

## ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе  
Олифтаева Нодира Фезилобековича  
«Неравенства Джексона-Стечкина для  $\tau$ -модулей гладкости и  
значения поперечников в  $L_2$ »,  
представленную на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

### 1. Актуальность избранной темы

Почти во всех областях современной математики важную роль играют задачи аппроксимации более сложных объектов менее сложными. В большинстве таких случаев полезно знать основные методы приближения и минимизации погрешности на заданном классе функций. Во второй половине XX века усилия сильнейших математиков - специалистов по теории аппроксимации были направлены на то, чтобы обозреть проблематику экстремальных задач с единой точки зрения, выделить общие черты в методах их исследования, разработать необходимый математический аппарат. В результате этого были созданы основные методы решения экстремальных задач. При этом экстремальные задачи формулировались как задачи отыскания максимального или минимального значения функции или функционалов на заданном множестве некоторого пространства.

В настоящее время стремительное развитие теории приближения в основном связано с решениями экстремальных задач вариационного содержания на заданных классах функций.

Одной из основных задач теории приближения функций является задача нахождения точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина вида

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\chi}{n^r} \omega_m(f^{(r)}; t/n),$$

где  $f \in L_2^{(r)}$ ,  $0 < t \leq 2\pi$ .

При решении экстремальных задач теории приближения функций в пространствах  $C := C[0, 2\pi]$  и  $L_q := L_q[0, 2\pi]$  ( $1 \leq q < \infty$ ) точные константы в неравенствах Джексона – Стечкина изучались, например, в работах Н.П.Конейчука, Н.И.Черных, Л.В.Тайкова, В.В.Арестова, В.Ю.Попова, А.Г.Бабенко, В.И.Бердышева, В.В.Жука, А.А.Лигуна, В.И.Иванова и О.И.Смирнова, В.А.Юдина, В.В.Шалаева, Д.В.Горбачёва, С.Б.Вакарчука и многих других математиков.

В последнее время при решении экстремальных задач теории приближения функций, исходя из содержательного смысла постановки задачи и сравнения их решения, часто используют различные модификации модуля непрерывности. В некоторых случаях такой подход приводит к неожиданным результатам. В качестве примера укажем на работы В.А.Абилова,

С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, в которых при построении обобщённого модуля непрерывности использовали оператор сглаживания Стеклова.

В диссертационной работе Н.Ф.Олифтаева доказаны оценки наилучших приближений тригонометрическими многочленами посредством  $\tau$ -модулей гладкости  $m$ -го порядка. Определение  $\tau$ -модулей гладкости  $m$ -го порядка впервые было введено Камен Г. Ивановым для исследования поведения наилучшего приближения функций алгебраическими полиномами в пространствах  $L_q[a, b]$  ( $q \geq 1$ ). Им же изучены свойства и связи этих новых модулей гладкости с известными дифференциально-разностными характеристиками. Используя аппарат  $\tau$ -модулей гладкости, в диссертационной работе при аппроксимации периодических дифференцируемых функций получены весьма общие результаты, в частности, содержащие ранее доказанные результаты. Этим объясняется актуальность выбранной темы исследования диссертационной работы.

## **2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации**

Все утверждения теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и неравенства полностью обоснованы.

## **3. Достоверность и новизна полученных результатов**

В диссертации проделана большая, содержательная работа. Все результаты получены автором самостоятельно и являются новыми. Диссертант разработал некоторые новые методы решения экстремальных задач теории приближения в  $L_2$  и получил ряд замечательных результатов, составляющих научную новизну исследований. Полученные в диссертационной работе результаты занимают достойное место наряду с результатами других специалистов, работающих в области теории аппроксимации. Наиболее значимыми из них являются:

1. Найдены точные неравенства Джексона-Стечкина между величинами наилучших полиномиальных приближений функций из  $L_2^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $L_2^{(0)} \equiv L_2$ ) и  $\tau$ -модулями непрерывности высших порядков  $r$ -ых производных функций.

2. Найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых  $\tau$ -модулями непрерывности  $m$ -го порядка.

3. Вычислены точные значения различных  $n$ -поперечников на классах функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями  $\tau$ -модулей непрерывности высших порядков производных в  $L_q$ -метрике.

## **4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов**

Работа носит теоретический характер и имеет важное значение для дальнейшего развития теории аппроксимации. Результаты и методы дис-

сертации могут быть использованы в организациях, научных институтах, занимающихся проблемами теории приближения функций, в том числе в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Институте математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан. Главы диссертации составляют отдельные темы спецкурса в учебном процессе для специалистов математиков в МГУ им. М.В.Ломоносова, Таджикском национальном университете, Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни и в Хорогском государственном университете.

