Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

РАХИМОВ АЛИШЕР ОРЗУХОДЖАЕВИЧ

Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
член-корреспондент АН РТ, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2017

Оглавление

Обозначения

$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i\sin 2\pi\alpha$.

При ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются тремя индексами: номер главы, номер параграфа, номер утверждения.

$c, c_1, c_2, \cdots,$–положительные постоянные, не всегда одни и те же.

ε–положительные сколь угодно малые постоянные.

$\varphi(q)$ – функция Эйлера.

$\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

$\Lambda(n)$ – функция Мангольдта.

$\tau(n)$ – число делителей числа n.

$\tau_r(n)$ – число решений уравнения $x_1x_2\ldots x_r = n$ в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Запись $A \asymp B$ означает, что $c_1A \leq B \leq c_2A$.

При положительном A запись $B = O(A)$ или $B \ll A$ означает, что существует $c > 0$ такое, что $|B| \leq cA$.

(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b.

$[x]$ – целая часть числа x.

$\{x\}$ – дробная часть числа x.

$\|x\| = \min\Big(\{x\}, 1 - \{x\}\Big)$ – расстояние до ближайшего целого числа.

$\mathscr{L} = \ln xq$.

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Настоящая диссертация является исследованием в аналитической теории чисел, относящимся к области теории коротких тригонометрических сумм, и её приложениям к классическим аддитивным задачам с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны. Исторически первыми примерами изучения подобных задач стали следующие исследования:

- Короткие тригонометрические суммы, которые возникают при решении аддитивных задач с почти равными слагаемыми, первым начал изучать И. М. Виноградов [1]. Он впервые для короткой линейной тригонометрической суммы с простыми числами, то есть для сумм вида:

  $$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le \tau,$$

  при $k = 1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, доказал нетривиальную оценку при

  $$\exp(c(\ln\ln x)^2) \ll q \ll x^{1/3}, \qquad y > x^{2/3+\varepsilon}.$$

Затем С. Б. Хаселгров [2] получил нетривиальную оценку суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geq x^\theta$, q – произвольное, и доказал асимптотическую формулу для тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми, то есть для числа решений диофантова уравнения

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \tag{1}$$

с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad H = N^{\theta+\varepsilon}, \quad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon. \tag{2}$$

Это стало первой решённой аддитивной задачей с почти равными слагаемыми. Затем В. Статулявычус [3], Ж. Чаохуа [4, 5, 6, 7], Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [8], Т. Жан [9] заменили показатель θ соответственно на

$$\frac{279}{308} + \varepsilon, \quad \frac{91}{96} + \varepsilon, \quad \frac{13}{17} + \varepsilon, \quad \frac{2}{3} + \varepsilon, \quad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Наилучший результат в этой задаче принадлежит Ж. Чаохуа [10]. Он доказал, что диофантово уравнение (1) с условиями (2) разрешимо с показателем

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon.$$

- Т. Жан и Дж. Лю [11, 12, 13, 14], получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha, x, y)$, доказали теорему Хуа Ло Гена о представимости достаточно большого натурального числа N, $N \equiv 5(mod 24)$ в виде суммы пяти квадратов простых чисел в случае, когда эти слагаемые почти равны. Они показали, что достаточно большое натуральное число N,

$N \equiv 5(mod 24)$, можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left| p_j - \sqrt{\frac{N}{5}} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

Т. Жан и Дж. Лю [13], воспользовавшись полученной оценкой суммы $S_2(\alpha, x, y)$, также показали, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде $N = p_1 + p_2 + p_3^2$ с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| p_3^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}.$$

- В 1938 г. Хуа [15], рассматривая проблему Варинга – Гольдбаха для кубов, доказал, что все достаточно большие нечётные натуральные числа являются суммой девяти кубов простых чисел. А. В. Кумчев [16] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y \geq x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1 - \frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Я Яо. [17], воспользовавшись оценкой Кумчева, доказал, что всякое достаточно большое нечётное натуральное число N можно представить в виде

$$p_1^3 + p_2^3 + \ldots + p_9^3 = N, \qquad \left| p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}} \right| \leq N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{51}+\varepsilon}.$$

- Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

при $n = 2, 3, 4$ в длинных дугах, были исследованы в работах [18, 19, 20, 21, 22]. Эти результаты были приложены при выводе асимптотических формул в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

– в проблеме Эстермана [18, 23] о представлении натурального числа $N>N_0$ в виде $p_1+p_2+m^2=N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m>0$ – целое число, с условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H;\qquad i=1,2,\qquad \left|m^2-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H\ge N^{\frac{3}{4}}\ln^2 N;$$

– в кубической проблеме Эстермана [20, 24] о представлении натурального числа $N>N_0$ в виде $p_1+p_2+m^3=N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m>0$ – целое число, с условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H;\qquad i=1,2,\qquad \left|m^3-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H\ge N^{\frac{5}{6}}\ln^3 N;$$

– в проблеме Варинга для кубов [25] о представлении натурального числа $N>N_0$ в виде девяти кубов натуральных чисел x_i, $i=\overline{1,9}$ с условиями

$$\left|x_i-\left(\frac{N}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\right|\le H,\qquad H\ge N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{30}+\varepsilon};$$

– в проблеме Варинга для четвёртых степеней [26] о представлении натурального числа $N>N_0$ в виде суммы семнадцати четвёртых степеней натуральных чисел x_i, $i=\overline{1,17}$ с условиями

$$\left|x_i-\left(\frac{N}{17}\right)^{\frac{1}{4}}\right|\le H,\qquad H\ge N^{\frac{1}{4}-\frac{1}{108}+\varepsilon};$$

– в проблеме Варинга для пятых степеней [27] о представлении натурального числа $N>N_0$ в виде суммы 33 пятых степеней натуральных чисел x_i, $i=\overline{1,33}$ с условиями

$$\left|x_i-\left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right|\le H,\qquad H\ge N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}.$$

,

- С.Ю.Фаткина [28] доказала асимптотическую формулу для числа решений диофантова уравнения $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$ в простых числах p_1, p_2, p_3, с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[\sqrt{2}p_3] - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{5}{8}} \ln^c N.$$

- П.З. Рахмонов [29, 30] при $y \gg \sqrt{x}$ получил равномерную оценку по параметру c для коротких тригонометрических сумм с нецелой степенью натурального числа вида

$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} e(\alpha[n^c]),$$

и доказал асимптотическую формулу в обобщении тернарной проблемы Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде $p_1+p_2+[n^c] = N$ в простых числах p_1, p_2 и натурального n, с условиями при

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[n^c] - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{1-\frac{1}{2c}} \ln^2 N.$$

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней

- изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах;

- полученные результаты позволили найти асимптотическую формулу для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является четвёртой степенью натурального числа. Следует отметить, что рассматриваемая последовательность является более редкой по сравнению с упомянутыми выше.

Цель работы.

Целью работы является изучение поведения коротких тригонометрических сумм Вейля в больших дугах, оценка таких сумм четвёртого порядка в малых дугах и их приложения к выводу асимптотической формулы в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемым.

Методы исследования

Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно:

- метод оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона, оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных, оценки полных рациональных сумм Хуа Ло – кена;
- метод оценок тригонометрических сумм Г.Вейля;

- круговой метод Харди, Литлвуда и Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в больших дугах;
- найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля четвёртого порядка в малых дугах;
- доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является четвёртой степенью натурального числа.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались:

- XIV Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70 летию со дня рождения С.М. Воронина и Г.И. Архипова, Саратов, 12 – 14 сентября 2016 года;

- XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённая восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25 – 30 мая 2015 года;

- на семинаре отдела алгебры, теории чисел и топологии (2013 – 2016 гг.) и на общеинститутском семинаре (2014 – 2016 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- на семинаре кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета

- на международной конференции «Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел», посвященной 85-летию со дня рождения профессора Г.Б. Бабаева, Душанбе, 25 – 26 октября 2013 г.;

- на международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений», посвященной 85-летию академика Л.Г. Михайлова, Душанбе, 17 июня 2013 г.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в восьми научных работах, список которых приведен в конце диссертации. В работах, написанных совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы 65 страниц. Список цитированной литературы включает 52 наименования.

Краткое содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения и двух глав.

Во введении диссертации содержатся обзор результатов, относящихся к теме диссертации, а также формулируются основные полученные в ней результаты.

Первый параграф первой главы носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые применяются в последующих параграфах.

Р. Вон [31], изучая суммы Г. Вейля вида

$$T(\alpha, x) = \sum_{m\le x} e\left(\alpha m^n\right), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda,\ q \le \tau, \quad (a,q)=1,\ |\lambda| \le \frac{1}{q\tau},$$

в больших дугах методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{S(a,q)}{q}\int\limits_0^x e\left(\lambda t^n\right)dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(1 + x^n|\lambda|\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q, то есть при выполнении условия

$$|\lambda| \le \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{x\ S(a,q)}{q}\int\limits_0^1 e\left(\lambda t^n\right)dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

При выводе асимптотических формул в аддитивных задачах с почти равными слагаемыми, к которым относится проблема Варинга, проблема Эстермана, основным моментом наряду с круговым методом Харди–Литлвуда в варианте тригонометрических сумм И. М. Виноградова, является также поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m\le x}e(\alpha m^n),\ \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad q\le\tau,\quad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

в больших дугах и их оценка в малых дугах.

Поведение $T(\alpha;x,y)$ в больших дугах изучено в втором параграфе первой главы и основным результатом является теорема 1.1, в которой упрощается доказательство и уточняется основная теорема работ [32, 33].

Теорема 1.1. *Пусть* $\tau\ge 2n(n-1)x^{n-2}y$ *и* $\lambda\ge 0$, *тогда при* $\{n\lambda x^{n-1}\}\le\frac{1}{2q}$, *имеет место формула*

$$T(\alpha,x,y)=\frac{S(a,q)}{q}T(\lambda;x,y)+O(q^{\frac12+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\}>\frac{1}{2q}$ *имеет место оценка*

$$|T(\alpha,x,y)|\ll q^{1-\frac1n}\ln q+\min_{2\le k\le n}(yq^{-\frac1n},\lambda^{-\frac1k}x^{1-\frac nk}q^{-\frac1n}).$$

Следствие 1.1.1. *Пусть* $\tau\ge 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda|\le\frac{1}{2nqx^{n-1}}$, *тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha,x,y)=\frac{y}{q}S(a,q)\gamma(\lambda;x,y)+O(q^{\frac12+\varepsilon}).$$

Следствие 1.1.2. *Пусть* $\tau\ge 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}}<|\lambda|\le\frac{1}{q\tau}$, *тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha,x,y)\ll q^{1-\frac1n}\ln q+\min_{2\le k\le n}\left(yq^{-\frac1n},x^{1-\frac1k}q^{\frac1k-\frac1n}\right).$$

Следствия 1.1.1 и 1.1.2 являются обобщением вышеуказанных результатов Р. Вона для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha, x, y)$.

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона [34], оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных [35] и оценки полных рациональных сумм принадлежащей Хуа Ло-кену [36].

В третьем параграфе первой главы в малых дугах найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля $T(\alpha; x, y)$ четвёртой степени.

