На правах рукописи

Рахимов Алишер Орзуходжаевич

Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе — 2017

Работа выполнена в Институте математики имени А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, член корреспондент АН РТ, профессор Рахмонов Зарулло Хусенович
Официальные оппоненты:	Пачев Урусби Мухамедович, доктор физико–математических наук, ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», доцент кафедры геометрии и высшей алгебры
	Авдеев Иван Фёдорович, кандидат физико–математических наук, ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», доцент кафедры математического и информационного анализа экономических процессов
Ведущая организация:	Таджикский национальный университет

Защита состоится 16 июня 2017 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02 Хайруллоев Ш.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Настоящая диссертация является исследованием в аналитической теории чисел, относящимся к области теории коротких тригонометрических сумм и их приложения к классическим аддитивным задачам с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны. Исторически первыми примерами подобных задач стали:

1. Короткие тригонометрические суммы, которые возникают при решении аддитивных задач с почти равными слагаемыми, первым начал изучать И.М. Виноградов. Он[1] впервые для короткой линейной тригонометрической суммы с простыми числами, то есть для сумм вида:

   $$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},\quad 1\le q\le\tau,$$

   при $k=1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, доказал нетривиальную оценку при

   $$\exp(c(\ln\ln x)^2)\ll q\ll x^{1/3},\qquad y>x^{2/3+\varepsilon}.$$

   Затем C.B. Haselgrove[2] получил нетривиальную оценку суммы $S_1(\alpha;x,y)$, $y\ge x^{\theta}$, q – произвольное, и доказал асимптотическую формулу для тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми, то есть для числа решений диофантова уравнения

   $$N=p_1+p_2+p_3, \tag{1}$$

   с условиями

   $$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad H=N^{\theta+\varepsilon},\quad \theta=\frac{63}{64}+\varepsilon. \tag{2}$$

   Это стало первой решенной аддитивной задачей с почти равными слагаемыми. Затем В. Статулявычус[3], Jia Chaohua[4], Пан Чен-дон и

[1] Виноградов И.М. Избранные труды – М.: Изд-во АН СССР. 1952. 436 с.

[2] Haselgrove C.B. Some theorems in the analytic theory of number // J.London Math.Soc.,26 (1951),pp. 273 – 277.

[3] Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс, Ученые труды университета. сер. мат., физ. и хим. н.,3 (1955), С. 5 – 23.

[4] Jia Chaohua Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Math. Sinica 4(1994), pp. 464 – 473, Chinese.

Пан Чен-бьяо[5], Zhan Tao[6] заменили показатель θ соответственно на

$$\frac{279}{308}+\varepsilon, \quad \frac{91}{96}+\varepsilon, \quad \frac{13}{17}+\varepsilon, \quad \frac{2}{3}+\varepsilon, \quad \frac{5}{8}+\varepsilon.$$

Наилучший результат в этой задаче принадлежит Jia Chao-hua[7]. Он доказал, что диофантово уравнение (1) с условиями (2) разрешимо с показателем

$$\theta = \frac{7}{12}+\varepsilon.$$

2. Jianya Liu и Tao Zhan[8], получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha, x, y)$, доказали теорему Хуа Ло Гена о представимости достаточно большого натурального числа N, $N \equiv 5(mod 24)$ в виде суммы пяти квадратов простых чисел в случае, когда эти слагаемые почти равны. Они показали, что достаточно большое натуральное число N, $N \equiv 5(mod 24)$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

Они,[9] воспользовавшись полученной оценкой суммы $S_2(\alpha, x, y)$, также показали, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде $N = p_1 + p_2 + p_3^2$ с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

3. В 1938 г. Хуа, рассматривая проблему Варинга – Гольдбаха для кубов, доказал, что все достаточно большие нечётные натуральные числа являются суммой девяти кубов простых чисел. А.В. Кумчев[10] получил

[5] Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math., 2(1990), pp. 138 – 147.

[6] Zhan Tao On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica, new ser., 7 (1991), No 3, pp. 135 – 170.

[7] Jia Chao-hua Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Mathematica Sinica, New Series 1994. V. 10, № 4, pp. 369 – 387

[8] Liu J., Tao Z. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals // Acta Mathematica Sinica, English Series Oct., 2000, Vol.16, No. 4, pp. 669 – 690.

[9] J Y Liu, T Zhan. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Mh Math, 1999, 127: pp. 27 – 41

[10] Kumchev A.V. On Weyl sums over primes in short intervals // "Arithmetic in Shangrila"—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. V. 9. Singapore: World Scientific. P. 116–131.

нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y \geq x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1 - \frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Яо Я.[11], воспользовавшись оценкой Кумчева, доказал, что всякое достаточно большое нечётное натуральное число N можно представить в виде

$$p_1^3 + p_2^3 + \ldots + p_9^3 = N, \qquad \left|p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}}\right| \leq N^{\frac{1}{3} - \frac{1}{51} + \varepsilon}.$$

4. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

при $n = 2, 3, 4$ в длинных дугах, были исследованы в работах[12,13,14]. Эти результаты были приложены при выводе асимптотических формул в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в проблеме Эстермана[12] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^2 = N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m > 0$ – целое число, с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H; \qquad i = 1, 2, \qquad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \leq H, \qquad H \geq N^{\frac{3}{4}} \ln^2 N;$$

- в кубической проблеме Эстермана[14] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^3 = N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m > 0$ – целое число, с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H; \qquad i = 1, 2, \qquad \left|m^3 - \frac{N}{3}\right| \leq H, \qquad H \geq N^{\frac{5}{6}} \ln^3 N;$$

- в проблеме Варинга для кубов[15] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде девяти кубов натуральных чисел x_i, $i = \overline{1, 9}$

[11] Yao Y. Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October 2014. V. 9, Is. 5. P. 1131 – 1140. DOI:10.1007/s11464-014-0384-4.

[12] Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 4, С. 564 – 572.

[13] Рахмонов З.Х., Шокамолова Дж.А. Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2009. № 2(135). С. 7 – 18.

[14] Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Мат.заметки. 2014. Т. 95. Вып. 3. С. 445 – 456.

[15] Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // ДАН РТ, 2008, Т.51,№2, с.83–86.

с условиями

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{30}+\varepsilon};$$

- в проблеме Варинга для четвёртых степеней[16] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде суммы семнадцати четвёртых степеней натуральных чисел x_i, $i = \overline{1,17}$ с условиями

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{17}\right)^{\frac{1}{4}}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{1}{4}-\frac{1}{108}+\varepsilon};$$

- в проблеме Варинга для пятых степеней[17] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде суммы 33 пятых степеней натуральных чисел x_i, $i = \overline{1,33}$ с условиями

$$\left|x_i - \left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}.$$

,

5. С.Ю. Фаткина[18] доказала асимптотическую формулу для числа решений диофантова уравнения $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$ в простых чисел p_1, p_2, p_3, с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1,2, \quad \left|[\sqrt{2}p_3] - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{5}{8}} \ln^c N.$$

6. П.З. Рахмонов[19,20] при $y \gg \sqrt{x}$ получил равномерную оценку по параметру c для коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа вида

$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} e(\alpha[n^c]),$$

[16] Рахмонов З.Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // ДАН РТ, 2011, т.54, №3,с 34–42.

[17] Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // ДАН РТ. 2014. Т.54, №3. С. 34–42.

[18] С.Ю. Фаткина Об одном обобщении тернарной проблемы Гольдбаха для почти равных слагаемых // Вестн. Моск. УН-ТА. сер.1, математика. механика. 2001. No 2

[19] Рахмонов П.З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа // Математические заметки. 2014. – Т. 95. № 5. – С. 763 – 774.

[20] Рахмонов П.З. Обобщенная тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2016. – Т. 100. № 3. – С. 410 – 420.

и доказал асимптотическую формулу в обобщении тернарной проблемы Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде $p_1 + p_2 + [n^c] = N$ в простых числах p_1, p_2 и натуральным n, с условиями при

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[n^c] - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{1-\frac{1}{2c}} \ln^2 N.$$

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней

- изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида
$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n),$$
в больших дугах;
- полученные результаты позволили найти асимптотическую формулу для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является четвёртой степенью натурального числа. Следует отметить, что рассматриваемая последовательность является более редкой по сравнению с упомянутыми выше.

Цель работы.

Целью работы является изучение поведения коротких тригонометрических сумм Вейля в больших дугах, оценка таких сумм четвёртого порядка в малых дугах и их приложения к выводу асимптотической формулы в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемым.

Методы исследования

Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно:

- метод оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона, оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных, оценки полных рациональных сумм Хуа Ло – кена;

- метод оценок тригонометрических сумм Г. Вейля;
- круговой метод Харди, Литлвуда и Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

Научная новизна.
Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида в больших дугах;
- найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля четвёртого порядка в малых дугах;
- доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является четвёртой степенью натурального числа.

Теоретическая и практическая ценность
Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.
Апробация результатов
Основные результаты диссертации докладывались:

- на XIV Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвящённая 70-ти летию со дня рождения С.М. Воронина и Г.И. Архипова, Саратов, 12 – 14 сентября 2016 года;

- на XIII Международной конференции “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения”, посвящённая восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25 – 30 мая 2015 года;

- на семинаре отдела алгебры, теории чисел и топологии (2013 – 2016 гг.) и на общеинститутском семинаре (2014 – 2016 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- на семинаре кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета;

- на международной конференции «Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел», посвящённой 85-летию со дня рождения профессора Г.Б. Бабаева, Душанбе, 25 – 26 октября 2013 г.;
- на международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений», посвящённой 85-летию академика Л.Г. Михайлова, Душанбе, 17 июня 2013 г.

