ОТЗЫВ
научного руководителя
на диссертационную работу Олифтаева Нодира Фезилобековича "Неравенства Джексона для τ-модулей гладкости и значения поперечников в L_2",
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Теория приближения функций изучает одну из фундаментальных проблем математического анализа — приближение данной функции f функциями, которые имеют определенные, например, лучшие, чем у f свойства. Она также исследует вопросы, связанные с оценкой погрешности, которая при этом возникает. Фундамент теории приближения был заложен работами П.Л.Чебышева о наилучшем равномерном приближении функций алгебраическими полиномами и работами К.Вейерштрасса, который доказал ставшую классической теорему о приближении функций многочленами. Дальнейшее развитие теории приближений в значительной мере определили работы А. Лебега, Ш. Валле-Пуссена, Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, Н. И. Ахиезера, А. Зигмунда, Ж. Фавара и других. Наиболее существенные результаты в теории приближения функций в последующем были получены А. Н. Колмогоровым, С. М. Никольским, Н. К. Бари, С. Б. Стечкиным, А. Ф. Тиманом и М. Ф. Тиманом, В. К. Дзядыком, П. Л. Ульяновым, Н. П. Корнейчуком, С. А. Теляковским и другими.

Задачи, которые изучаются в рамках современной теории аппроксимации, связаны с приближением как индивидуальных функций, так и различных их классов. При этом важную роль играют исследования как наилучших полиномиальных приближений классов функций, так и исследования определенного круга экстремальных задач теории приближения (вычисление точных значений различных поперечников, построение наилучших линейных методов приближения, оптимальное восстановление функционалов для классов функций).

Особую роль в теории аппроксимации играют неравенства между величинами наилучших приближений функции f некоторыми классами функций и классическим модулем непрерывности $\omega(f)$. Впервые соотношение указанного вида было получено Д. Джексоном в 1911 году в случае приближения 2π-периодических функций подпространством тригонометрических полиномов степени не выше n в равномерной метрике $C([0, 2\pi])$. Впоследствии соотношение указанного вида было названо неравенством Джексона. Для модулей непрерывности старших порядков $\omega_m(f), m \geqslant 2$, подобное неравенство было получено С. Б. Стечкиным, что в дальнейшем послужило причиной называть неравенство Джексона, содержащее величину $\omega_m(f), m \geqslant 2$, неравенством Джексона – Стечкина. Большой вклад в получение точных констант в неравенствах указанного типа был сделан Н. П. Корнейчуком и его учениками, а также В. В. Арестовым, В. Н. Бердышевым, Н. И. Черных, Л. В. Тайковым, В. В. Жуком, В. Н. Ивановым, В. А. Юдиным и другими. В последнее время определенный интерес вызывает получение неравенств Джексона для иных характеристик гладкости функций — τ-модулей гладкости; модулей непрерывности, в которых используются различные операторы сдвига, например, операторы В. А. Стеклова и т.д. В связи с этим следует упомянуть работы М. К. Потапова, Благовеста Сендова, Васила Попова, Камена Иванова, В. А. Абилова, К. В. Руновского, Н. Н. Пустовойтова, С. Н. Васильева, М. Ш. Шабозова, С. Б. Вакарчука и многих других. Исходя из вышеприведенного тема диссертационной работы Олифтаева Н.Ф. является **актуальной**.

Диссертация состоит из ведения, двух глав и списка цитируемой литературы.

Во **введении** приведен перечень использованных обозначений и дана развернутая историческая справка об исследованиях, связанных с получением точных констант с неравенствах Джексона – Стечкина для 2π-периодических функций в пространстве $L_2 := L_2([0, 2\pi])$. Сюда же включены результаты, связанные с использованием τ-модулей гладкости $\tau_m(f), m \geqslant 1$. Далее приведен краткий перечень основных результатов соискателя, касающихся получения точных неравенств Джексона – Стечкина для характеристики гладкости τ_m и касающихся вычисления точных значений поперечников классов функций, определенных при помощи τ_m.