Теорема 1.2. *Пусть $x \geq x_0 > 0$, $y_0 < y \leq 0,01x$, α – вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y \left(q^{-\frac{1}{16}} + y^{-\frac{1}{16}} \ln^{\frac{1}{16}} q + y^{-\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{16}} \ln^{\frac{1}{16}} q\right) (\ln y)^{\frac{7}{16}}.$$

Доказательства теоремы 1.2 опирается на следующую лемму, доказательство которой в свою очередь проводится методом Г. Вейля.

Лемма 1.9. *Пусть x и y – вещественные числа, $1 \leq y < x$,*

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^4).$$

Тогда имеет место соотношение

$$|T(\alpha; x, y)|^8 \leq 2^{11} y^4 \sum_{0<k\leq y} \sum_{0<r\leq y-k} \sum_{0<t<y-k-r} \left| \sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(24\alpha krtm) \right| + 2^{11} y^7.$$

Эстерман [37] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{3}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число. Как мы уже ранее отмечали в работах [18, 23] эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (2.1.1) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H; \quad i = 1, 2, \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \leq H; \quad H \geq N^{\frac{3}{4}} \ln^3 N.$$

Далее в работах [20, 24] асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть, когда в уравнении (2.1.1) квадрат натурального m заменяется на его куб при $H \geq N^{\frac{5}{6}} \mathscr{L}^{10}$.

В второй главе, прилагая результаты предыдущих глав, а именно:

- теорему 1.1 о поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha; x, y)$ в больших дугах;

- теорему 1.2 о нетривиальной оценке коротких тригонометрических сумм Г. Вейля $T(\alpha; x, y)$ четвёртой степени в малых дугах,

доказываем теорему 2.1 об асимптотической формуле для ещё более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть, когда в уравнении (2.1.1) квадрат натурального m заменяется на четвёртую степень.

Теорема 2.1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $I(N, H)$ — число представлений N суммою двух простых чисел p_1, p_2 и* *четвёртой степенью натурального m с условиями*

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\quad \left|m^4-\frac{N}{3}\right|\le H,$$

$\rho(N,p)$ *— число решений сравнения* $x^4\equiv N(\bmod p)$. *Тогда при* $H\ \ge\ N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$ *справедлива асимптотическая формула:*

$$I(N,H)=\frac{\sqrt[4]{3}\mathfrak{S}(N)\,H}{4\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}+O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^3}\right),\quad \mathfrak{S}=\prod_p\left(1+\frac{\rho(N,p)}{(p-1)^2}\right).$$

Следствие 2.1.1. *Существует такое N_0, что каждое натуральное число $N>N_0$ представимо в виде суммы двух простых чисел p_1, p_2 и четвёртой степени натурального m с условиями*

$$\begin{aligned}&\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}},\quad i=1,2,\\ &\left|m-\sqrt[4]{\frac{N}{3}}\right|\le\frac{3N^{\frac{1}{6}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}}{4\sqrt[4]{3}}+\frac{27N^{\frac{1}{12}}\mathscr{L}^{\frac{80}{3}}}{32\sqrt[4]{3}}+\frac{189\mathscr{L}^{40}}{128\sqrt[4]{3}}+0,9.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.1 проводится круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова. Его основу, как уже отмечалось, составляют следствия 1.1.1, 1.1.2 теоремы 1.1 и теорема 1.2.

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, члену–корреспонденту Академии наук Республики Таджикистан, профессору З.Х. Рахмонову за постановку задач и внимание к работе.

Глава 1

Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля

1.1 Вспомогательные леммы

Лемма 1.1. *Пусть H и y произвольные целые числа, $H \geq 1$. Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{x=y+1}^{y+H} e(\alpha x) \leq \min\left(H, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right), \quad \|\alpha\| = \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

Доказательство см. [38].

Лемма 1.2. *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad q \geq 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Тогда при β, $U > 0$, $P > 1$ иммеем

$$\sum_{x=1}^{P} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha x + \beta\|}\right) \leq 6\left(\frac{P}{q} + 1\right)(U + q \ln q).$$

Доказательство см. [38].

Лемма 1.3. *При* $x \geq 2$ *имеем*

$$\sum_{n \leq x} \tau_r^2(n) \ll x(\ln x)^{r^2-1}$$

Доказательство см. [39]

Лемма 1.4. *Пусть* $f(u)$ *– действительная функция,* $f''(u) > 0$ *в интервале* $[a,b]$, α, β, ε *произвольные числа с условиями* $\alpha \leq f'(a) \leq f'(b) \leq \beta$ *и* $0 < \varepsilon \leq 1$. *Тогда*

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)) = \sum_{\alpha-\varepsilon<h\leq\beta+\varepsilon} \int_a^b e(f(u)-hu)du + O(\varepsilon^{-1} + \ln(\beta-\alpha+2)),$$

где постоянная в знаке O *является абсолютной.*

Доказательство см. [34].

Лемма 1.5. *Пусть* $(a,q)=1$, q *– натуральное число,* b *– произвольное целое число. Тогда имеем*

$$S_b(a,q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n+bk}{q}\right) \ll q^{1/2+\varepsilon}(b,q).$$

Доказательство см. [36].

Лемма 1.6. *Пусть действительная функция* $f(u)$ *и монотонная функция* $g(u)$ *удовлетворяют условиям:* $f'(u)$ *— монотонна,* $|f'(u)| \geq m > 0$ *и* $|g(u)| \leq M$. *Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m}.$$

Доказательство см. [1].

Лемма 1.7. *Пусть при $a \le u \le b$ вещественная функция $f(u)$ имеет производную n – го порядка ($n > 1$), причём при некотором $A > 0$ выполняется неравенство $A \le |f^{(n)}(u)|$. Тогда справедлива оценка*

$$\int_a^b e(f(u))du \le \min(b-a, 6nA^{-\frac{1}{n}}).$$

Доказательство см. [35].

Лемма 1.8. *Пусть $n \ge 3$ – целое число и $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t$ – многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \ldots, a_1, q) = 1$, q – натуральное число. Тогда имеем*

$$|S(q, f(t))| = \left| \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{f(k)}{q}\right) \right| \le c(n) q^{1-\frac{1}{n}},$$

где

$$c(n) = \begin{cases} \exp(4n), & \text{при } n \ge 10; \\ \exp(n(A(n)), & \text{при } 3 \le n \le 9. \end{cases}$$

$$A(3) = 6,1, \quad A(4) = 5,5, \quad A(5) = 5, \quad A(6) = 4,7,$$

$$A(7) = 4,4, \quad A(8) = 4.2, \quad A(9) = 4,05.$$

Доказательство см. [35].

1.2 Поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в больших дугах

Р. Вон [31] изучая суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha, x) = \sum_{m\le x} e\left(\alpha m^n\right), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad q \le \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau},$$

в больших дугах воспользовавшись оценкой

$$S_b(a, q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n + bk}{q}\right) \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(b, q), \tag{1.2.1}$$

принадлежащей Хуа Ло-кену [36], методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{S(a, q)}{q} \int\limits_0^x e\left(\lambda t^n\right) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \left(1 + x^n|\lambda|\right)^{\frac{1}{2}}\right). \quad S(a, q) = S_0(a, q),$$

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q, то есть при выполнении условия

$$|\lambda| \le \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{x\ S(a, q)}{q} \int\limits_0^1 e\left(\lambda t^n\right) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Этими оценками он воспользовался при выводе асимптотической формулы в проблеме Варинга для восьми кубов [40].

Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda,\ q \le \tau, \quad (a, q) = 1,\ |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \tag{1.2.2}$$

получающиеся из $T(\alpha, x)$ заменой условия $m \leq x$ на условие $x-y < m \leq x$, в больших дугах при $n = 2, 3, 4$ были исследованы в работах [18, 19, 21, 20, 22] и приложены при выводе асимптотических формул с почти равными слагаемыми в проблеме Варинга (для кубов и четвёртых степеней) в [25, 26] и кубической задаче Эстермана в [24, 20]. Затем при произвольном фиксированном n сумма $T(\alpha; x, y)$ была изучена в работах [32, 33]. Основным результатом этой работы является упрощение доказательства и уточнение основной теоремы работ [32, 33].

Теорема 1.1. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ *и* $\lambda \geq 0$, *тогда при* $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$ *имеет место формула*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ *имеет место оценка*

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\leq k\leq n} (yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 1.1.1. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, *тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{y}{q} S(a, q) \gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^n\right) dt.$$

Следствие 1.1.2. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, *тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha, x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\leq k\leq n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}} \right).$$

Следствия 1.1.1 и 1.1.2 являются обобщением результатов Р.Вона [31] для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ вида (1.2.2).

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона [34], оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных [35] и оценки полных рациональных сумм (1.2.1), принадлежащей Хуа Ло-кену [36].

Доказательство теоремы 1.1. Пользуясь ортогональным свойством полной линейной рациональной тригонометрической суммы, находим

$$\begin{aligned} T(\alpha; x, y) &= \sum_{x-y<m\leq x} e\left(\frac{ak^n}{q} + \lambda m^n\right) \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv m (mod q)}}^{q} 1 = \\ &= \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n}{q}\right) \sum_{\substack{x-y<m\leq x \\ m\equiv k (mod q)}} e(\lambda m^n) = \\ &= \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n}{q}\right) \sum_{x-y<m\leq x} e(\lambda m^n) \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q} e\left(\frac{b(k-m)}{q}\right) = \\ &= \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q} T_b(\lambda; x, y) S_b(a, q), \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

где

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e\left(\lambda m^n - \frac{bm}{q}\right), \quad T(\lambda; x, y) = T_0(\lambda; x, y),$$

$$S_b(a, q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n + bk}{q}\right), \quad S(a, q) = S_0(a, q).$$

Через $R(\alpha; x, y)$ обозначим часть суммы $T(\alpha; x, y)$, которая определяется соотношением (1.2.3), в котором отсутствует слагаемое при $b = q$, то есть

$$R(\alpha; x, y) = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} T_b(\lambda; x, y) S_b(a, q). \tag{1.2.4}$$

Имея в виду, что $n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\}$ – целое число, представим $T_b(\lambda; x, y)$ в виде

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e\left(f(m, b)\right),$$

$$f(u, b) = \lambda u^n - (n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\})u - \frac{bu}{q}.$$

Находим производную первого и второго порядка функции $f(u, b)$:

$$f'(u, b) = n\lambda(u^{n-1} - x^{n-1}) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q},$$

$$f''(u, b) = n(n-1)\lambda u^{n-2} \ge 0.$$

Следовательно функция $f'(u, b)$, $u \in (x-y, x]$ является неубывающей, поэтому при всех $u \in [x-y, x)$ и любом b, $b = 1, 2, \ldots, q$ имеет место неравенство

$$f'(x-y, b) < f'(u, b) \le f'(x, b). \tag{1.2.5}$$

Оценивая $f'(x, b)$ сверху, имеем:

$$f'(x, b) = \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} < 1 - \frac{b}{q}, \tag{1.2.6}$$

Для оценки снизу $f'(x-y,b)$ воспользуемся представлением

$$f'(x-y,b) = -n\lambda\left(x^{n-1}-(x-y)^{n-1}\right) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} =$$

$$= n\lambda\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k x^{n-1-k}y^k + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} =$$

$$= -n(n-1)\lambda x^{n-2}y + n\lambda\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k x^{n-1-k}y^k + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q}.$$

Пользуясь монотонностью $f'(u,b)$, условием $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и неравенством

$$W = \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k x^{n-1-k}y^k \geq 0, \quad n \geq 3, \quad 3x \geq (n-3)y,$$