Публикации.
Основные результаты диссертации опубликованы в шести научных работах, список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы
Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы 72 страницы. Список цитированной литературы включает 89 наименований.

Содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения и двух глав.

Во введении к диссертации содержится обзор результатов, относящихся к теме диссертации, а также формулируются основные полученные в ней результаты.

Первый параграф первой главы носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Р. Вон[21], изучая суммы Г. Вейля вида

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\le x}e\left(\alpha m^n\right),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\ q\le\tau,\quad (a,q)=1,\ |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

в больших дугах методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha,x)=\frac{S(a,q)}{q}\int\limits_0^x e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(1+x^n|\lambda|\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

[21] Vaughan R.C. Some remarks in Weyl sums // Coll. Math. Soc. Janos. Bolyani, Budapest 1981.

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q, то есть при выполнении условия

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{x\ S(a,q)}{q}\int\limits_0^1 e\left(\lambda t^n\right)dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

При выводе асимптотических формул в аддитивных задачах с почти равными слагаемыми, к которым относятся проблема Варинга и проблема Эстермана основным моментом наряду с круговым методом Харди–Литлвуда в варианте тригонометрических сумм И.М. Виноградова является также поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),\ \alpha = \frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad q\leq\tau,\quad |\lambda|\leq\frac{1}{q\tau},$$

в больших дугах и их оценка в малых дугах.

Поведение $T(\alpha; x, y)$ в больших дугах изучено во втором параграфе первой главы и основным результатом является теорема 1.1, в которой упрощается доказательство и уточняется основная теорема работы[22].

Теорема 1.1. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ *и* $\lambda \geq 0$, *тогда при* $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$, *имеет место формула*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a,q)}{q}T(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ *имеет место оценка*

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q + \min_{2\leq k\leq n}(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 1.1.1. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, *тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{y}{q}S(a,q)\gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

[22] Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля // Ученые записки Орловского университета. Серия естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6. часть 2. С. 194 – 203.

Следствие 1.1.2. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, *тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha, x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\leq k\leq n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}} \right).$$

Следствия 1.1.1 и 1.1.2 являются обобщением вышеуказанных результатов Р. Вона для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha, x, y)$.

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона[23], оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных[24] и оценки полных рациональных сумм принадлежащей Хуа Ло-кену.

В третьем параграфе первой главы в малых дугах найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля $T(\alpha; x, y)$ четвёртой степени.

Теорема 1.2. *Пусть* $x \geq x_0 > 0$, $y_0 < y \leq 0,01x$, α *– вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y \left(q^{-\frac{1}{16}} + y^{-\frac{1}{16}} \ln^{\frac{1}{16}} q + y^{-\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{16}} \ln^{\frac{1}{16}} q \right) (\ln y)^{\frac{7}{16}}.$$

Доказательство теоремы 1.2 опирается на следующую лемму, доказательство которой в свою очередь проводится методом Г. Вейля.

Лемма 1.9. *Пусть* x *и* y *– вещественные числа,* $1 \leq y < x$,

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^4).$$

---

[23] Карацуба А.А., Королёв М.А. Теорема о замене тригонометрической суммы более короткой // Известия РАН, серия математическая, Т. 71, № 2, С. 123 – 150.

[24] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — М.: Наука, 1987, 368 с.

Тогда имеет место соотношение

$$|T(\alpha;x,y)|^8 \le 2^{11}y^4 \sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(24\alpha krtm)\right| + 2^{11}y^7.$$

Т. Эстерман[25] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{3}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число. Как мы уже ранее отмечали в работе[12] эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (3) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H; \quad i = 1,2, \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \le H; \quad H \ge N^{\frac{3}{4}}\ln^3 N.$$

Далее в работе[14] асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми то есть, когда в уравнении (3) квадрат натурального m заменяется на его куб при $H \ge N^{\frac{5}{6}}\mathscr{L}^{10}$.

В второй главе, прилагая результаты первой главы, доказана теорема 2.1 об асимптотической формуле для ещё более редкой последовательности с почти равными слагаемыми то есть, когда в уравнении (3) квадрат натурального m заменяется на четвёртой степень.

Теорема 2.1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $I(N,H)$ — число представлений N суммою двух простых чисел p_1, p_2 и четвёртой степени натурального m с условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1,2, \quad \left|m^4 - \frac{N}{3}\right| \le H,$$

$\rho(N,p)$ — число решений сравнения $x^4 \equiv N(\operatorname{mod} p)$. Тогда при $H \ge N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{\sqrt[4]{3}\mathfrak{S}(N)\,H^2}{4\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^3}\right), \quad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N,p)}{(p-1)^2}\right).$$

[25] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc., 11(1937), pp. 501 – 516.