## 5. Оценка содержания диссертации, её завершенность

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводится исторический обзор результатов по исследуемой теме и излагаются основные результаты, полученные в работе.

В первой главе рассматриваются вопросы, связанные с наилучшим среднеквадратическим приближением периодических функций тригонометрическими полиномами. Получен ряд точных неравенств типа Джексона-Стечкина в терминах усреднённых с весом  $\tau$ -модулей непрерывности высших порядков, принадлежащих пространству  $L_q$  ( $1 \leq q < \infty$ ). Вычисляются верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, определяемых  $\tau$ -модулями непрерывности заданного порядка. В частности, из полученных результатов вытекают недавно полученные результаты С.Б.Вакарчука. Обобщается результат М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова, полученный для классических модулей непрерывности высших порядков на случай  $\tau$ -модулей гладкости.

В начале второй главы приводится определение различных  $n$ -поперечников множеств ( $n$ -поперечника Колмогорова, Бернштейна, Гельфанда, линейного и проекционного) и при  $1/r < q \leq 2$ ,  $r, m \in \mathbb{N}$ ,  $h \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  вводятся следующие классы функций

$$W_q^{(r)}(\tau_m; h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2} dt \leq 1 \right\},$$

$$W_q^{(r)}(\tau_1; \varphi, h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, u)_{2,2} \varphi(u) du \leq 1 \right\},$$

$$W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, u)_{2,2} du \leq \Phi^q(h) \right\}.$$

Во втором, третьем и четвертом параграфах второй главы найдены точные значения  $n$ -поперечников по Бернштейну, Колмогорову, Гельфанду, а

также значения линейных и проекционных поперечников всех перечисленных выше классов функций. Параллельно вычислены верхние грани модулей коэффициентов Фурье на указанных выше классах функций. Диссертация Н.Ф.Олифтаева является самостоятельной, завершённой научной квалификационной работой.

## **6. Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования**

К достоинству диссертации можно отнести следующие полученные в ней основные результаты:

1. Доказаны точные неравенства Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функций и  $\tau$ -модулей непрерывности высшего порядка  $r$ -ых производных функций.

2. Найдены точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов дифференцируемых функций из  $L_2$ , задаваемых  $\tau$ -модулями непрерывности  $m$ -го порядка.

3. Найдены точные значения различных  $n$ -поперечников классов функций, определяемых  $\tau$ -модулями непрерывности высших порядков  $r$ -ых производных функций.

4. Вычислены точные значения верхних граней модулей коэффициентов Фурье введенных в работе классов функций. Доказано, что указанная верхняя грань совпадает с точными значениями  $n$ -поперечников рассматриваемых классов функций.

В целом автореферат и диссертационная работа выполнены на достаточно высоком научном уровне. Имеются замечания:

1. Легко видеть, что ограничение  $0 < h \leq 3\pi/(4n)$  при весовых функциях  $\varphi(t) \equiv 1$  и  $\varphi(t) \equiv t$  можно расширить до  $0 < h \leq \pi$  и при этом утверждения указанной теоремы сохраняются.
2. По тексту диссертации имеются замечаний редакционного характера, но мы их здесь не приводим, поскольку все они легко устранимы и не снижают общую высокую оценку диссертационной работы.

## **7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации**

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в печати, в том числе и в изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации, представлены в Международных базах цитирования, доложены на ведущих по данной тематике конференциях и семинарах. Автореферат соответствует требованиям ВАК Минобрнауки РФ, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

## **8. Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011**

Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11.2011. В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ГОСТ в полной мере.

**9. Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным „Положение о присуждении учёных степеней” по пунктам 10, 11 и 14.**

Диссертация Олифтаева Н.Ф. соответствует критериям, установленным „Положением о присуждении учёных степеней” по пунктам 10, 11 и 14.

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и положения в теории аппроксимации функций, выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствует о личном вкладе автора диссертации в теорию приближения функций. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении различных экстремальных задач теории приближения.

(П.11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в 8 научных работах, четыре из которых входят в перечень ВАК МОН РФ.

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются.

Диссертация Олифтаева Нодира Фезилобековича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является завершённой научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории приближения функций, и полностью соответствует требованиям П.9 Положения о присуждении учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент —  
доктор физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 – Вещественный,  
комплексный и функциональный анализ,  
доцент кафедры математического  
анализа и теории функций ТНУ



Г.А. Юсупов  
04.01.2017

Место работы: 734025, Таджикистан,  
г. Душанбе, пр. Рудаки, 17,  
Таджикский национальный университет.  
Тел.: (+992) 93-500-22-14; E-mail: G.7777@mail.ru

Подпись Г.А.Юсупова удостоверяю

Начальник УК ТНУ



Э. Тавкиев  
04.01.2017