имеем

$$f'(u,b) \leq f'(x,b) = \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} < 1,$$

$$f'(u,b) \geq f'(x-y,b) = -n(n-1)\lambda x^{n-2}y + n\lambda W + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} \geq$$

$$\geq -n(n-1)\lambda x^{n-2}y - \frac{b}{q} \geq -\frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} - \frac{b}{q} \geq -1 + \frac{1}{2q}.$$

Поэтому, применяя к сумме $T_b(\lambda;x,y)$ формулу суммирования Пуассона, (лемма 1.4) при $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\varepsilon=0,5$, получим

$$T_b(\lambda;x,y) = I(-1,b) + I(0,b) + I(1,b) + O(1), \tag{1.2.7}$$

$$I(h,b) = \int_{x-y}^{x} e(f_h(u,b))du, \quad f_h(u,b) = f(u,b) - hu.$$

Функция

$$f_h'(u,b) = n\lambda(u^{n-1} - x^{n-1}) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h$$

на отрезке $u \in [x-y,x]$ является неубывающей функцией, поэтому

$$f_h'(x-y,b) \leq f_h'(u,b) \leq f_h'(x,b),$$

что можно представить в виде

$$\{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h - \eta < f_h'(u,b) \leq \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h, \tag{1.2.8}$$

$$\eta = n(n-1)\lambda x^{n-2}y - n\lambda W \leq n(n-1)\lambda x^{n-2}y \leq \frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} \leq \frac{1}{2q}.$$

Далее, подставляя (1.2.7) в (1.2.3) и (1.2.4), найдём

$$T(\alpha; x, y) = T_{-1} + T_0 + T_1 + O\left(\frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1}|S_b(a,q)|\right), \tag{1.2.9}$$

$$R(\alpha; x, y) = R_{-1} + R_0 + R_1 + O\left(\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1}|S_b(a,q)|\right), \tag{1.2.10}$$

$$T_h = \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} I(h,b)S_b(a,q),$$

$$R_h = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} I(h,b)S_b(a,q).$$

Пользуясь оценкой (1.2.1), оценим остаточный член:

$$\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1}|S_b(a,q)| \ll q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}(b,q) = q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{\delta\backslash q}\delta \sum_{\substack{1\leq b\leq q-1\\(b,q)=\delta}} 1 \leq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\tau(q).$$

Оценим каждую сумму T_h и R_h отдельно.

Оценка T_1 и R_1. Полагая $h = 1$ в (1.2.8), имеем

$$f_1'(u,b) \leq \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - 1 \leq -\frac{b}{q} < 0.$$

Оценивая интеграл по величине первой производной (лемма 1.6), имеем

$$|I(1,b)| = \left|\int_{x-y}^{x} e(f_1(u,b))du\right| \ll \frac{q}{b}.$$

Отсюда и из (1.2.1), имеем

$$R_1 = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} I(1,b)S_b(a,q) \ll \sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

В случае $b=0$, воспользовавшись неравенством

$$f_1^{(k)}(u,q)\geq n(n-1)\dots(n-k+1)\lambda(x-y)^{n-k}\gg\lambda x^{n-k},\quad k=2,3,\dots,n,$$

оценивая интеграл $I(1,0)$ по величине k – ой производной (лемма 1.7), найдём

$$|I(1,0)|\ll\min_{2\leq k\leq n}\left(y,\lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right).$$

Отсюда и воспользовавшись оценкой $|S(a,q)|\ll q^{1-\frac{1}{n}}$ (лемма 1.5), с учётом оценки R_1 получим

$$T_1\leq|R_1|+\frac{|I(1,0)||S(a,q)|}{q}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}+\min_{2\leq k\leq n}\left(yq^{-\frac{1}{n}},\lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Оценка T_{-1} и R_{-1}. Полагая $h=-1$ в (1.2.8), имеем

$$f'_{-1}(u,b)>\{n\lambda x^{n-1}\}+\frac{q-b}{q}-\eta\geq\frac{q-b}{q}.$$

Интеграл $I(-1,b)$ также оценим по величине первой производной (лемма 1.6). Имеем

$$|I(-1,b)|=\left|\int\limits_{x-y}^{x}e(f_{-1}(u,b))du\right|\ll\frac{q}{q-b}.$$

Отсюда, поступая аналогично случаю оценки R_1, получим

$$R_{-1}=\sum_{b=1}^{q-1}\frac{I(-1,b)S_b(a,q)}{q}\ll\sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{q-b}\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

$$T_{-1}\leq|R_{-1}|+\frac{|I(-1,0)||S(a,q)|}{q}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}+\frac{|S_b(a,q)|}{q}\ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

Оценка R_0. Если $\{n\lambda x^{n-1}\}\leq\frac{1}{2q}$, то, полагая $h=0$ в (1.2.8), имеем

$$f'_0(u,b)\leq\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}\leq\frac{1-2b}{2q}\leq-\frac{b}{2q}<0.$$

Интеграл $I(0,b)$, также оценивая по величине первой производной, найдём

$$|I(0,b)| = \left| \int\limits_{x-y}^{x} e(f_0(u,b))du \right| \ll \frac{q}{b}.$$

Поступая аналогично случаю оценки R_1, получим

$$R_0 = \sum_{b=1}^{q-1} \frac{I(0,b)S_b(a,q)}{q} \ll \sum_{b=1}^{q-1} \frac{|S_b(a,q)|}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{b=1}^{q-1} \frac{(b,q)}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}.$$

Отсюда, из оценок R_1 и R_{-1} с учётом (1.2.10), получим первое утверждение теоремы.

Оценка T_0. При $\{n\lambda x^{n-1}\} \geq \frac{1}{2q}$, определим натуральное число r соотношением

$$\frac{r}{2q} \leq \{n\lambda x^{n-1}\} < \frac{r+1}{2q}, \qquad 1 \leq r \leq 2q-1.$$

Отсюда, из неравенства (1.2.8) при $h=0$ и условия $\eta \leq \frac{1}{2q}$, найдём

$$f_0'(u,b) > \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - \eta \geq \frac{r-2b-1}{2q}, \tag{1.2.11}$$

$$f_0'(u,b) \leq \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} < \frac{r-2b+1}{2q}. \tag{1.2.12}$$

Пусть $r = 2r_1$ – чётное ($1 \leq r_1 \leq q-1$). Отрезок суммирования $0 \leq b \leq q-1$ в сумме T_0 разобьём на следующие три множества:

$$0 \leq b \leq r_1 - 1, \qquad b = r_1, \qquad r_1 + 1 \leq b \leq q-1,$$

соответственно в первом из которых правая часть неравенства (1.2.11) больше нуля, а в третьем правая часть неравенства (1.2.12) меньше нуля, то есть

$$f_0'(u,b) > \frac{2r_1 - 2b - 1}{2q} \geq \frac{r_1 - b}{2q}, \qquad 0 \leq b \leq r_1 - 1,$$

$$f_0'(u,b) < \frac{2r_1 - 2b + 1}{2q} \leq \frac{r_1 - b}{2q}, \qquad r_1 + 1 \leq b \leq q-1.$$

Воспользовавшись этими неравенствами, оценивая интеграл $I(0,b)$ по величине первой производной, найдём

$$I(0,b) = \int\limits_{x-y}^{x} e(f_0(u,b))du \ll \frac{q}{|r_1 - b|}, \quad b \neq r_1.$$

В случае $b = r_1$, оценивая аналогично оценке интеграла $I(1,0)$, найдём

$$|I(0,r_1)| \ll \min_{2\le k\le n} \left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}}\right).$$

Воспользовавшись этими оценками и оценкой $|S(a,q)| \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ (лемма 1.5), получим

$$T_0 = \sum_{b=0}^{q-1} \frac{I(0,b)S_b(a,q)}{q} \ll q^{-\frac{1}{n}} \left(\sum_{\substack{b=0,\\ b\neq r_1}}^{q-1} \frac{q}{|r_1 - b|} + \min_{2\le k\le n} \left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}}\right) \right) \ll$$
$$\ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\le k\le n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Пусть теперь $r = 2r_1 + 1$ – нечётное ($0 \le r_1 \le q-1$). Отрезок суммирования $0 \le b \le q-1$ в сумме R_0 разобьём на следующие три множества:

$$0 \le b \le r_1 - 1, \qquad b = r_1,\, r_1+1, \qquad r_1 + 2 \le b \le q-1,$$

соответственно в первом из которых правая часть неравенства (1.2.11) больше нуля, а в третьем — правая часть неравенства (1.2.12) меньше нуля, то есть

$$f_0'(u,b) > \frac{2r_1 + 1 - 2b - 1}{2q} = \frac{r_1 - b}{q}, \qquad 0 \le b \le r_1 - 1,$$
$$f_0'(u,b) < \frac{2r_1 + 1 - 2b + 1}{2q} \le \frac{r_1 - b}{2q}, \qquad r_1 + 2 \le b \le q-1.$$

Следовательно,

$$I(0,b) = \int\limits_{x-y}^{x} e(f_0(u,b))du \ll \frac{q}{|r_1 - b|}, \quad b \neq r_1 - 1,\, r_1.$$

В случае $b=r_1-1, r_1$, поступая аналогично предыдущей оценке $I(0,r_1)$, найдём

$$|I(0,b)| \ll \min_{2\le k\le n}\left(y, \lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right), \qquad b=r_1,\ r_1+1.$$

Из этих оценок для $I(0,b)$ получим

$$\begin{aligned} T_0 &\le \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1}|I(0,b)||S_b(a,q)| \ll \\ &\ll q^{-\frac{1}{n}}\left(\sum_{\substack{b=0,\\ b\ne r_1,r_1+1}}^{q-1}\frac{q}{|r_1-b|}+\min_{2\le k\le n}\left(y,\lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}\right)\right) \ll \\ &\ll q^{1-\frac{1}{n}}\ln q+\min_{2\le k\le n}\left(yq^{-\frac{1}{n}},\lambda^{-\frac{1}{k}}x^{1-\frac{n}{k}}q^{-\frac{1}{n}}\right). \end{aligned}$$

Подставляя оценки для T_1, T_{-1} и T_0 в (1.2.9), получим второе утверждение теоремы.

Замечание. Случай $\lambda<0$ сводится к случаю $\lambda\ge 0$, если формуле (1.2.3) придадим форму

$$\overline{T(\alpha;x,y)}=\frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1}T_{q-b}(-\lambda;x,y)S_{q-b}(q-a,q)=\frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1}T_b(-\lambda;x,y)S_b(q-a,q).$$

1.3 Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвёртого порядка в малых дугах

При выводе асимптотических формул в аддитивных задачах с почти равными слагаемыми, к которым относится проблема Варинга, проблема Эстермана, основным моментом наряду с круговым методом Харди–Литлвуда в варианте тригонометрических сумм И. М. Виноградова является также поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m\le x}e(\alpha m^n),\ \ \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad q\le\tau,\quad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},$$

в больших дугах и их оценка в малых дугах. Поведение $T(\alpha;x,y)$ в больших дугах изучено в предыдущем параграфе. В этом параграфе воспользовавшись методом Г.Вейля, найдём нетривиальную оценку короткой тригонометрической суммы Вейля четвёртого порядка.

