4.5) с учётом определения класса $W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi)$ и условия (2.4.1) теоремы для произвольного полинома $T_n \in \mathbb{B}^*_{2n+1}$ и $h \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ будем иметь

$$\frac{1}{h} \int\limits_0^h \tau_1^q\Big(T_n^{(r)}; 1, t\Big)_{2,2} dt \leq \frac{1}{h} 2^{q/2} n^{rq} \|T_n\|_2^q \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{q/2} dt \leq$$

$$= \frac{\pi}{nh} \Phi^q\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{q/2} dt \right) \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right)^{-1} \leq \Phi^q(h).$$

Отсюда сразу следует включение $\mathbb{B}^*_{2n+1} \subset W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника и неравенства (2.1.10) между рассматриваемыми n-поперечниками, запишем оценки снизу

$$\lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi); L_2) \geq b_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi); L_2) \geq b_{2n}(\mathbb{B}^*_{2n+1}; L_2) \geq$$

$$\geq \frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}n^r} \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right)^{-1/q} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.4.6}$$

Требуемые равенства (2.4.2) получаем из сопоставления неравенств (2.4.4) и (2.4.6).

Покажем, что функция $\Phi_*(t) = t^{\alpha/q}$, где

$$\alpha = \pi \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right)^{-1} - 1, \tag{2.4.7}$$

удовлетворяет ограничению (2.4.1).

Вначале найдем оценки сверху и снизу величины α. Для получения указанных оценок воспользуемся двойным неравенством

$$\left(\frac{t}{\pi}\right)^2 < 1-\frac{\sin t}{t} < \frac{t}{\pi}, \quad t\in(0,\pi).$$

Возведя в степень $q/2$ $(0<q\le 2)$ последнее неравенство, получаем

$$\left(\frac{t}{\pi}\right)^q < \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} < \left(\frac{t}{\pi}\right)^{q/2}, \quad t\in(0,\pi). \tag{2.4.8}$$

Интегрируя неравенство (2.4.8) на отрезке $[0,\pi]$, имеем

$$\int\limits_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}\right)^q dt < \int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt < \int\limits_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}\right)^{q/2} dt.$$

Отсюда следует

$$\frac{\pi}{\int\limits_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}\right)^{q/2} dt} - 1 < \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt} - 1 < \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}\right)^{q} dt} - 1.$$

Из последнего неравенства в силу (2.4.7) запишем

$$\frac{1}{\int\limits_0^1 t^{q/2}dt} - 1 < \alpha < \frac{1}{\int\limits_0^1 t^{q}dt} - 1.$$

Отсюда получаем следующие границы измерения значений α:

$$\frac{q}{2} < \alpha < q.$$

Подставляя функцию Φ_* в (2.4.1), получаем неравенство

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha+1} \ge \left(\int\limits_0^{nh} \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{q/2} dt\right) \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt\right)^{-1}. \tag{2.4.9}$$

С учётом равенства (2.4.7) неравенство (2.4.9) примет вид

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha+1} \ge \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_0^{nh} \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{q/2} dt.$$

Полагая $nh = \mu$, $0 \le \mu < \infty$, перепишем последнее неравенство в следующем виде

$$\mu^{\alpha+1} \ge \pi^{\alpha}(\alpha+1) \int\limits_{0}^{\mu} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_{*}^{q/2} dt. \qquad (2.4.10)$$

Для доказательства справедливости неравенства (2.4.10) введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \pi^{\alpha}(\alpha+1) \int\limits_{0}^{\mu} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_{*}^{q/2} dt. \qquad (2.4.11)$$

Требуется показать, что функция $\varphi(\mu) \ge 0$ для любых значений $0 \le \mu < \infty$. Рассуждение проведём отдельно для каждого из трёх случаев:

$$\textbf{I}.\ 0 \le \mu \le \pi; \quad \textbf{II}.\ \pi \le \mu \le t_*; \quad \textbf{III}.\ t_* \le \mu < \infty.$$

I. Пусть $0 \le \mu \le \pi$. В этом случае, воспользовавшись неравенством

$$\sin t \ge t - \frac{t^3}{6}$$

при $0 \le t \le \pi$, с учётом неравенства (2.4.10) запишем

$$\varphi(\mu) \ge \mu^{\alpha+1} \left(1 - \frac{\pi^{\alpha}(\alpha+1)\mu^{q-\alpha}}{\sqrt{6}(q+1)}\right). \qquad (2.4.12)$$

Из неравенства (2.4.12) следует, что при $\mu \to 0+0$ функция $\varphi(\mu)$ принимает положительные значения.

