

# О Т З Ы В

## официального оппонента на диссертацию Олифтаева Нодира Фезилобековича "Неравенства Джексона–Стечкина для $\tau$ -модулей гладкости и значения поперечников в $L_2$ ",

представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

### 1. Актуальность избранной темы

Диссертация посвящена экстремальным задачам теории приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве  $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ . В ней изучаются точные неравенства Джексона–Стечкина в терминах усредненных  $\tau$ -модулей непрерывности порядка  $m \in \mathbb{N}$ , а также точные значения различных  $n$ -поперечников классов функций, задаваемых указанными характеристиками гладкости (либо их мажорантами) как самих функций, так и их производных.

В этом направлении теории приближений существенные результаты получены Н.И. Черныхом, В.И. Бердышевым, Л.В. Тайковым, А.А. Лигуном, В.В. Арестовым, В.А. Юдиным, В.И. Ивановым, С.Б. Вакарчуком, М.Ш. Шабозовым, С.Н. Васильевым, А.И. Козко, А.В. Рождественским, А.А. Васильевой, Г.А. Юсуповым и другими математиками. Однако, несмотря на обилие результатов в этом направлении, исследуемая в работе тематика ввиду важности в приложениях полученных результатов, остается актуальной. При этом появившиеся в результате решения экстремальных задач методы оказываются полезными при решении других задач оптимизационного содержания.

В диссертационной работе установлены окончательные оценки наилучших приближений тригонометрическими полиномами посредством  $\tau$ -модулей гладкости произвольного порядка и даны их приложения в задаче отыскания точных значений  $n$ -поперечников некоторых функциональных классов. Следует отметить, что актуальность тематики диссертационной работы в настоящее время связана с применениями поперечников в общей теории оптимального восстановления и кодирования функций, в частности в задачах, возникающих при оптимизации и обработке сигналов с шумами.

### 2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все утверждения теорем, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и неравенства полностью обоснованы.

### 3. Достоверность и новизна полученных результатов

Полученные в диссертации результаты являются новыми и дополняют исследования указанных в первом пункте ученых. В частности, обобщены недавно полученные результаты С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, К.Тухлиева в пространстве  $L_q (1 \leq q < \infty)$ . По сравнению с ранее опубликованными результатами в этом направлении диссертанту удалось получить более точные результаты, а именно:

- найдены точные неравенства Джексона–Стечкина между величинами наилучших полиномиальных приближений функций из  $L_2^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $L_2^{(0)} \equiv L_2$ ) и  $\tau$ -модулями непрерывности высших порядков  $r$ -ых производных функций;

- найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых  $\tau$ -модулями непрерывности  $m$ -го порядка;
- вычислены точные значения различных  $n$ -поперечников на классах функций, задаваемых усредненными с весом значениями  $\tau$ -модулей непрерывности высших порядков производных в  $L_q$ -метрике.

#### 4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов

Основные результаты диссертации носят теоретический характер и имеют важное значение для дальнейшего развития теории приближения функций. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся проблемами теории приближения функций, в том числе в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Институте математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан, в учебном процессе при чтении спецкурсов в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, Уральском федеральном университете им. первого Президента России Б.Н.Ельцина, Таджикском национальном университете, Хорогском государственном университете им. М.Назаршоева и других.

#### 5. Оценка содержания диссертации, ее завершенность

Диссертация Н. Ф. Олифтаева объемом 82 страницы, состоит из введения, двух глав и списка цитированной литературы из 75 наименований.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные результаты, полученные автором.

В первой главе рассматриваются вопросы, связанные с наилучшим приближением периодических функций в метрике пространства  $L_2$  тригонометрическими полиномами порядка  $\leq n - 1$ . В этой главе доказываются точные неравенства типа Джексона–Стечкина в терминах усредненных с весом  $\tau$ -модулей непрерывности высших порядков, принадлежащих пространству  $L_q$  (теоремы 1.2.1-1.3.4, следствия 1.2.1-1.3.4). Вычисляются верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, определяемых  $\tau$ -модулями непрерывности заданного порядка.