Лемма 1.9. *Пусть x и y – вещественные числа, $1\le y<x$,*

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m<x}e(\alpha m^4).$$

Тогда имеет место соотношение

$$|T(\alpha;x,y)|^8\le 2^{11}y^4\sum_{0<k\le y}\ \sum_{0<r\le y-k}\ \sum_{0<t<y-k-r}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t}e(24\alpha krtm)\right|+2^{11}y^7.$$

Доказательство. Преобразуем $|T(\alpha;x,y)|^2$. Имеем

$$\begin{aligned}|T(\alpha;x,y)|^2&=\sum_{x-y<m,n\le x}e(\alpha(m^4-n^4))=\\&=\sum_{x-y<m<n\le x}e(\alpha(m^4-n^4))+\sum_{x-y<n<m\le x}e(\alpha(m^4-n^4))+\sum_{x-y<m\le x}1\le\\&\le 2\left|\sum_{x-y<m<x}\ \sum_{m<n\le x}e(\alpha(n^4-m^4))\right|+y=\\&=2\left|\sum_{x-y<m<x}\ \sum_{0<k\le x-m}e(\alpha((m+k)^4-m^4))\right|+y.\end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись тождеством

$$(m+k)^4-m^4=kf_1(m)+k^4,\qquad f_1(m)=4m^3+6km^2+4k^2m,$$

найдём

$$|T(\alpha;x,y)|^2 \le 2\left|\sum_{0<k\le y} e(\alpha k^4) \sum_{x-y<m\le x-k} e(\alpha k f_1(m))\right| + y \le$$

$$\le 2\sum_{0<k\le y} |W(k)| + y, \quad W(k) = \sum_{x-y<m\le x-k} e(\alpha k f_1(m)).$$

Возводя обе части полученного неравенства в четвёртую степень, затем дважды последовательно воспользовавшись соотношением $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ и неравенством Коши, найдём

$$|T(\alpha;x,y)|^8 \le \left(2\sum_{0<k\le y}|W(k)|+y\right)^4 \le \left(2^3\left(\sum_{0<k\le y}|W(k)|\right)^2+2y^2\right)^2 \le$$

$$\le \left(2^3 y\sum_{0<k\le y}|W(k)|^2+2y^2\right)^2 \le 2^7y^2\left(\sum_{0<k\le y}|W(k)|^2\right)^2+2^3y^4 \le$$

$$\le 2^7y^3\sum_{0<k\le y}|W(k)|^4+2^3y^4. \tag{1.3.1}$$

Преобразуем $|W(k)|^2$. Имеем

$$|W(k)|^2 = \sum_{x-y<m,n\le x-k} e(\alpha k(f_1(n)-f_1(m))) \le$$

$$\le 2\left|\sum_{x-y<m\le x-k}\ \sum_{m<n\le x-k} e(\alpha k(f_1(n)-f_1(m)))\right| + y =$$

$$\le 2\left|\sum_{x-y<m<x-k}\ \sum_{0<r\le x-k-m} e(\alpha k(f_1(m+r)-f_1(m)))\right| + y =$$

$$= 2\left|\sum_{0<r\le y-k}\ \sum_{x-y<m<x-k-r} e(\alpha k(f_1(m+r)-f_1(m)))\right| + y.$$

Здесь воспользовавшись тождеством

$$\begin{aligned} f_1(m+r)-f_1(m) &= 4((m+r)^3-m^3)+6k((m+r)^2-m^2)+4k^2r = \\ &= 4(3m^2r+3mr^2+r^3)+6k(2mr+r^2)+4k^2r = \\ &= 12m^2r+12m(kr+r^2)+4k^2r+6kr^2+4r^3 = \\ &= 12rf_2(m)+4k^2r+6kr^2+4r^3, \\ f_2(m) &= m^2+m(k+r), \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} |W(k)|^2 &\le 2\left|\sum_{0<r\le y-k} e(\alpha k(4k^2r+6kr^2+4r^3))\sum_{x-y<m<x-k-r} e(12\alpha krf_2(m))\right| + y \le \\ &\le 2\sum_{0<r\le y-k} |W(k,r)|+y, \qquad (1.3.2) \\ W(k,r) &= \sum_{x-y<m<x-k-r} e(12\alpha krf_2(m)). \end{aligned}$$

Далее воспользовавшись тождеством

$$\begin{aligned} f_2(m+t)-f_2(m) &= (m+t)^2+(m+t)(k+r)-m^2-m(k+r) = \\ &= 2mt+t^2+(k+r)t, \end{aligned}$$

и поступая аналогично как в случае $W(k)$, найдём:

$$|W(k,r)|^2 \le 2\left|\sum_{x-y<m<x-k-r}\ \sum_{m<n<x-k-r} e(12\alpha kr(f_2(n)-f_2(m)))\right| + y =$$

$$= 2\left|\sum_{x-y<m<x-k-r}\ \sum_{0<t<x-k-r-m} e(12\alpha kr(f_2(m+t)-f_2(m)))\right| + y =$$

$$= 2\left|\sum_{0<t<y-k-r}\ \sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(12\alpha kr(f_2(m+t)-f_2(m)))\right| + y =$$

$$= 2\left|\sum_{0<t<y-k-r} e(12\alpha kr(t^2+(k+r)t)) \sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(24\alpha krtm)\right| + y =$$

$$= 2\sum_{0<t<y-k-r}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(24\alpha krtm)\right| + y. \qquad (1.3.3)$$

Последовательно подставляя в (1.3.1) значения $W(k)$ и $W(k,r)$ соответственно из (1.3.2) и (1.3.3), каждый раз воспользовавшись соотношением

$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ и неравенством Коши, найдём

$$
\begin{aligned}
|T(\alpha; x, y)|^8 &\le 2^7 y^3 \sum_{0<k\le y} |W(k)|^4 + 2^3 y^4 \le \\
&\le 2^7 y^3 \sum_{0<k\le y} \left(2 \sum_{0<r\le y-k} |W(k,r)| + y \right)^2 + 2^3 y^4 \le \\
&\le 2^7 y^3 \sum_{0<k\le y} \left(2^3 \left(\sum_{0<r\le y-k} |W(k,r)| \right)^2 + 2y^2 \right) + 2^3 y^4 \le \\
&\le 2^{10} y^4 \sum_{0<k\le y} \sum_{0<r\le y-k} |W(k,r)|^2 + 2^8 y^6 + 2^3 y^4 \le \\
&\le 2^{10} y^4 \sum_{0<k\le y} \sum_{0<r\le y-k} \left(2 \sum_{0<t<y-k-r} \left| \sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(24\alpha krtm) \right| + y \right) + 2^9 y^6 \le \\
&\le 2^{11} y^4 \sum_{0<k\le y} \sum_{0<r\le y-k} \sum_{0<t<y-k-r} \left| \sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(24\alpha krtm) \right| + 2^{11} y^7.
\end{aligned}
$$

Теорема 1.2. *Пусть* $x \ge x_0 > 0$, $y_0 < y \le 0,01x$, α *– вещественное число,*

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \le \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y \left(q^{-\frac{1}{16}} + y^{-\frac{1}{16}} \ln^{\frac{1}{16}} q + y^{-\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{16}} \ln^{\frac{1}{16}} q \right) (\ln y)^{\frac{7}{16}}.$$

Доказательство. Применяя к сумме по m в лемме 1.9, затем лемму 1.1, имеем

$$|T(\alpha;x,y)|^8 \le 2^{11}y^4 \sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(24\alpha krtm)\right| + 2^{11}y^7 \ll$$

$$\le 2^{11}y^4 \sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{0<t<y-k-r} \min\left(y, \frac{1}{\|24\alpha krt\|}\right) + 2^{11}y^7 =$$

$$= 2^{11}y^4 \sum_{n\le 24y^3} \eta(n)\min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + 2^{11}y^7,$$

$$\eta(n) = \sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{\substack{0<t<y-k-r\\ n=24krt}} 1 \le \tau_3(n),$$

Применяя неравенство Коши, лемму 1.3, затем лемму 1.2, получим

$$|T(\alpha;x,y)|^{16} \ll y^8 \sum_{n\le 24y^3}|\eta(n)|^2 \sum_{n\le 24y^3}\min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right)^2 + y^{14} \ll$$

$$\ll y^9 \sum_{n\le 24y^3}\tau_3^2(n)\sum_{n\le 24y^3}\min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^{14} \ll$$

$$\ll y^{12}\ln^7 y \sum_{n\le 24y^3}\min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^{14} \ll$$

$$\ll y^{12}\ln^7 y\left(\frac{y^3}{q}+1\right)(y+q\ln q) + y^{14} =$$

$$= y^{16}\left(\frac{1}{q}+\frac{\ln q}{y}+\frac{1}{y^3}+\frac{q\ln q}{y^4}\right)\ln^7 y + y^{14}$$

$$\ll y^{16}\left(\frac{1}{q}+\frac{\ln q}{y}+\frac{q\ln q}{y^4}\right)\ln^7 y.$$

Следовательно,

$$|T(\alpha;x,y)| \ll y\left(q^{-\frac{1}{16}} + y^{-\frac{1}{16}}\ln^{\frac{1}{16}} q + y^{-\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{16}}\ln^{\frac{1}{16}} q\right)(\ln y)^{\frac{7}{16}}.$$

Теорема доказана.

Глава 2

Асимтотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми

2.1 Формулировка результатов

Т. Эстерман [37] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{2.1.1}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число.

В работах [18] и [23] эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (2.1.1) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H;\ i = 1, 2, \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \le H;\ H \ge N^{\frac{3}{4}} \ln^3 N.$$

Далее в работе [20] асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми то есть, когда в уравнении (2.1.1) квадрат натурального m заменяется на его куб при $H \geq N^{\frac{5}{6}}\mathscr{L}^{10}$. (см. также [24]).

Основным результатом третей главы является теорема 2.1 об асимптотической формуле для ещё более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, когда в уравнении (2.1.1) квадрат натурального m заменяется на четвёртую степень. Теорема 2.1 доказывается круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова, используя результаты предыдущих глав, а именно

- теорему 1.1 о поведении коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ для α, принадлежащих большим дугам;
- теорему 1.2 о нетривиальной оценке коротких тригонометрических сумм Г.Вейля $T(\alpha; x, y)$ четвёртой степени в малых дугах;
- лемму 2.3 о поведении коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами $S(\alpha; x, y)$ для α, принадлежащих большим дугам.

Теорема 2.1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $I(N, H)$ — число представлений N суммою двух простых чисел p_1, p_2 и четвёртой степенью натурального m с условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left|m^4 - \frac{N}{3}\right| \leq H,$$

$\rho(N, p)$ — число решений сравнения $x^4 \equiv N \pmod p$. Тогда при $H \geq N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$

справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{\sqrt[4]{3}\mathfrak{S}(N)\,H}{4\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^3}\right), \quad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N,p)}{(p-1)^2}\right).$$

Следствие 2.1.1. *Существует такое N_0, что каждое натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммы двух простых чисел p_1, p_2 и четвёртой степени натурального m с условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}, \quad i = 1, 2,$$

$$\left|m - \sqrt[4]{\frac{N}{3}}\right| \le \frac{3N^{\frac{1}{6}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}}{4\sqrt[4]{3}} + \frac{27N^{\frac{1}{12}}\mathscr{L}^{\frac{80}{3}}}{32\sqrt[4]{3}} + \frac{189\mathscr{L}^{40}}{128\sqrt[4]{3}} + 0,9.$$

2.2 Вспомогательные утверждения

Лемма 2.1. *Пусть p — простое число, $(a,p) = 1$, тогда имеет место оценка*

$$|S(a,p)| \ll \sqrt{p}.$$

Доказательство см.[41].

