«У Т В Е Р Ж Д А Ю»
Ректор Худжандского государственного университета им. Б.Гафурова
________________ А.Т. Максуди
« 31 » декабря 2016 г.

О Т З Ы В

ведущей организации на диссертационную работу Олифтаева Нодира Фезилобековича

на тему „Неравенства Джексона–Стечкина для τ-модулей гладкости и значения поперечников в L_2", представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Актуальность избранной темы

Одной из основных задач теории аппроксимации функций является задача приближённого представления функций некоторого класса при помощи линейной комбинации функций его подкласса, состоящего из более простых в том или ином смысле функций. При этом в первую очередь возникает необходимость получения неулучшаемых оценок погрешности приближения на заданных классах функций. Сформулированная задача относится к экстремальным задачам вариационного содержания, задаваемых на классах функций или на множествах произвольного банахова пространства. Как правило, в экстремальных задачах требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший аппарат приближения.

В решении различных экстремальных задач теории приближения функций существенные результаты были получены С.Н.Бернштейном, А.Н.Колмогоровым, А.Зигмундом, Ж.Фаваром, М.Г.Крейном, Н.И.Ахиезером, С.М.Никольским, С.Б.Стечкиным, В.К.Дзядыком, Н.П.Корнейчуком, В.М.Тихомировым и их учениками и последователями. При этом результаты окончательного характера были получены на классах периодических функций, связанные с отысканием точных констант в неравенствах Джексона и Джексона–Стечкина. При решении этой задачи существенные результаты получены С.Б.Стечкиным, Н.П.Корнейчуком, В.В.Арестовым, В.И.Бердышевым, Н.И.Черныхом, Л.В.Тайковым, А.А.Лигуном, В.А.Юдиным, В.И.Ивановым, А.Г.Бабенко, Д.В.Горбачёвым, С.Б.Вакарчуком, М.Ш.Шабозовым и другими.

В последнее время при решении экстремальных задач теории приближения функций часто используются различные модификации классического модуля непрерывности. Это обусловлено специфическими условиями рассматриваемых задач и позволяет получать результаты, раскрывающие содержательную сущность исследуемых проблем. Так, например, при аппроксимации периодических функций в $L_2[0, 2\pi]$ вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ В.А.Абиловым и Ф.В.Абиловой, С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной, М.Ш.Шабозовым и Г.А.Юсуповым был использован оператор (функция) Стеклова $S_h(f, x)$, а в работах К.В.Руновского и Н.Н.Пустовойтова введён оператор усреднения классических модулей непрерывности произвольного порядка.

Диссертационная работа Н.Ф.Олифтаева является дальнейшим развитием результатов перечисленных выше учёных и, несомненно, относится к важному и актуальному направлению теории приближении периодических функций.

2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы полностью обоснованы.

3. Достоверность и новизна полученных результатов

В диссертационной работе Олифтаева Нодира Фезилобековича в качестве характеристики гладкости функций вводится в рассмотрение τ-модуль гладкости, введённый ранее Бл.Сендовым и В.Поповым, свойства которого затем более полно были изучены К.Г.Ивановым. При помощи введённой характеристики получено решение ряда экстремальных задач теории приближения периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике гильбертова пространства $L_2 := L_2[0, 2\pi]$.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Найдены точные неравенства типа Джексона–Стечкина между величинами наилучших среднеквадратичных приближений периодических дифференцируемых функций и τ-модулями гладкости высших порядков r-ых производных функций.

2. Найдены точные верхние грани наилучших полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых τ-модулями гладкости m-го порядка.

3. Вычислены точные значения различных n-поперечников на классах функций, задаваемых усредненными с весом значениями τ-модулей гладкости m-го порядка r-ых производных функций.

4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов

Диссертация имеет теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться при решении других задач теории приближения, в вопросах кодирования и восстановления функций.

Основные результаты диссертации имеют существенное значение для развития современной теории приближения периодических функций и могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, в Институте математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан, в Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском, Душанбинском, Хорогском и других институтах и университетах. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по математическим специальностям.

5. Оценка содержания диссертации, её завершенность

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка цитируемой литературы из 75 наименований, занимает 82 страницы.

Во введении обосновывается актуальность рассматриваемых задач, формулируются цель и основные результаты работы.

В первой главе диссертации доказывается ряд точных неравенств типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ тригонометрическими полиномами дифференцируемых функций $f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ и L_q $(0 < q \leq 2)$-нормой τ-модуля гладкости m-го порядка её старшей производной $f^{(r)} \in L_2$ (теоремы 1.2.1, следствие 1.2.1). Из полученных в данном параграфе результатов, в частности при $q = 2$, вытекают результаты С.Б.Вакарчука (Матем. заметки, 2001, т.70, №3, с.334-345). Отметим, что наиболее существенным результатом первой главы является теорема 1.3.1, в которой получена двухсторонние оценки одной экстремальной характеристики. Указанная теорема является обобщением одного результата М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова (Матем. заметки, 2011, т.90, №5, с.764-775) на случай, когда наилучшее приближение периодических дифференцируемых функций $f \in L_2^{(r)}$ характеризуется посредством τ-модулей гладкости производной $f^{(r)} \in L_2$. Приводим одно следствие этой теоремы, пользуясь принятыми в диссертационной работе обозначениями.