Следствие 2.1.1. *Существует такое N_0, что каждое натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммы двух простых чисел p_1, p_2 и четвёртой степени натурального m с условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}, \quad i = 1, 2,$$
$$\left|m - \sqrt[4]{\frac{N}{3}}\right| \le \frac{3N^{\frac{1}{6}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}}{4\sqrt[4]{3}} + \frac{27N^{\frac{1}{12}}\mathscr{L}^{\frac{80}{3}}}{32\sqrt[4]{3}} + \frac{189\mathscr{L}^{40}}{128\sqrt[4]{3}} + 0,9.$$

Доказательство теоремы 2.1 проводится круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова. Его основу, как уже отмечали, составляют следствия 1.1.1 и 1.1.2, теорема 1.1, теорема 1.2. Основные этапы доказательства теоремы:

Будем считать, что $H = N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$, $\tau = 16HN^{-\frac{1}{4}}$, $\text{æ}\tau = 1$. Поэтому

$$I(N,H) = \int\limits_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} S_1^2(\alpha; N, H)T_1(\alpha; N, H)e(-\alpha N)d\alpha,$$

$$S_1(\alpha; N, H) = \sum_{|p-N/3|\le H} e(\alpha p);$$
$$T_1(\alpha; N, H) = \sum_{|n^3-N/3|\le H} e(\alpha n^4).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\text{æ}, 1-\text{æ}]$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad 1 \le q \le \tau, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}. \tag{4}$$

Легко видеть, что в этом представлении $0 \le a \le q-1$, причём $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α, для которых $q \le \mathscr{L}^{40}$ в представлении (4). Через $\mathfrak{m}$ обозначим оставшиеся α. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьем множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{\alpha:\ \alpha \in \mathfrak{M},\ \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{\mathscr{L}^2}{H}\right\},$$
$$\mathfrak{M}_2 = \left\{\alpha:\ \alpha \in \mathfrak{M},\ \frac{\mathscr{L}^2}{H} < \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q\tau}\right\}.$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$I(N,H)=I(\mathfrak{M}_1)+I(\mathfrak{M}_2)+I(\mathfrak{m}).$$

Для получения асимптотической формулы для $I(\mathfrak{M}_1)$ используем следствие 1.1.1 теоремы 1.1 (асимптотическая формула с главным членом для короткой тригонометрической суммы $T(\alpha,x,y)$ в случае α *"близких"* к рациональному числу с малыми знаменателями a/q) и теорему о поведении коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами

$$S(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha n)$$

для α, принадлежащих длинным дугам.

Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$ проводится тернарным методом с применением следствия 1.1.2 теоремы 1.1 (оценка $T(\alpha;x,y)$ в множестве $\mathfrak{M}_2$).

Оценка интеграла $\mathfrak{m}$ также проводится тернарным методом с использованием теоремы 2.1 о нетривиальной оценке коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha;x,y)$ четвёртого порядка в малых дугах.

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, члену–корреспонденту Академии наук Республики Таджикистан, профессору З.Х. Рахмонову за постановку задач и внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

В изданиях из перечня ВАК Российской Федерации

1. Рахимов А.О. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в множестве точек первого класса / Н.Н. Назрублоев, А.О. Рахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. – Т. 57- № 8. – С. 621 – 628.

2. Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения / Н.Н. Назрублоев, А.О. Рахимов, З.Х. Рахмонов, // Чебышевский сборник. 2015. – Т. 16. В. 1(53). – С. 232 – 247.

3. Рахимов А.О. Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Ввейля четвёртого порядка в малых дугах / А.О. Рахимов // Доклады

Академии наук Республики Таджикистан. 2015. – Т. 58 - №8. – С. 674 – 677.

4. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми / А.О. Рахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. – Т. 58 - №9. – С. 769 – 771.

В других изданиях

5. Рахимов А.О. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в множестве точек первого класса / Н.Н. Назрублоев, А.О. Рахимов // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Международной конференции, посвящённой восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. – С. 245 – 246.

6. Рахимов А.О. О коротких тригонометрических суммах Г.Вейля / А.О. Рахимов // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел» посвящённой 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. – С. 28 – 29.

7. Рахимов А.О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми / А.О. Рахимов, Ф.З. Рахмонов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённой 25-летию Государственной независимости Республики Таджикистан. г. Душанбе, 3-4 июня 2016 г. – С. 107 – 109.

8. Рахимов А.О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми / А.О. Рахимов, Ф.З. Рахмонов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. ISSN: 1810-4134. 2016. №8. – С. 87 – 89.