Лемма 2.2. *Пусть $y \ge x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\pi(x) - \pi(x-y) = \frac{y}{\ln x} + O\left(\frac{y}{\ln^2 x}\right).$$

Доказательство см. [42].

Лемма 2.3. *Пусть* $x \geq x_0$, $h \leq x^{\frac{3}{16}}\exp(-(\ln x)^{0,76})$,, $y \geq hx^{\frac{5}{8}}\exp(\ln x)^{0,76}$, $\tau \geq y^2/xh$, $q \leq h$, $b \geq 224$ *— произвольное фиксированное положительное число,*

$$F(q,x) = \begin{cases} \exp(-\ln^4\ln x) & \text{если } q \leq (\ln x)^b, \\ (\ln x)^{b+3} & \text{если } q > (\ln x)^b. \end{cases}$$

Тогда справедливо равенство:

$$S(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n)e(\alpha n) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin\pi\lambda y}{\pi\lambda}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right) + O\left(\frac{y}{q^{1/2}}F(q,x)\right).$$

Доказательство см.[43].

Лемма 2.4. *Пусть* $q = q_1q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, $(a, q_1q_2) = 1$, *тогда существуют единственные числа* a_1 *и* a_2, *такие что*

$$a = a_1q_2 + a_2q_1, \quad (a_1, q_1) = 1, \quad 1 \leq a_1 \leq q_1, \quad (a_2, q_2) = 1, \quad 1 \leq a_2 \leq q_2,$$

для которых выполняется соотношение

$$S(a,q) = S(a_1,q_1)S(a_2,q_2).$$

Доказательство. Ввиду того что в сумме $S(a,q)$ любой вычет x по модулю $q = q_1q_2$ можно представить единственным способом в виде

$$x \equiv x_1q_2 + x_2q_1 \pmod{q_1q_2}, \qquad 1 \leq x_1 \leq q_1, \quad 1 \leq x_2 \leq q_2,$$

имеем

$$\begin{aligned}
S(a,q) =& S(a_1q_2+a_2q_1, q_1q_2) = \\
&= \sum_{x_1=1}^{q_1}\sum_{x_2=1}^{q_2} e\left(\frac{(a_1q_2+a_2q_1)(x_1q_2+x_2q_1)^4}{q_1q_2}\right) = \\
&= \sum_{x_1=1}^{q_1} e\left(\frac{a_1(x_1q_2)^4}{q_1}\right)\sum_{x_2=1}^{q_2} e\left(\frac{a_2(x_2q_1)^4}{q_2}\right) = \\
&= \sum_{x_1=1}^{q_1} e\left(\frac{a_1x_1^4}{q_1}\right)\sum_{x_2=1}^{q_2} e\left(\frac{a_2x_2^4}{q_2}\right) = S(a_1,q_1)S(a_2,q_2).
\end{aligned}$$

Лемма 2.5. *Пусть q — число свободное от квадратов, $(a,q)=1$, тогда имеет место оценка*

$$|S(a,q)| \ll \sqrt{q}.$$

Доказательство. Пусть $q = p_1p_2\ldots p_k$ — каноническое разложение числа q на простые сомножители. Согласно лемме 2.4 существуют единственные числа $a_1, a_2\ldots, a_k$, такие что

$$a = a_1q_1+a_2q_2+\ldots+a_kq_k,\ q_i = qp_i^{-1},\ (a_i,p_i)=1,\ 1\le a_i\le p_i,\ i=1,2,\ldots,k,$$

для которых выполняется соотношение

$$S(a,q) = S(a_1,p_1)S(a_2,p_2)\ldots S(a_k,p_k).$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой А.Вейла (лемма 2.1), получим утверждение леммы.

2.3 Доказательство теоремы 2.1

Не ограничивая общности, будем считать, что $H = N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$. Пусть

$$\tau = 16HN^{-\frac{1}{4}}, \qquad æ\tau = 1.$$

Имеем

$$I(N,H) = \int\limits_{-æ}^{1-æ} S_1^2(\alpha;N,H)T_1(\alpha;N,H)e(-\alpha N)d\alpha,$$

$$S_1(\alpha;N,H) = \sum_{|p-N/3|\le H} e(\alpha p);$$

$$T_1(\alpha;N,H) = \sum_{|n^3-N/3|\le H} e(\alpha n^4).$$

При $|p-N/3| \le H$, пользуясь формулой Лагранжа о конечных приращениях, легко показать, что

$$\ln p = \ln\frac{N}{3} + O\left(\frac{H}{N}\right).$$

Поэтому

$$S_1(\alpha;N,H) = \sum_{|p-N/3|\le H}\left(\frac{\ln p}{\ln\frac{N}{3}} + O\left(\frac{H}{N\mathscr{L}}\right)\right)e(\alpha p) =$$

$$= \ln^{-1}\frac{N}{3}\left(\sum_{|n-N/3|\le H}\Lambda(n)e(\alpha n) - \sum_{\substack{|p^k-N/3|\le H\\ k\ge 2}}\Lambda(p^k)e(\alpha p^k)\right) + O\left(\frac{H}{N\mathscr{L}}\right) =$$

$$= \ln^{-1}\frac{N}{3}S\left(\alpha;\frac{N}{3}+H,2H\right) + O\left(\frac{H^2}{N}\right). \tag{2.3.1}$$

Воспользовавшись соотношением

$$\left(\frac{N}{3}\pm H\right)^{\frac{1}{4}} = N_1 \pm H_1 + O(H^2N^{-7/4}), \quad N_1 = \sqrt[4]{\frac{N}{3}}, \quad H_1 = \frac{H}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}},$$

находим

$$T_1(\alpha;N,H) = T(\alpha;N_1+H_1,2H_1) + O(H^2N^{-7/4}). \tag{2.3.2}$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональным числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q)=1, \quad 1 \le q \le \tau, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}. \tag{2.3.3}$$

В этом представлении $0 \le a \le q-1$, причём $a=0$ лишь при $q=1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α, для которых $q \le \mathscr{L}^{40}$ в представлении (2.3.3), через $\mathfrak{m}$ – обозначим оставшиеся α. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьем множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{\alpha: \ \alpha \in \mathfrak{M}, \ \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{\mathscr{L}^2}{H}\right\},$$
$$\mathfrak{M}_2 = \left\{\alpha: \ \alpha \in \mathfrak{M}, \ \frac{\mathscr{L}^2}{H} < \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q\tau}\right\}.$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$I(N,H) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2) + I(\mathfrak{m}).$$

В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N,H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$. По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}_1) = \sum_{q \le \mathscr{L}^{40}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a,q), \tag{2.3.4}$$

$$I(a,q) = \int\limits_{|\lambda| \le \mathscr{L}^2/H} F(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\lambda, \tag{2.3.5}$$

$$F(\alpha; N, H) = S_1^2(\alpha; N, H) T_1(\alpha; N, H), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda.$$

К сумме $S(\alpha; N/3+H, 2H)$ применим лемму 2.3, полагая, $x = N/3+H$, $y = 2H$, $h = HN^{-\frac{3}{4}} = N^{\frac{1}{6}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$, $b = 224$. Проверим выполнение условий:

$$h = \frac{H}{\sqrt[4]{N^3}} = N^{\frac{1}{6}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}} < N^{\frac{3}{16}}\exp(-\mathscr{L}^{0{,}76});$$

$$h(N/3+H)^{\frac{5}{8}}\exp\mathscr{L}^{0{,}76} \le N^{\frac{1}{8}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}\cdot N^{\frac{5}{8}}\exp\mathscr{L}^{0{,}76} \le$$

$$\le N^{\frac{3}{4}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}\exp\mathscr{L}^{0{,}76} \le N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}} = H.$$

$$\tau = \frac{12H}{\sqrt[4]{N}} > \frac{12H}{\sqrt[4]{N}}\cdot\frac{N}{N+3H} = \frac{4H^2}{N/3+H}\cdot\frac{\sqrt[4]{N^3}}{H} = \frac{(2H)^2}{(N/3+H)h}.$$

Согласно этой лемме, для $\alpha\in\mathfrak{M}_1$ имеет место

$$S\left(\alpha;\frac{N}{3}+H,2H\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+R_1,$$

$$R_1 \ll H\exp(-c\ln^4\mathscr{L}).$$

Отсюда с учётом формулы (2.3.1), найдём

$$S_1(\alpha;N,H) = \frac{1}{\ln(N/3)}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+R_1.$$

Воспользовавшись этим соотношением, и имея виду, что

$$\left|\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\right| \le \frac{H}{\varphi(q)}, \qquad |S_1(\alpha;N,H)| \le \frac{H}{\mathscr{L}},$$

найдём

$$S_1^2(\alpha;N,H) = \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda\,\ln(N/3)}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+R_1\right)S_1(\alpha;N,H) =$$

$$= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda\,\ln(N/3)}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda\,\ln(N/3)}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)+R_1\right)+R_1S_1(\alpha;N,H) =$$

$$= \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2\ln^2(N/3)}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)+O\left(\frac{HR_1}{\varphi(q)\mathscr{L}}\right)+O\left(\frac{HR_1}{\mathscr{L}}\right),$$

то есть

$$S_1^2\left(\frac{a}{q}+\lambda; N, H\right)-\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\cdot\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2\ln^2(N/3)}\,e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)\ll\frac{HR_1}{\varphi(q)\mathscr{L}}.$$

Почленно умножая полученное неравенство на неравенство $T_1(\alpha; N, H)\ll HN^{-3/4}$, то есть на тривиальную оценку суммы $T_1(\alpha; N, H)$, и имея в виду, что $F(\alpha; N, H)=S_1^2(\alpha; N, H)T_1(\alpha; N, H)$, находим

$$F(\alpha; N, H)=\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2\ln^2(N/3)}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)T_1\left(\alpha; N, H\right)+R_2, \tag{2.3.6}$$
$$R_2\ll\frac{H^2R_1}{\varphi(q)N^{3/4}\mathscr{L}}.$$

Из неравенства

$$24(N_1+H_1)^2\cdot 2H_1=48\left(\sqrt[4]{\frac{N}{3}}+\frac{H}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}}\right)^2\frac{H}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}}=$$
$$=\frac{12\sqrt[4]{3}\,H}{\sqrt[4]{N}}\left(1+\frac{3H}{4N}\right)^2<\frac{12\sqrt[4]{3}\,H}{\sqrt[4]{N}}\left(1+\frac{2\sqrt[8]{3^3}-3}{3}\right)^2=\frac{16H}{\sqrt[4]{N}}=\tau.$$

следует, что для суммы $T\left(\alpha; N_1+H_1, 2H_1\right)$ при $\alpha\in\mathfrak{M}_1$, выполняется условие следствия 1.1.1 теоремы 1.1. Согласно этому следствию и соотношению (2.3.2), найдём

$$T_1(\alpha; N, H)=T\left(\alpha; N_1+H_1, 2H_1\right)+O(H^2N^{-7/4})=$$
$$=\frac{2S(a,q)H_1}{q}\gamma(\lambda; N_1+H_1, 2H_1)+O(q^{1/2+\varepsilon})+O\left(\frac{H^2}{N^{7/4}}\right),$$

где

$$S(a,q)=\sum_{x=1}^{q}e\left(\frac{ax^4}{q}\right),$$
$$\gamma(\lambda; N_1+H_1, 2H_1)=\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(\lambda\left(\sqrt[4]{\frac{N}{3}}+\frac{Ht}{2\sqrt[4]{(N/3)^3}}\right)^4\right)dt,$$