Теорема 1.3.3. *Пусть $m = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, φ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{\sqrt{2}\, n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2}\, \varphi(t) dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{q/2} \varphi(t) dt\right)^{-1/q}.$$

Далее в теореме 1.3.4 первой главы решается экстремальная задача отыскания точных верхних граней величины наилучшего одновременного приближения $E_{n-1}(f^{(r-s)})_2$ $(s = \overline{1, r})$ самой функции и её последовательные производные $f^{(r-s)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными посредством усреднённых с весом $\varphi(t) \geq 0$ $(0 < t \leq h)$ τ-модулей первого порядка производной $f^{(r)} \in L_2$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена отысканию точных значений различных n-поперечников, у которых усреднённое с весом значение L_q $(0 < q \leq 2)$-норма τ-модулей гладкости либо ограничена единицей, либо ограничена заданной мажорантой $\Phi(h)$, удовлетворяющей некоторым ограничениям (теоремы 2.2.1 – 2.4.1).

Приводим один из основных результатов второй главы. Пусть

$$W_q^{(r)}(\tau_1; \Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \ \frac{1}{h} \int\limits_0^h \tau_1^q(f^{(r)}; 1, u)_{2,2}\, du \leq \Phi^q(h) \right\},$$

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* = \left\{1-\frac{\sin t}{t},\ \text{если}\ \ 0\le t\le t_*,\ 1-\frac{\sin t_*}{t_*},\ \text{если}\ \ t_*\le t<\infty\right\},$$

где t_* – значение аргумента функции $\dfrac{\sin t}{t}$, при котором эта функция достигает на полуоси $\mathbb{R}_+$ своего наименьшего значения $(4,49 < t_* < 4,51)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть $1/r < q \le 2; m,n \in \mathbb{N}; r \in \mathbb{Z}_+$. Если мажоранта $\Phi(h)$ при любых $h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi^q(h)}{\Phi^q(\pi/n)} \ge \frac{\pi}{nh}\left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{q/2}dt\right)\left(\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right)^{-1}, \qquad (1)$$

то имеют место равенства

$$\lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2) = \lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi);L_2) = E(W_q^{(r)}(\tau_1;\Phi))_{L_2} =$$

$$= \frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}n^r}\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{q/2}dt\right\}^{-1/q}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников: бернштейновский $b_n(\cdot)$, гельфандовский $d^n(\cdot)$, колмогоровский $d_n(\cdot)$, линейный $\delta_n(\cdot)$, проекционный $\pi_n(\cdot)$. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (1), не пусто.

Из этой теоремы, в частности, вытекают многие ранее известные результаты. Так, например, теорема 2.4.1, при $q = 2$ содержит вышеупомянутый результат С.Б.Вакарчука.

В завершающем параграфе этой главы излогается решение экстремальной задачи вычисления верхних граней модуля коэффициентов Фурье на рассматриваемых в работе классах функций из $L_2^{(r)}$.

Диссертационная работа Н.Ф.Олифтаева является самостоятельной, завершённой научной квалификационной работой.

6. Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования

Диссертационная работа хорошо оформлена и отредактирована. Однако по диссертационной работе имеется ряд замечаний:

1. Во введении указано, что τ-модуль гладкости впервые был рассмотрен К.Г.Ивановым. Следует отметить, что эта характеристика гладкости функции ещё ранее была использована Бл.Сендовым и В.Поповым (см., например, монографию Бл.Сендова и В.Попова «Усреднённые модули гладкости» - Москва «Мир», 1988, 328 с.; София: Издательство БАН, - 1983).

2. В формулировке теоремы 2.4.1 допущена неточность. Написано $r \in \mathbb{Z}_+$, а должно быть $r \in \mathbb{N}$.

Несмотря на сделанные замечания, результаты, приведённые в работе, являются новыми, научно достоверными и строго обоснованными.

7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации

Содержание автореферата правильно отражает основные научные положения диссертации. Результаты, полученные в диссертации, а также использованные в ней методы могут найти дальнейшее применение, связанное с отысканием точных верхних граней наилучших приближений и при отыскании точных значений n-поперечников различных классов функций в других банаховых пространствах.

8. Соответствие диссертации и автореферата требования ГОСТ

Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р7.0.11-2011. В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ГОСТ в полной мере.

9. Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней» по пунктам 10, 11 и 14

Диссертация Н.Ф.Олифтаева соответствует критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней» по пунктам 10, 11 и 14:

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и положения в теории приближении периодических дифференцируемых функций, выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствует о личном вкладе автора в теорию приближения функций. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении экстремальных задач теории приближения вариационного содержания.

(П.11): Основные научные результаты опубликованы в 8 научных работах, 4 из которых входят в перечень ВАК МОН РФ;

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются.

Вышесказанное даёт основание считать, что диссертационная работа Олифтаева Нодира Физилобековича «Неравенства Джексона–Стечкина для τ-модулей гладкости и значения поперечников в L_2» удовлетворяет всем требованиям ВАК Российской Федерации к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв составил доцент кафедры алгебры и вычислительной математики ХГУ, кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ К.Тухлиев.

Отзыв обсуждён и утверждён на заседании кафедры математического анализа математического факультета Худжандского государственного университета им. Б. Гафурова (протокол №12 от 30.12.2016 г.).

Зав. кафедрой математического
анализа математического факультета
Худжандского государственного
университета им. Б.Гафурова
кандидат физ.-мат. наук **Д.А. Воситова**

Адрес:
Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова,
735700, Таджикистан, г. Худжанд, проезд Мавлонбекова, 1.
Сайт: `www.hgu.tj`; e-mail: `hgu-rector@khujandi.com`
Тел. рабочий: (8-3422) 6-52-73; Тел. моб. (+992)92-754-95-50

Подпись Д.А.Воситовой подтверждаю.

Начальник
ОК ХГУ им. Б.Гафурова **З.Н.Ашрапова**