Покажем, что функция φ является знакопостоянной на интервале $(0, \pi)$. Для этого, рассуждая от противного, полагаем, что на множестве $(0, \pi)$ существует некоторая точка, в которой φ меняет свой знак. Поскольку, как следует из формул (2.4.7) и (2.4.11), $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, то в силу теоремы Ролля производная первого порядка

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)\left(\mu^{\alpha} - \pi^{\alpha}\left(1 - \frac{\sin \mu}{\mu}\right)^{q/2}\right) \qquad (2.4.13)$$

должна иметь на интервале $(0,\pi)$ не менее двух различных нулей. Столько же нулей и в тех же точках на $(0,\pi)$ будет иметь и функция

$$\varphi_1(\mu) := \mu^{2\alpha/q} - \pi^{2\alpha/q}\left(1 - \frac{\sin\mu}{\mu}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu}\Big(\mu^{2\alpha/q} - \pi^{2\alpha/q}\left(\mu - \sin\mu\right)\Big) := \frac{1}{\mu}\,\varphi_2(\mu). \tag{2.4.14}$$

Это же касается и только что введенной функции φ_2. Поскольку $\varphi_2(0) = \varphi_2(\pi) = 0$, то производная первого порядка

$$\varphi_2'(\mu) = \left(\frac{2\alpha}{q} + 1\right)\,\mu^{2\alpha/q} - \pi^{2\alpha/q}(1 - \cos\mu) \tag{2.4.15}$$

должна иметь на множестве $(0,\pi)$ не менее трех различных нулей. Учитывая, что $\varphi_2'(0) = 0$, производная второго порядка

$$\varphi_2''(\mu) = \left(\frac{2\alpha}{q} + 1\right)\frac{2\alpha}{q}\,\mu^{2\alpha/q-1} - \pi^{2\alpha/q}\sin\mu \tag{2.4.16}$$

должна иметь на $(0,\pi)$ также не менее трех различных нулей. Так как $2\alpha/q - 1 > 0$ в силу равенства $\alpha > q/2$, то $\varphi_2''(0) = 0$. Это означает, что производная третьего порядка

$$\varphi_2'''(\mu) = \left(\frac{2\alpha}{q} + 1\right)\frac{2\alpha}{q}\left(\frac{2\alpha}{q} - 1\right)\,\mu^{2(\alpha/q-1)} - \pi^{2\alpha/q}\cos\mu \tag{2.4.17}$$

будет иметь на $(0,\pi)$ не менее трех различных нулей. Учитывая неравенство $\alpha < q$, отмечаем, что $\mu^{2(\alpha/q-1)}$ является монотонно убывающей выпуклой вниз положительной функцией, расположенной в первом квадранте. Исходя из вида функции φ_2''' и чисто геометрических соображений, заключаем, что она может иметь на $(0,\pi)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (2.4.10) на интервале $(0,\pi)$.

Рассмотрим далее случай **II**, когда $\pi \leqslant \mu \leqslant t_*$ $(4,49 < t_* < 4,51)$. Поскольку на данном множестве функция $\cos\mu$ принимает отрицательные значения, то из формулы (2.4.17) получаем $\varphi_2'''(\mu) > 0$. Следовательно, на отрезке $[\pi, t_*]$ вторая производная φ_2'' является возрастающей функцией. Поскольку в силу (2.4.16) $\varphi_2''(\pi) > 0$, то и для любого значения $\mu \in [\pi, t_*]$ получаем $\varphi_2''(\mu) > 0$. Отсюда следует, что φ_2' также является возрастающей функцией на отрезке $[\pi, t_*]$. Учитывая, что $\alpha > q/2$, и используя соотношение (2.4.15), имеем $\varphi_2'(\pi) = \left(\dfrac{2\alpha}{q} - 1\right) \pi^{2\alpha/q} > 0$. Поскольку в силу указанного $\varphi_2'(\mu) > 0$ для любого $\mu \in [\pi, t_*]$, то функция φ_2 будет возрастающей на множестве $[\pi, t_*]$. Из формулы (2.4.14) получаем $\varphi_2(\pi) = 0$. Следовательно, $\varphi_2(\mu) \geqslant 0$ для произвольного $\mu \in [\pi, t_*]$. Указанное на основании (2.4.14) касается и функции φ_1. Учитывая вид φ_1 и соотношение (2.4.13), для любого $\pi \leqslant \mu \leqslant t_*$ запишем неравенство $\varphi'(\mu) \geqslant 0$. Поскольку $\varphi(\pi) = 0$ то очевидно, что $\varphi(\mu) \geqslant 0$, где $\pi \leqslant \mu \leqslant t_*$, а это означает справедливость неравенства (2.4.10) в случае **II**.