то есть

$$T_1(\alpha; N, H) = \frac{S(a,q)H}{2q\sqrt[4]{(N/3)^3}}\gamma(\lambda; N_1+H_1, 2H_1) + R_3, \quad R_3 \ll q^{1/2+\varepsilon} + \frac{H^2}{N^{7/4}}.$$

Отсюда и из (2.3.6), получим

$$\begin{aligned}
&F(\alpha; N, H) = \\
&= \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2\ln^2(N/3)}e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right)\left(\frac{S(a,q)H}{2q\sqrt[4]{(N/3)^3}}\gamma(\lambda; N_1+H_1, 2H_1) + R_3\right) + R_2 = \\
&= \frac{H}{2\sqrt[4]{(N/3)^3}\ln^2(N/3)}\frac{\mu^2(q)S(a,q)}{q\varphi^2(q)}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\gamma(\lambda; N_1+H_1, 2H_1)e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) + R_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 &\ll \left|\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda}e\left(\frac{\lambda N}{3}\right)\right|^2 \cdot \frac{R_3}{\mathscr{L}^2} + R_2 \ll \\
&\ll \frac{H^2 R_3}{\varphi^2(q)\mathscr{L}^2} + \frac{H^3}{\varphi(q)N^{3/4}\mathscr{L}}\exp(-c\ln^4\mathscr{L}) \ll \\
&\ll \frac{H^2 q^{1/2+\varepsilon}}{\varphi^2(q)\mathscr{L}^2} + \frac{H^4}{\varphi^2(q)\mathscr{L}^2 N^{7/4}} + \frac{H^3\exp(-c\ln^4\mathscr{L})}{\varphi(q)N^{3/4}\mathscr{L}}.
\end{aligned}$$

Подставляя значение $F(\alpha; N, H)$ в формулу (2.3.5), найдём

$$I(a,q) = \frac{H}{2\sqrt[4]{(N/3)^3}\ln^2(N/3)}\frac{\mu^2(q)S(a,q)}{q\varphi^2(q)}e\left(-\frac{aN}{q}\right)\cdot J(H) + R_5, \qquad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned}
J(H) &= \int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}^2/H}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\gamma(\lambda; N_1+H_1, 2H_1)e\left(-\frac{\lambda N}{3}\right)d\lambda, \\
R_5 &\ll \frac{Hq^{1/2+\varepsilon}}{\varphi^2(q)} + \frac{H^3}{\varphi^2(q)N^{7/4}} + \frac{H^2\mathscr{L}\exp(-c\ln^4\mathscr{L})}{\varphi(q)N^{3/4}}.
\end{aligned}$$

Подставляя значение интеграла $\gamma(\lambda; N_1{+}H_1, 2H_1)$ из следствия 1.1.1 теоремы

1.1 в правую часть выражения для $I_1(a,q)$, находим

$$J(H)=\int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}^2/H}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\gamma(\lambda;N_1+H_1,2H_1)e\left(-\frac{\lambda N}{3}\right)d\lambda=$$

$$=\int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}^2/H}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(\lambda\left(\sqrt[4]{\frac{N}{3}}+\frac{Ht}{2\sqrt[4]{(N/3)^3}}\right)^4\right)e\left(-\frac{\lambda N}{3}\right)dt\,d\lambda=$$

$$=\int\limits_{|\lambda|\le\mathscr{L}^2/H}\frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2}\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(2\lambda Ht\left(1+\frac{9Ht}{4N}+\frac{9H^2t^2}{4N^2}+\frac{27H^3t^3}{32N^3}\right)\right)dt\,d\lambda=$$

$$=\frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(\frac{ut}{\pi}\left(1+\frac{9Ht}{4N}+\frac{9H^2t^2}{4N^2}+\frac{27H^3t^3}{32N^3}\right)\right)dt\,du.$$

Пользуясь соотношением

$$e\left(\frac{ut}{\pi}\left(\frac{9Ht}{4N}+\frac{9H^2t^2}{4N^2}+\frac{27H^3t^3}{32N^3}\right)\right)=$$
$$=e\left(\frac{9Hut^2}{4\pi N}\left(1+\frac{Ht}{N}+\frac{3H^2t^2}{8N^2}\right)\right)=1+O\left(\frac{H\mathscr{L}^2}{N}\right).$$

найдём

$$J(H)=\frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(\frac{ut}{\pi}\right)e\left(\frac{ut}{\pi}\left(\frac{9Ht}{4N}+\frac{9H^2t^2}{4N^2}+\frac{27H^3t^3}{32N^3}\right)\right)dt\,du=$$

$$=\frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(\frac{ut}{\pi}\right)\left(1+O\left(\frac{H\mathscr{L}^2}{N}\right)\right)du\,dt=$$

$$=\frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}\int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5}e\left(\frac{ut}{\pi}\right)dt\,du+O\left(\frac{H^2\mathscr{L}^4}{N}\right)=$$

$$=\frac{2H}{\pi}\int\limits_{|u|\le 2\pi\mathscr{L}^2}\frac{\sin^3 u}{u^3}du+O\left(\frac{H^2\mathscr{L}^4}{N}\right)=\frac{4H}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi\mathscr{L}^2}\frac{\sin^3 u}{u^3}du+O\left(\frac{H^2\mathscr{L}^4}{N}\right).$$

Заменив последний интеграл по u близким к нему несобственным интегралом, независящим от $\mathscr{L}$ и пользуясь соотношением

$$\int\limits_{2\pi\mathscr{L}^2}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du \ll \mathscr{L}^{-6},$$

найдём

$$J(H) = \frac{4H}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du - \int\limits_{2\pi\mathscr{L}^2}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du\right) + O\left(\frac{H^2\mathscr{L}^4}{N}\right) =$$
$$= \frac{4H}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}^6}\right).$$

Воспользовавшись формулой (см. [44] стр. 174)

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^n mu}{u^n} du = \frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)1}\left[n^{n-1} - \frac{n}{1!}(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1} + \ldots\right].$$

при $m = 1$ и $n = 3$, найдём

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 u}{u^3} du = \frac{3\pi}{8}.$$

Следовательно

$$J(H) = \frac{3H}{2} + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}^6}\right).$$

Подставив это в формулу (2.3.7), найдём

$$I(a,q) = \frac{H}{2\sqrt[4]{(N/3)^3}\ln^2(N/3)} \frac{\mu^2(q)S(a,q)}{q\varphi^2(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right)\cdot\left(\frac{3H}{2} + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}^6}\right)\right) + R_5 =$$
$$= \frac{3H}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}\ln^2(N/3)} \frac{\mu^2(q)S(a,q)}{q\varphi^2(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) + R_6(a,q), \qquad (2.3.8)$$
$$R_6(a,q) \ll \frac{\mu^2(q)|S(a,q)|}{q\varphi^2(q)} \frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}\cdot\frac{H}{\mathscr{L}^6} + R_5.$$

Если q — бесквадратное число, то согласно лемме 2.5 для полной рациональной суммы четвёртого порядка $S(a,q)$ справедлива оценка $S(a,q) \ll \sqrt{q}$. Воспользовавшись этой оценкой и явным выражением R_5, найдём

$$R_6(a,q) \ll \frac{1}{\sqrt{q}\varphi^2(q)} \frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^8} + \frac{Hq^{1/2+\varepsilon}}{\varphi^2(q)} + \frac{H^3}{\varphi^2(q)N^{7/4}} + \frac{H^2\mathscr{L}\exp(-c\ln^4\mathscr{L})}{\varphi(q)N^{3/4}}.$$

Подставляя правую часть равенства (2.3.8) в (2.3.4), получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{3H\ln^{-2}(N/3)}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}} \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} S(a,q) e\left(-\frac{aN}{q}\right) + R(\mathfrak{M}_1), \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned}
R(\mathfrak{M}_1) &\ll \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} R_6(a,q) \ll \frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^8} \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \frac{1}{\sqrt{q}\varphi^2(q)} + \\
&+ H \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \frac{q^{1/2+\varepsilon}}{\varphi^2(q)} + \frac{H^3}{N^{7/4}} \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \frac{1}{\varphi^2(q)} + \\
&+ \frac{H^2\mathscr{L}}{N^{3/4}} \exp(-c\ln^4\mathscr{L}) \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \frac{1}{\varphi(q)} \ll \\
&\ll \frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^8} \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \frac{1}{q^{1/2}\varphi(q)} + H \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \frac{q^{1/2+\varepsilon}}{\varphi(q)} + \\
&+ \frac{H^3}{N^{7/4}} \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \frac{1}{\varphi(q)} + \frac{H^2\mathscr{L}^{41}}{N^{3/4}} \exp(-c\ln^4\mathscr{L}) \ll \\
&\ll \frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^8} + H\mathscr{L}^{21} + \frac{H^3}{N^{7/4}}\mathscr{L}^2 + \frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^8} \ll \frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^8}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{3H}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}\ln^2(N/3)} \sum_{q\le\mathscr{L}^{40}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} S(a,q) e\left(-\frac{aN}{q}\right) + O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^8}\right). \quad (2.3.10)$$

Сумму по q в (2.3.10) заменим близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от $\mathscr{L}^{40}$, то есть

$$\sum_{q\le\mathscr{L}^{40}}\frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}S(a,q)e(-aN/q)=\mathfrak{S}(N)-R(N),\tag{2.3.11}$$

$$\mathfrak{S}(N)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}S(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

$$R(N)=\sum_{q>\mathscr{L}^{40}}\frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}S(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right).$$

Теперь представим особый ряд $\mathfrak{S}(N)$ в виде бесконечного произведения по всем простым числам, для этого напишем его в виде

$$\mathfrak{S}(N)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)}\Phi(q),\quad \Phi(q)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}S(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right).$$

Покажем прежде всего, что сумма $\Phi(q)$ является мультипликативной функцией. Пусть $q=q_1q_2$, $(q_1,q_2)=1$, тогда представляя в последней сумме переменную суммирования a в виде

$$a=a_1q_2+a_2q_1,\quad (a_1,q_1)=1,\quad 1\le a_1\le q_1,\quad (a_2,q_2)=1,\quad 1\le a_2\le q_2,$$

найдём

$$\Phi(q_1q_2)=\sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1}\sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q)=1}}^{q_2}S(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2)e\left(-\frac{(a_1q_2+a_2q_1)N}{q_1q_2}\right).\tag{2.3.12}$$

Применяя к сумме $S(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2)$ лемму 2.4, имеем

$$S(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2)=S(a_1,q_1)S(a_2,q_2).$$

Подставляя это равенство в правую часть (2.3.12), получим

$$\Phi(q_1q_2)=\sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1}S(a_1,q_1)e\left(-\frac{a_1N}{q_1}\right)\sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q)=1}}^{q_2}S(a_2,q_2)e\left(-\frac{a_2N}{q_2}\right)=\Phi(q_1)\Phi(q_2).$$

Пользуясь абсолютной сходимостью $\mathfrak{S}(N)$ и мультипликативностью $\Phi(q)$, найдём

$$\mathfrak{S}(N)=\prod_{p}\left(1+\frac{\Phi(p)}{p(p-1)^2}\right),$$

$$\begin{aligned}\Phi(p)&=\sum_{a=1}^{p-1}S(a,p)e\left(-\frac{aN}{p}\right)=\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{x=1}^{p}e\left(\frac{a(x^4-N)}{p}\right)=\\&=\sum_{x=1}^{p}\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{a(x^4-N)}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p}\left(\sum_{a=1}^{p}e\left(\frac{a(x^4-N)}{p}\right)-1\right)=\\&=\sum_{\substack{x=1\\ x^3\equiv N(modp)}}^{p}p-p=p(\rho(N,p)-1)),\end{aligned}$$