В **первой** главе диссертации изучаются наилучшие полиномиальные приближения 2π-периодических функций из пространства L_2, структурные свойства которых описываются τ-модулями гладкости. Так, в теореме 1.2.1 на классе $L_2^{(r)}, r \in \mathbb{N}$, получено точное неравенство Джексона с осредненным τ-модулем гладкости r-той производной функции f:

$$E_n(f)_2 \leqslant 2^{-m/2} n^{-r+1/q} \left\{ \int\limits_0^{nh} \left(t^{-1} J_m(t)\right)^{q/2} dt \right\}^{-1/q} \left\{ \int\limits_0^{h} \tau_m^q(f^{(r)}; 1, t)_{2,2} dt \right\}^{1/q},$$

где $J_m(t) := \int\limits_0^t (1-\cos\tau)^m d\tau$; $h \in (0, \pi/n]$; $n, m \in \mathbb{N}$. В следующей теореме 1.3.1 дана двусторонняя оценка экстремальной характеристики

$$\widetilde{\chi}_{n,m,r,q}(\varphi, h) := \sup \left\{ \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \tau_m^q \left(f^{(r)}; 1, t\right)_{2,2} \varphi(t) dt \right)^{1/q}} : f \in L_2^{(r)}, f \not\equiv const \right\},$$

где $0 < q \leqslant 2$; $h \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$; φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция; $n, m \in \mathbb{N}$, а именно при $0 < h \leqslant \pi/n$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{\beta_{n,m,r,q}(\varphi, h)} \leqslant \widetilde{\chi}_{n,m,r,q}(\varphi, h) \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{n \leqslant k < \infty} \beta_{k,m,r,q}(\varphi, h)}.$$

Здесь

$$\beta_{k,m,r,q}(\varphi, h) := \left\{ k^{rq} \int\limits_0^h \left((kt)^{-1} \, J_m(kt) \right)^{q/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/q}.$$

Из теоремы 1.3.1 получен целый ряд содержательных следствий, в которых при определенных условиях найдены точные значения экстремальных характеристик $\widetilde{\chi}_{n,m,r,q}(\varphi, h)$.

Во **второй** главе диссертации рассмотрены различные поперечники классов функций в пространстве L_2 и вычислены их точные значения (теоремы 2.2.1; 2.3.1; 2.4.1). Так, в теореме 2.4.1 для классов функций

$$W_q^{(r)}(\tau_1, \Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{1}{h} \int\limits_0^h \tau_1^q (f^{(r)}; 1, u)_{2,2} du \leqslant \Phi^q(h) \; \forall h \in (0, 2\pi] \right\},$$

где $1/r < q \leqslant 2$; $r \in \mathbb{N}$; Φ – мажоранта, удовлетворяющая ограничению

$$\frac{\Phi^q(h)}{\Phi^q(\pi/n)} \geqslant \frac{\pi}{nh} \left\{ \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{q/2} dt \right\} \left\{ \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right\}^{-1},$$

получены следующие равенства:

$$\lambda_{2n-1}(W_q^{(r)}(\tau_1, \Phi); L_2) = \lambda_{2n}(W_q^{(r)}(\tau_1, \Phi); L_2) = E(W_q^{(r)}(\tau_1, \Phi); \mathcal{T}_{2n-1})_{L_2} =$$

$$= \frac{\pi^{1/q}}{\sqrt{2}\, n^r} \left\{ \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{q/2} dt \right\}^{-1/q} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Здесь $\lambda_n(\cdot)$ — любой из поперечников: бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный, проекционный. Также вычислены точные значения модулей косинус- и синус- коэффициентов ряда Фурье на рассматриваемых классах функций (теоремы 2.3.2 и 2.3.3).

В ходе работы над диссертацией соискатель проявил умение решать сложные математические задачи из области теории аппроксимации 2π-периодических функций. Считаю, что полученные им результаты являются новыми и представляют несомненный научный интерес для специалистов в области теории приближений.

В связи с указанным считаю, что диссертация Н.Ф.Олифтаева "Неравенства Джексона для τ-модулей гладкости и значения поперечников в L_2" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Российской Федерации к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор Вакарчук Сергей Борисович
29.08.16
(специальность 01.01.01 – Математический анализ)
Место работы: 49000 г. Днепропетровск, ул. Набережная Ленина, 18,
Днепропетровский университет имени Альфреда Нобеля
Тел.: (+38066)-720-27-01, (+38056)-233-24-58
e-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Подпись С.Б.Вакарчука подтверждаю.
Ученый секретарь Днепропетровского университета имени Альфреда Нобеля,
доктор педагогических наук, профессор С.П.Кожушко