Переходя к случаю **III**, когда $t_* \leqslant \mu < \infty$, запишем соотношение (2.4.11) в следующем виде:

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \pi^{\alpha}(\alpha+1)\left(\int_0^t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt + (\mu - t_*)\left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{q/2}\right).$$

Отсюда получаем

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)\ \mu^{\alpha} - \pi^{\alpha}(\alpha+1)\left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{q/2}. \tag{2.4.18}$$

Путем непосредственных вычислений можно убедиться в том, что $t_*/\pi > 1 - \sin(t_*)/t_*$. Учитывая данное неравенство и соотношение $\alpha > q/2$, из (2.4.18) имеем

$$\varphi'(t_*) = (\alpha+1)\pi^{\alpha}\left(\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{\alpha} - \left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{q/2}\right) >$$

$$> (\alpha+1)\pi\left(\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{q/2} - \left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{q/2}\right) > 0. \tag{2.4.19}$$

Поскольку, как следует из формулы (2.4.18), φ' является монотонно возрастающей функцией, то с учетом соотношения (2.4.19) получаем $\varphi'(\mu) \geqslant 0$ для любого $t_* \leqslant \mu < \infty$. Поскольку, как отмечалось в случае **II**, $\varphi'(t_*) \geqslant 0$, то в силу выше изложенного имеем $\varphi'(\mu) \geqslant 0$, где $\mu \in [t_*, \infty)$. Это означает, что неравенство (2.4.10) справедливо и в данном случае. Теорема 2.4.1. доказана.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 2.4.1. *При выполнении условий теоремы 2.4.1 имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2) = \lambda_{2n}(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2) =$$

$$= E(W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi);\mathscr{T}_{2n-1})_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{2}(1-Si(\pi)/\pi)^{1/2}}\cdot\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

В связи с утверждением теоремы 2.4.1, определённый интерес представляет изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(r-s)})_{L_2}$, где $s = 1,\ldots,r-1$; $r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, на классе функций $W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi)$.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $q = 2$, $r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. *Если функция* Φ *при любом* $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^2 \geq \frac{\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* dt}{nh\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)},$$

то для $s = 1,\ldots,r-1$ *справедливы равенства*

$$\sup\Big\{E_{n-1}(f^{(r-s)})_2:\ f \in W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi)\Big\} = \frac{\Phi(\pi/n)}{\sqrt{2}n^s(1-Si(\pi)/\pi)^{1/2}}. \qquad (2.4.20)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi)$ из соотношения (1.3.25) при $h = \pi/n$ и $\varphi(t) \equiv 1$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(r-s)})_2 \leq \frac{\Phi(\pi/n)}{\sqrt{2}n^s(1-Si(\pi)/\pi)^{1/2}}. \qquad (2.4.21)$$

При доказательстве теоремы 2.4.1 было показано, что множество тригонометрических полиномов $T_n \in \mathscr{T}_{2n+1}$, удовлетворяющих условию

$$\|T_n\|_2 \leq \frac{\sqrt{\pi}\,\Phi(\pi/n)}{\sqrt{2}\,n^r(\pi - Si(\pi))^{1/2}},$$

принадлежит классу $W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi)$. Введём в рассмотрение экстремальную функцию

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Phi(\pi/n)}{\sqrt{2}\,n^r(\pi - Si(\pi))^{1/2}}\cos nx,$$

которая принадлежит классу $W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi)$. Поскольку

$$f_2^{(r-s)}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Phi(\pi/n)}{\sqrt{2}\,n^s(\pi - Si(\pi))^{1/2}}\cos\left(nx + \frac{\pi}{2}(r-s)\right),$$

то

$$E_{n-1}(f_2^{(r-s)})_2 = \frac{\sqrt{\pi}\,\Phi(\pi/n)}{\sqrt{2}\,n^s(\pi - Si(\pi))^{1/2}}.$$