где $\rho(N,p)$ — число решений сравнения $x^4\equiv N(modp)$. Следовательно,

$$\mathfrak{S}(N)=\prod_{p}\left(1+\frac{\rho(N,p)-1}{(p-1)^2}\right).$$

Теперь оценим $R(N)$. Имеем

$$R(N)=\sum_{q>\mathscr{L}^{40}}\frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)}\Phi(q),\quad \Phi(q)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}S(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right).$$

Так как $\Phi(q)$ — мультипликативная функция и q – бесквадратное число, то

$$\Phi(q)=\prod_{p\backslash q}\Phi(p),\qquad \Phi(p)=\sum_{a=1}^{p-1}S(a,p)e\left(-\frac{aN}{p}\right).$$

Отсюда и из оценки $|S(a,p)|\ll p^{1/2}$ (лемма 2.1), последовательно найдём

$$|\Phi(q)|=\prod_{p\backslash q}|\Phi(p)|\le\prod_{p\backslash q}\sqrt{p}(p-1)<\prod_{p\backslash q}p\sqrt{p}=q\sqrt{q}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}|R(N)|&\le\sum_{q>\mathscr{L}^{40}}\frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)}|\Phi(q)|\le\sum_{q>\mathscr{L}^{40}}\frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)}\cdot q\sqrt{q}=\\&=\sum_{q>\mathscr{L}^{40}}\frac{\mu^2(q)}{\sqrt{q}\varphi(q)}\ll\sum_{q>\mathscr{L}^{40}}\frac{\ln\ln q}{q^{3/2}}\ll\int_{\mathscr{L}^{40}}^{\infty}\frac{\ln\ln u}{u^{3/2}}du\ll\mathscr{L}^{-8}.\end{aligned}$$

Таким образом соотношение (2.3.11) принимает вид

$$\sum_{q\le Q}\frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}S(a,q)e\left(-\frac{aN}{q}\right)=\mathfrak{S}(N)+O\left(\mathscr{L}^{-8}\right),$$

$$\mathfrak{S}(N)=\prod_p\left(1+\frac{\rho(N,p)-1}{(p-1)^2}\right),$$

где $\rho(N,p)$ — число решений сравнения $x^4\equiv N(modp)$.

Подставляя правую часть этого равенства в (2.3.10), получим

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{3H\mathfrak{S}(N)}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}\ln^2(N/3)}+O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^8}\right).$$

Отсюда с учетом формулы $\ln^2(N/3)=\mathscr{L}^{-2}+O(\mathscr{L}^{-3})$, найдём

$$I(\mathfrak{M}_1)=\frac{\sqrt[4]{3}\mathfrak{S}(N)\,H}{4\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}+O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^3}\right). \qquad (2.3.13)$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$. Имеем

$$I(\mathfrak{M}_1)=\int\limits_{\mathfrak{m}}S_1^2(\alpha;N,H)T_1(\alpha;N,H)e(-\alpha N)d\alpha.$$

Переходя к оценкам, находим

$$I(\mathfrak{M}_1)\ll\max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|T_1(\alpha,N,H)|\int\limits_0^1|S_1(\alpha;N,H)|^2d\alpha=$$

$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_1}|T_1(\alpha,N,H)|\int\limits_0^1 S_1(\alpha;N,H)\overline{S_1(\alpha;N,H)}d\alpha=$$

$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_1}|T_1(\alpha,N,H)|\sum_{|p-N/3|\le H}1=$$

$$=\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_1}|T_1(\alpha,N,H)|\left(\pi\left(\frac{N}{3}+H\right)-\pi\left(\frac{N}{3}-H\right)\right).$$

Применяя к правой части полученной формулы с учётом соотношения $y\gg x^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}\ge x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$ лемму 2.2, найдём

$$I(\mathfrak{M}_1)\ll\frac{H}{\mathscr{L}}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T_1(\alpha,N,H)|. \qquad (2.3.14)$$

Если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad \frac{\mathscr{L}^2}{H} < |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le \mathscr{L}^{40}.$$

Оценим $T_1(\alpha, N, H)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Согласно соотношению (2.3.2), имеем

$$T_1(\alpha; N, H) = T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1) + O(H^2 N^{-7/4}), \tag{2.3.15}$$

$$N_1 = \sqrt[4]{\frac{N}{3}}, \quad H_1 = \frac{H}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}}.$$

Оценим $T(\alpha, N_1 + H_1, 2H_1)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Рассмотрим два возможных случая:

1. $\dfrac{\mathscr{L}^2}{H} < |\lambda| \le \dfrac{1}{8q(N_1 + H_1)^3}$;
2. $\dfrac{1}{8q(N_1 + H_1)^3} < |\lambda| \le \dfrac{1}{q\tau}$.

Случай 1. Ранее при вычислении интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ мы показали, что

$$\tau = \frac{16H}{\sqrt[4]{N}} > 24(N_1 + H_1)^2 \cdot 2H_1.$$

Следовательно, в этом случае для суммы $T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)$ и $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, выполняется условие следствия 1.1.1 теоремы 1.1. Согласно следствию, имеем

$$T(\alpha, N_1 + H_1, 2H_1) = \frac{2H_1}{q} S(a,q)\gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1) + O(q^{1/2+\varepsilon}). \tag{2.3.16}$$

Применим к оценке интеграла

$$\gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1) = \int\limits_{-0.5}^{0.5} e(\lambda(N_1 + 2H_1 u)^4) du$$

лемму 1.6, полагая $f(u) = \lambda(N_1 + 2H_1 u)^4$. Производная второго порядка $f''(u) = 48\lambda H_1^2 (N_1 + 2H_1 u)^2$ не меняет знак, следовательно, производная первого порядка $f'(u) = 8\lambda H_1(N_1 + 2H_1u)^3$ является монотонной функцией и удовлетворяет неравенству

$$
\begin{aligned}
|f'(u)| \geq 8|\lambda|H_1(N_1 - H_1)^3 = 8|\lambda|H_1(N_1^3 - 3N_1^2H_1 + 3N_1H_1^2 - H_1^3) > \\
&> 8|\lambda|(N_1^3H_1 - 3N_1^2H_1^2 - H_1^4) = \\
&= 6|\lambda|\left(\sqrt[4]{(N/3)^3}\cdot\frac{H}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}} - 3\sqrt[4]{(N/3)^2}\cdot\frac{H^2}{16\sqrt[4]{(N/3)^6}} - \frac{H^4}{4\sqrt[4]{(N/3)^{12}}}\right) = \\
&= 6|\lambda|\left(\frac{H}{4} - \frac{9H^2}{16N} - \frac{27H^4}{4N^3}\right) = \frac{3|\lambda|H}{2}\left(1 - \frac{9H}{4N} - \frac{27H^3}{N^3}\right) > |\lambda|H \geq \mathscr{L}^2.
\end{aligned}
$$

Следовательно, согласно лемме 1.6, при $m = \mathscr{L}^2$ и $M = 1$ находим

$$
|\gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1)| \leq \mathscr{L}^{-2}.
$$

Поэтому, переходя в (2.3.16) к оценкам и воспользовавшись леммой 1.8 об оценке полной рациональной тригонометрической суммы $S(a, q)$, найдём

$$
\begin{aligned}
|T(\alpha, N_1 + H_1, 2H_1)| \ll \frac{H_1|S(a,q)||\gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1)|}{q} + q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll \\
\ll \frac{H}{q^{1/4}\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2} + \mathscr{L}^{20+40\varepsilon} \ll \frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2} + \mathscr{L}^{21} \ll \frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}. \quad (2.3.17)
\end{aligned}
$$

Случай 2. В этом случае, то есть при

$$
\frac{1}{8q(N_1 + H_1)^3} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau},
$$

согласно следствию 1.1.2 теоремы 1.1 при $x = N_1 + H_1$, $y = 2H_1$, имеем

$$\begin{aligned}T(\alpha, N_1 + H_1, 2H_1) &\ll q^{\frac{3}{4}} \ln q + \min_{2\le k\le 4} \left(H_1 q^{-\frac{1}{4}}, (N_1 + H_1)^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{4}}\right) \le \\ &\le q^{\frac{3}{4}} \ln q + (N_1 + H_1)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \ll \\ &\ll \mathscr{L}^{30} \ln \mathscr{L} + \left(\sqrt[4]{\frac{N}{3}} + \frac{H}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{20} \ll \\ &\ll \mathscr{L}^{30} \ln \mathscr{L} + \left(N^{\frac{1}{4}} + N^{\frac{1}{6}} \mathscr{L}^{\frac{40}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{20} \ll N^{\frac{1}{8}} \mathscr{L}^{20} = \\ &= \frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2} \cdot \frac{N^{\frac{7}{8}} \mathscr{L}^{22}}{H} \le \frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}.\end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (2.3.17), с учётом соотношения (2.3.15) для всех $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, получим

$$\begin{aligned}|T_1(\alpha; N, H)| &\ll |T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)| + H^2 N^{-7/4} \ll \\ &\ll \frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2} \left(1 + \frac{H\mathscr{L}^2}{N}\right) \ll \frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}.\end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку для $|T_1(\alpha; N, H)$, $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, в (2.3.14), получим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\mathscr{L}} \cdot \max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2} |T_1(\alpha, N, H)| \ll \frac{H^2}{\sqrt[4]{N^4}\mathscr{L}^3}.$$

Оценка интеграла $I(\mathfrak{m})$. Имеем

$$I(\mathfrak{m}) = \int\limits_{\mathfrak{m}} S_1^2(\alpha; N, H) T_1(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha.$$

Переходя к оценкам, находим

$$\begin{aligned}I(\mathfrak{m}) &\ll \max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|T_1(\alpha,N,H)|\int\limits_0^1|S_1(\alpha;N,H)|^2d\alpha = \\ &= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|T_1(\alpha,N,H)|\int\limits_0^1 S_1(\alpha;N,H)\overline{S_1(\alpha;N,H)}d\alpha = \\ &= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|T_1(\alpha,N,H)|\sum_{|p-N/3|\le H}1 = \\ &= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|T_1(\alpha,N,H)|\left(\pi\left(\frac{N}{3}+H\right)-\pi\left(\frac{N}{3}-H\right)\right).\end{aligned}$$

Применяя к правой части полученной формулы с учётом соотношения $y \gg x^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}} \ge x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$ лемму 2.2, найдём

$$I(\mathfrak{m}) \ll \frac{H}{\mathscr{L}}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T_1(\alpha,N,H)|. \tag{2.3.18}$$

Если $\alpha\in\mathfrak{m}$, то

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad |\lambda|\le\frac{1}{q\tau},\quad \mathscr{L}^{40}\le q\le\tau.$$

Оценим $T_1(\alpha,N,H)$ для α из множества $\mathfrak{m}$. Напомним, что суммы $T_1(\alpha;N,H)$ и $T(\alpha;N_1+H_1,2H_1)$ связаны между собой формулой

$$T_1(\alpha;N,H)=T(\alpha;N_1+H_1,2H_1)+O(H^2N^{-\frac{7}{4}}), \tag{2.3.19}$$
$$N_1=\sqrt[4]{\frac{N}{3}},\qquad H_1=\frac{H}{4\sqrt[4]{(N/3)^3}}.$$