В начале второй главы приводятся определения различных  $n$ -поперечников множеств ( $n$ -поперечника Колмогорова, Бернштейна, Гельфанда, линейного и проекционного) и при  $1/r < q \leq 2$ ,  $r, m \in \mathbb{N}$ ,  $h \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  вводятся следующие классы функций

$$W_q^{(r)}(\tau_m; h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2} dt \leq 1 \right\},$$

$$W_q^{(r)}(\tau_1; \varphi, h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, u)_{2,2} \varphi(u) du \leq 1 \right\},$$

$$W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, u)_{2,2} du \leq \Phi^q(h) \right\}.$$

Во втором, третьем и четвертом параграфах второй главы найдены точные значения  $n$ -поперечников по Бернштейну, Колмогорову, Гельфанду, а также значения линейных и проекционных поперечников всех перечисленных выше классов функций.

Диссертация Н. Ф. Олифтаева является самостоятельной, завершенной научной квалификационной работой.

## **6. Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования**

К достоинству диссертации можно отнести следующие полученные в ней основные результаты:

- доказаны точные неравенства Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения функций и  $\tau$ -модулями непрерывности высшего порядка  $r$ -ых производных функций;
- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов дифференцируемых функций из  $L_2$ , задаваемых  $\tau$ -модулями непрерывности  $m$ -го порядка;
- найдены точные значения различных  $n$ -поперечников классов функций, определяемых  $\tau$ -модулями непрерывности высших порядков  $r$ -ых производных функций;
- вычислены точные значения верхних граней модулей коэффициентов Фурье введенных в работе классов функций. Доказано, что указанная верхняя грань совпадает с точными значениями  $n$ -поперечников рассматриваемых классов функций.

В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, отдельного упоминания заслуживает хороший русский язык. Однако в них имеется несколько пробелов, неточностей и опечаток. Вот некоторые из них:

**1** - исторический обзор по данной тематике надо было дополнить результатами А. Пинкуса о приближении периодических классов функций, представимых в виде сверток, и сравнить с ними полученные результаты (см., например, монографию А. Pinkus, *n-widths in the approximation theory*);

**2** - Kamen Ganchev Ivanov – лучше его писать по-русски как К. Г. Иванов, в диссертации же и автореферате – Камен Г. Иванов. Последняя форма записи принята в болгарском языке, но не в русском.

**3** - при упоминании работ предшественников в задаче нахождения точных констант (стр. 29) хорошо было бы упомянуть хотя бы нескольких представителей дальнего зарубежья, например Z. Ditzian, V. Totik, G. Freud, W. Trebels, D. Leviatan, S. Foucart и др.

**4** - в тексте диссертации я не нашел определение слабой эквивалентности. Желательно было бы дать определение или сослаться на классическую монографию Дзядыка (В. К. Дзядык, “Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами”, М.: Наука, 1977).

**5** в формуле (2.1.10) все неравенства можно найти в указанной монографии В. М. Тихомирова, ссылка на книгу Пинкуса не обязательна.

**6** - работа содержит ряд пунктуационных и орфографических ошибок (см., например, стр. 7, 15, 43, 72). В автореферате опечатки и неточности не обнаружены.

Указанные замечания не являются существенными и не влияют на значимость полученных результатов.

## **7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации**

Автореферат соответствует требованиям ВАК МОН РФ, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

## **8. Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011**

Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11.-2011. В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ГОСТ в полной мере.

**9. Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным в "Положении о присуждении ученых степеней" по пунктам 10, 11 и 14**

Диссертация Олифтаева Н.Ф. соответствует критериям, установленным "Положением о присуждении ученых степеней" по пунктам 10, 11 и 14.

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и положения в теории аппроксимации функций, выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствует о личном вкладе автора диссертации в теорию приближения функций. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении разного рода экстремальных задач теории приближения функций.

(П.11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в 8 научных работах, четыре из которых входят в перечень ВАК МОН РФ.

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются.

Диссертация Олифтаева Нодира Фезелобековича на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории приближения функций, и полностью соответствует требованиям П. 9 Положения о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Автор работы, Олифтаев Нодир Фезелобекович, заслуживает присвоения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Официальный оппонент  
доктор физико математических наук,  
по специальности 01.01.01 – вещественный,  
комплексный и функциональный анализ,  
научный сотрудник лаборатории  
вычислительных методов  
механико-математического факультета,  
ФГБОУ ВПО Московского государственного  
университета имени М. В. Ломоносова

А.Р. Алимов  
16.12.2016



Адрес: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, Главное здание,  
механико-математический факультет  
Телефон: +7 (495) 939 56 32  
E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Подпись А.Р. Алимова удостоверяю

И.о. декана механико-математического  
факультета имени М.В.Ломоносова  
профессор