Отсюда получаем

$$\sup\Big\{E_{n-1}(f^{(r-s)})_2 :\ f \in W_2^{(r)}(\tau_1;\Phi)\Big\} \geq$$

$$\geq E_{n-1}(f_2^{(r-s)})_2 = \frac{\Phi(\pi/n)}{\sqrt{2}n^s(1 - Si(\pi)/\pi)^{1/2}}. \tag{2.4.22}$$

Сравнивая неравенства (2.4.21) и (2.4.22), получаем требуемые равенства (2.4.20), чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.2.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- Найдены точные неравенства типа Джексона – Стечкина между величинами наилучших среднеквадратичных приближений периодических дифференцируемых функций и τ-модулями непрерывности высших порядков r-ых производных функций.
- Найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых τ-модулями непрерывности m-го порядка.
- Вычислены точные значения различных n-поперечников на классах функций, задаваемых усредненными с весом значениями τ-модулей непрерывности высших порядков производных.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с оптимизацией точных констант в неравенстве Джексона-Стечкина для других модификаций модулей непрерывности с тем, чтобы иметь возможность выявить наименьшую константу Джексона-Стечкина среди различных неравенств указанного типа. Кроме того, это даёт возможность выбора конкретной модификации модуля непрерывности при определении функциональных классов в задаче отыскания точных значений n-поперечников, исходя из содержательной сущности исследуемых задач.

Список литературы

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки, 2004, т.76, №6, с.803-811.
2. Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Доклады АН ТаджССР, 1985, т.28, №6, с.309-313.
3. Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет, 1986, с.3-10.
4. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки, 1986, т.39, №5, с.651-664.
5. Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки, 1996, т.60, №3, с.333-355.
6. Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона – Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Матем. заметки, 1999, т.65, №6, с.928-932.
7. Бердышев В.И. Приближение периодических функций в среднем: дис. ... канд. физ.-мат. наук / СОМИ АН СССР. Свердловск, 1968, 83 с.
8. Бердышев В.И. Наилучшее приближение в L_p классом функций ограниченной вариации // Приближение функций полиномами и сплайнами: Сб. ст. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985, с.72-82.
9. Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Матем. заметки, 1999, т.66, №4, с.494-499.
10. Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Матем. заметки, 2001, т.70, №3, с.334-345.

11. Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2 approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East Journal on Approx., 2004, v.10, №1-2, pp.27-39.

12. Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал, 2004, т.56, №11, с.1458-1466.

13. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.

14. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки, 2006, т.80, №1, с.11-19.

15. Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia, 2008, v.14, №4, pp.411-421.

16. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки, 2009, т.86, №3, с.328-336.

17. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки, 2012, т.92, №4, с.497-514.

18. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Український мат. вісник, 2014, т.11, №3, с.417-441.

19. Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences, 2015, v.206, №1, p.97-114.

20. Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН, 2002, т.385, №1, с.11-14.
21. Ефимов А.В. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР, сер. матем., 1960, т.24, №2, с.243-296.
22. Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР, 1967, т.201, с.263-266.
23. Жук В.В. О порядке приближения непрерывной периодической функции линейными методами // Изв. вузов, Математика, 1969, №10, с.40-50.
24. Жук В.В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. матем. журнал, 1971, т.12, №6, с.1283-1291.
25. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: ТулГУ, 1995, 192 с.
26. Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. **I** // Сердика Бълг. Мат. Списание, 1982, т.8, №3, с.262-279.
27. Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. **II** // Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in $C[-1;1]$ and $L_p[-1;1]$. Сердика Бълг. Мат. Студ., 1983, т.5, с.151-163.
28. Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math., 1936, v.37, pp.107-110.
29. Корнейчук Н.П. Верхние грани наилучших приближений на классах дифференцируемых периодических функций в метриках C и L // ДАН СССР, 1970, т.190, №2, с.269-271.
30. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976, 320 с.

31. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наукова думка, 1982, 252 с.

32. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки, 1978, т.24, №6, с.785-792.

33. Лигун А.А. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки, 1980, т.27, №1, с.61-75.

34. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Матем. заметки, 1988, т.43, №6, с.757-769.

35. Miloradovic S. Aproksimacje funkcija Fourier-ovih sumama i goraja granica Fourier-ovih koeficijenata // Magistarski rad. Beograd, 1977.

36. Милорадович С. О верхних гранях коэффициентов Фурье и некоторых более общих функционалов // Матем. заметки, 1982, т.32, №5, с.707-720.