Пользуясь для суммы $T(\alpha;N_1+H_1,2H_1)$ теоремой 1.2 и условием

$$\mathscr{L}^{40}<q\le\tau=16HN^{-\frac{1}{4}},$$

находим

$$T(\alpha;N_1,+H_1,2H_1)\ll H_1\left(q^{-\frac{1}{16}}+H_1^{-\frac{1}{16}}\ln^{\frac{1}{16}}q+H_1^{-\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{16}}\ln^{\frac{1}{16}}q\right)(\ln H_1)^{\frac{7}{16}}\ll$$
$$\ll\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}}\left(\mathscr{L}^{-\frac{5}{2}}+\left(\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}}\right)^{-\frac{1}{16}}\mathscr{L}^{\frac{1}{16}}+\left(\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{H}{\sqrt[4]{N}}\right)^{\frac{1}{16}}\mathscr{L}^{\frac{1}{16}}\right)\mathscr{L}^{\frac{7}{16}}=$$
$$=\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}}\left(\mathscr{L}^{-\frac{33}{16}}+\left(\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}}\right)^{-\frac{1}{16}}\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{N^{\frac{11}{12}}}{H}\right)^{\frac{3}{16}}\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)=$$
$$=\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}}\left(\mathscr{L}^{-\frac{33}{16}}+\left(\frac{N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}}{\sqrt[4]{N^3}}\right)^{-\frac{1}{16}}\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{N^{\frac{11}{12}}}{N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}}\right)^{\frac{3}{16}}\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)=$$
$$=\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}}\left(\mathscr{L}^{-\frac{33}{16}}+N^{-\frac{1}{96}}\mathscr{L}^{-\frac{1}{3}}+\mathscr{L}^{-2}\right)\ll\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}.$$

Отсюда и из (2.3.19), получим

$$|T_1(\alpha;N,H)|\ll|T(\alpha;N_1+H_1,2H_1)|+\frac{H^2}{N^{\frac{7}{4}}}\ll\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}+\frac{H^2}{N^{\frac{7}{4}}}=$$
$$=\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}\left(1+\frac{H}{N}\right)\ll\frac{H}{\sqrt[4]{N^3}\mathscr{L}^2}.$$

Подставляя полученную оценку для $|T_1(\alpha;N,H)$, $\alpha\in\mathfrak{m}$, в (2.3.18), получим

$$I(\mathfrak{m})\ll\frac{H}{\mathscr{L}}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{M}_2}|T_1(\alpha,N,H)|\ll\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^4}\mathscr{L}^3}.$$

Теорема доказана.

Заключение

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в больших дугах;
- найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля четвёртого порядка в малых дугах;
- доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является четвёртой степенью натурального числа.

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер, её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Литература

[1] Виноградов И.М. Избранные труды / И.М. Виноградов //Москва: Издательство АН СССР. 1952.

[2] Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number /C.B.Haselgrove // J.London Math.Soc.,26 (1951). – P. 273 – 277.

[3] Статулявичус В.А. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел / В.А.Статулявичус // Вильнюс, Ученые труды университета. сер. мат., физ. и хим. н.,3 (1955). – С. 5 – 23.

[4] Jia Chaohua Three primes theorem in a short interval (II) / Chaohua Jia // International symposium in memory of Hua Loo Keng, Science Press and Springer-Verlag, Berlin, 1991. – P. 103 – 115.

[5] Jia Chaohua Three primes theorem in a short interval (V) / Chaohua Jia // Acta Math. Sin., New Series, 2(1991). – P. 135 – 170.

[6] Jia Chaohua Three primes theorem in a short interval (VII) / Chaohua Jia // Acta Math. Sin., New Series, 10(1994). – P. 369 – 387.

[7] Jia Chaohua Three primes theorem in a short interval (VII) / Chaohua Jia // Acta Math. Sinica 4(1994). – P. 464 – 473, Chinese.

[8] PAN CHENG-DONG On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) / PAN CHENG-DONG, PAN CHENG-BIAO // Chinese Ann. of Math., 2(1990). – P. 138 – 147.

[9] ZHAN TAO On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes / T.ZHAN // Acta Math Sinica, new ser., 7 (1991), No 3. – P. 135 – 170.

[10] JIA CHAO-HUA Three primes theorem in a short interval (VII) / JIA CHAO-HUA // Acta Mathematica Sinica, New Series 1994. V. 10, № 4. – P. 369 – 387.

[11] J Y LIU. On sums of five almost equal prime squares / J Y LIU, T. ZHAN // Acta Arithmetica, 1996, 77:. – P. 369 – 383

[12] J Y LIU. On sums of five almost equal prime squares (II) / J Y LIU, T. ZHAN // Sci China, 1998, 41:. – P. 710 – 722

[13] J Y LIU. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I / J Y LIU, T. ZHAN // Mh Math, 1999, 127:. – P. 27 – 41

[14] J Y LIU. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals / J Y LIU, T. ZHAN // Acta Mathematica Sinica, English Series Oct., 2000, Vol.16, No. 4. – P. 669 – 690.

[15] HUA L.K. Some results in the additive prime number theory / L.K.HUA // Quart J Math (Oxford). 1938. V. 9, No 1 . – P. 68 — 80.

[16] KUMCHEV A V. On Weyl sums over primes in short intervals / A.V.KUMCHEV // "Arithmetic in Shangrila"—Proceedings of the 6th China-

Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. V. 9. Singapore: World Scientific.. – P. 116–131.

[17] *Yao Y.* Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October 2014. V. 9, Is. 5. – P. 1131 – 1140. DOI:10.1007/s11464-014-0384-4.

[18] Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми / З.Х.Рахмонов // Математические заметки. 2003. – Т. 74. вып. 4. – С. 564 – 572.

[19] Рахмонов З.Х. Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля / З.Х.Рахмонов , Дж.А.Шокамолова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2009. № 2(135). – С. 7 – 18.

[20] Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми / З.Х.Рахмонов // Мат.заметки. 2014. – Т. 95. вып. 3. – С. 445 – 456.

[21] Рахмонов З.Х. Об оценках коротких кубических сумм Г.Вейля / З.Х.Рахмонов, К.И.Мирзоабдугафуров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2008. – Т. 51.№ 1. С. 5 – 15.

[22] Рахмонов З.Х. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени / З.Х.Рахмонов, А.З.Азамов, К.И.Мирзоабдугафуров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2010. – Т. 53. № 10. – С. 737 – 744.

[23] Шокамолова Дж.А. Асимтотическая формула в задаче Эстермана с почти равными слагаемыми/ Дж.А.Шокамолова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010. – Т. 53, № 5. – С. 325-332.

[24] Рахмонов З.Х. Об одной тернарной задаче с почти равными слагаемыми / З.Х.Рахмонов, Д.М.Фозилова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2012. – Т. 55. № 6. – С. 433 – 440.

[25] Рахмонов З.Х. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми / З.Х.Рахмонов, К.И.Мирзоабдугафуров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. – Т. 51. № 2. – С. 83 – 86.

[26] Рахмонов З.Х. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми / З.Х.Рахмонов, А.З.Азамов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. – Т. 54. № 3. – С. 34 – 42.

[27] Рахмонов З.Х. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми / З.Х.Рахмонов, Н.Н.Назрублоев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. – Т. 57. №11 – 12. – С. 823 – 830.

[28] Фаткина С.Ю. Об одном обобщении тернарной проблемы Гольдбаха для почти равных слагаемых / С.Ю.Фаткина // Вестник Московского Университета. серия 1, математика. механика. 2001. №2

[29] Рахмонов П.З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа / П.З.Рахмонов // Математические заметки. 2014. – Т. 95. № 5. – С. 763 – 774.

[30] Рахмонов П.З. Обобщенная тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми / П.З.Рахмонов // Математические заметки. 2016. – Т. 100. № 3. – С. 410 – 420.

[31] Vaughan R.C. Some remarks in Weyl sums / R.C.Vaughan // Coll. Math. Soc. Janos. Bolyani, Budapest 1981.

[32] Рахмонов З.Х. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля / З.Х.Рахмонов, Н.Б.Озодбекова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. – Т. 54. № 4. – С. 257 – 264.

[33] Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля / З.Х. Рахмонов // Ученые записки Орловского университета. Серия естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6. часть 2. – С. 194 – 203.

[34] Карацуба А.А. Теорема о замене тригонометрической суммы более короткой / А.А.Карацуба, М.А.Королёв // Известия РАН, серия математическая. – Т. 71. № 2. – С. 123 – 150.

[35] Архипов Г.И. Теория кратных тригонометрических сумм /Г.И.Архипов, А.А.Карацуба, В.Н.Чубариков. — М.: Наука, 1987, 368 с.

[36] Хуа Ло-Ген Метод тригонометрических сумм и её применения в теории чисел / Хуа Ло-Ген // — М.: Мир, 1964, 190 с.

[37] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square/ T.Estermann // Proc. London math.Soc., 11(1937). – P. 501 – 516.

[38] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел./ А.А.Карацуба // 2-ое изд, М.: Наука, 1983.

[39] Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / И.М.Виноградов // — М.: Наука. 1980. 144 с.

[40] Vaughan R.C. On Waring's problem for cubes / R.C.Vaughan // J. Reine Angew. Math., 1986, 365, – P. 122 – 170.

[41] Weil A. On some exponential sums / A.Weil // Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1948, 34, №5. -— P. 204 -— 207.

[42] Huxley M.N. On the differences between consecutive primes / M.N.Huxley // Invent. math. 15. (1972). – P. 164 – 170.

[43] Рахмонов З.Х. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числамиn / З.Х.Рахмонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2000. – Т. 43. № 3. – С. 27 – 40.

[44] Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа, ч. 1. Основные операции анализа / Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон // Изд. 2–е. Перев. с англ., Физматгиз, М., 1963.

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

[45] Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми / А.О.Рахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. – Т. 58. №9. – С. 769 – 771.

[46] Рахимов А.О. Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Ввейля четвёртого порядка в малых дугах / А.О.Рахимов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. – Т. 58. №8. – С. 674 – 677.

[47] Рахимов А.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения / А.О.Рахимов, Н.Н.Назрублоев, З.Х.Рахмонов // Чебышевский сборник. 2015. – Т. 16. В. 1(53). – С. 232 – 247.

[48] Рахимов А.О. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в множестве точек первого класса / А.О.Рахимов, Н.Н.Назрублоев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. – Т. 57. № 8. – С. 621 – 628.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

[49] Рахимов А.О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми / А.О.Рахимов, Ф.З.Рахмонов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. ISSN: 1810-4134. 2016. №8. – С. 87 – 89.

[50] Рахимов А.О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми / А.О.Рахимов, Ф.З.Рахмонов // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и её приложений", посвящённой 25-летию Государственной независимости Республики Таджикистан. г. Душанбе, 3-4 июня 2016 г. – С. 107 – 109.

[51] Рахимов А.О. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в множестве точек первого класса / А.О.Рахимов, Н.Н.Назрублоев // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л.Н. Толстого. 2015. – С. 245 – 246.

[52] Рахимов А.О. О коротких тригонометрических суммах Г.Вейля / А.О.Рахимов // Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" посвященной 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. – С. 28 – 29.