37. Напеденина А.Ю. О совпадении классов функций, определяемых оператором обобщённого сдвига или порядком наилучшего приближения // Вестник Моск. университета. Серия 1. Матем., мех., 2004, №2, с.29-33.

38. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985, 252 p.

39. Потапов М.К. О применении одного оператора обобщённого сдвига в теории приближений // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем., мех., 1998, №3, с.38-48.

40. Потапов М.К., Казимиров Г.Н. О приближении алгебраическими многочленами функций, имеющих данный порядок k-го обобщённого модуля гладкости // Мат. заметки, 1998, т.63, №3, с.425-436.

41. Потапов М.К., Бериша Ф.М. О связи между наилучшими приближениями алгебраическими многочленами и r-м обобщённым модулем гладкости // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. – М.: Изд-во АФЦ, 1999, с.187-213.

42. Потапов М.К. О применении несимметричных операторов обобщённого сдвига в теории приближений // Теория функция, её приложения и смежные вопросы. Материалы V Казанской международной летней школы-конференции (Казань, 27 июня - 4 июля 2001 г.), Тр. матем. центра им. Н.И.Лобачевского, Казань, 2001, т.78, с.185-189.

43. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник, 1994, т.185, №8, с.81-102.

44. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наукова думка, 1981, 340 с.

45. Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник, 1975, т.98(140), №3(11), с.395-415.

46. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.

47. Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки, 1977, т.22, №4, с.535-542.

48. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.

49. Теляковский С.А. Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. матем. журнал, 1963, т.4, №6, с.1404-1411.

50. Теляковский С.А. Оценки снизу интегрального модуля непрерывности функции через её коэффициенты Фурье // Матем. заметки, 1992, т.52, №5, с.107-112.

51. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Фзматгиз, 1960, 624 с.

52. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук, 1960, т.15, №3(93), с.81-120.

53. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 325 с.

54. Тригуб Р.М. Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968, т.32, №1, с.24-49.

55. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки, 1967, т.2, №5, с.513-522.

56. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Приближение функций в среднем. Сборник работ, Тр. МИАН СССР, 1967, т.88, с.71-74.

57. Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leq p < 2)$ с точной константой // Труды МИРАН, 1992, т.198, с.232-241.

58. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.

59. Шабозов М.Ш. Точные неравенства типа Джексона – Стечкина для 2π-периодических функций в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал, 2011, т.63, №10, с.1040-1048.

60. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775.

61. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал, 2011, т.52, №6, с.1414-1427.

62. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory, 2012, v.164, issue 1, pp.869-878.

63. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica, 2012, tomus 38, №2, pp.154-165.
64. Шабозов М.Ш., Олифтаев Н.Ф. Наилучшие приближения и точные значения поперечников некоторых классов периодических функций в L_2 // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2013, №4(153), с.23-31.
65. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона – Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // ДАН России, 2013, т.451, №6, с.625-628.
66. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал, 1991, т.43, №1, с.125-129.
67. Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сб. научн. трудов. Калининский гос. ун-т, Калинин, 1988, с.100-114.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК:

68. Олифтаев Н.Ф. О значениях поперечников некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 // Известия Академии Наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2013, №1(150), с.21-31.
69. Шабозов М.Ш., Олифтаев Н.Ф. Наилучшие приближения и точные значения поперечников некоторых классов периодических функций в L_2 // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2013, №4(153), с.23-31.

70. Олифтаев Н.Ф. Неравенства Джексона для τ-модулей гладкости и значения поперечников в L_2 // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2015, т.58, №12, с.1071–1077.
71. Олифтаев Н.Ф. Точные неравенства Джексона-Стечкина в терминах обобщённых модулей непрерывности // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г., с.191-194).

В других изданиях:

72. Олифтаев Н.Ф. О наилучших приближениях периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г., с.194-198).
73. Олифтаев Н.Ф. О наилучшем приближении периодических функций в пространстве L_2. Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 2014, №2(150), с.62-67).
74. Олифтаев Н.Ф. Об одной экстремальной аппроксимационной характеристике для периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2. Материалы международной научной конференции, посвящённой 80-летию член-корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стаценко Владислава Яковлевича „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г., с.34-36)
75. Олифтаев Н.Ф. Наилучшие приближения и точные значения поперечников периодических функций в L_2. Материалы международной научной конференции, посвящённой 25-летию Государственной независимости Республики Таджикистан „Современные проблемы математики и её приложений" (Душанбе, 3-4 июня 2016 г., с.81-85)