Отзыв официального оппонента
на диссертацию Рахимова Алишера Орзухуджаевича
«Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

1. Актуальность избранной темы. И.М. Виноградов в 1937 году создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют решето Виноградова и метод сглаживания двойных сумм. Пользуясь этим методом, он впервые получил нетривиальную оценку линейной тригонометрической суммы с простыми числами и доказал асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде $N = p_1 + p_2 + p_3$, следствием которого является тернарная проблема Гольдбаха о представлении нечётного натурального числа как суммы трёх простых чисел. Воспользовавшись этим методом, Эстерман в 1937 г. доказал при $k = 2$ асимптотическую формулу для числа числа решений диофантова уравнения

$$N = p_1 + p_2 + m^k, \qquad (1)$$

в простых числах p_1, p_2 и натурального m, а в 1938 г. Хуа Ло Ген доказал асимптотическую формулу для числа представлений достаточно большого натурального числа N, $N \equiv 5(mod 24)$ в виде суммы пяти квадратов простых чисел. Основным моментом при исследовании задач (1) – (3) с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны является оценка коротких тригонометрических сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k), \quad T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^k),$$
$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le \tau.$$

Сумму $S_k(\alpha; x, y)$ впервые исследовал И.М. Виноградов. Он получил нетривиальную оценку $S_1(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2)$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Тернарную проблему Гольдбаха с почти равными слагаемыми решил С.Б. Хаселгров, результат которого затем улучшили В. Статулявычус, Jia Chao-hua, Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо, Zhan Tao. Теорему Хуа Ло Гена о представимости достаточно большого натурального числа в виде (3) с почти равными слагаемыми доказали Jianya Liu и Tao Zhan. Асимптотическую формулу в обобщении теоремы Эстермана для почти равных слагаемых в случае $n = 2, 3$ доказали З.Х. Рахмонов и его ученики.

В диссертационной работе А.О. Рахимова изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля и найдена асимптотическая формула в обобщении теоремы Эстермана для почти равных слагаемых в случае $n = 4$. Тем самым, исследования диссертационной работы являются актуальными.

2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации. Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел.

3. Достоверность и новизна полученных результатов. Утверждения диссертации являются обоснованными, снабжены корректными доказательствами, что свидетельствует об их достоверности. Новыми результатами полученными в диссертационной работе являются:

- в больших дугах изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$;
- найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля четвёртого порядка в малых дугах;
- доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является четвёртой степенью натурального числа.

4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации и методика их получения могут быть применены при решении задач теории чисел, в том числе, аддитивных проблем. Полученные результаты могут быть использованы в научных учреждениях и в вузах, где ведутся исследования по аналитической теории чисел, например, в МИРАН, в МГУ им. М.В. Ломоносова, в Институте математики им. А. Джураева АН РТ, в Таджикском национальном университете.

5. Оценка содержания диссертации, её завершенность. Диссертация А.О. Рахимова состоит из введения, двух глав и перечня литературы. Во введении приведена краткая история по изученным задачам и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена коротким тригонометрическим суммам Г. Вейля $T(\alpha; x, y)$, суть которых заключается в следующем:

- доказана теорема 1.1 о поведении суммы $T(\alpha; x, y)$ в больших дугах;
- показано, что правая часть полученного равенства в теореме 1.1 в случае α *"близких"* к рациональному числу a/q будет асимптотической формулой с главным членом (следствие 1.1.1) и оценкой в противном случае (следствие 1.1.2);

Теорема 1.1 является обобщением теоремы Р. Вона о поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в больших дугах. В первой главе также найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля $T(\alpha; x, y)$ четвёртой степени в малых дугах.

Как уже было отмечено в пункте 1, Т. Эстерман доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения (1) в случае $k = 2$. Эта задача З.Х. Рахмоновым была исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (1) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H; \quad i = 1, 2, \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \le H; \quad H \ge N^{\frac{3}{4}} \ln^3 N.$$

Далее в 2014 г. асимптотическая формула для числа решений уравнения (1) при условии, что слагаемые почти равны, была выведена для более редкой последовательности, когда $k = 2$ и $H \ge N^{\frac{5}{6}} \mathscr{L}^{10}$.

Во второй главе, прилагая результаты первой главы, доказана теорема 2.1 об асимптотической формуле для ещё более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, именно когда $k=4$, то есть для $I(N,H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\quad i=1,2,\quad \left|m^4-\frac{N}{3}\right|\le H,$$

при $H \ge N^{\frac{11}{12}}\mathscr{L}^{\frac{40}{3}}$ найдена асимптотической формула. Из теоремы 2.1 следует, что всякое достаточно большое натуральное число представляется суммою трёх почти равных слагаемых два из которых простые числа, а третье — четвёртая степень натурального числа.

6. Достоинство и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования. Достоинствами диссертации являются выше перечисленные новые результаты, отмеченные в пункте 3 и полученные применением современных методов аналитической теории чисел. В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо. Имеющиеся в диссертации отдельные опечатки редакционного и стилистического характера не вносят особых трудностей при её чтении и укажем некоторые из них:

1. На стр. 51 после пункта «Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$» всюду 7 раз вместо $\mathfrak{M}_2$ написана $\mathfrak{M}_1$ или $\mathfrak{m}$.

2. На стр. 55, в 9 строке снизу в формуле (2.3.18) максимум берется по множеству $\mathfrak{M}_2$, а должно быть по множеству $\mathfrak{m}$.

7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федераци, полно и правильно отражает положения диссертационной работы.

8. Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ГОСТ в полной мере.

9. Заключение о соответствие диссертации критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14. Диссертация Рахимова А.О. соответствует критериям, установленным «Положением о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14.

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и посвящена аддитивным задачам аналитической теории чисел. В ней сделано дальнейшее продвижение в решении известных задач теории чисел. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении некоторых задач аналитической теории чисел.

(П.11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, четыре из которых входят в перечень ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации.

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Диссертационная работа Рахимова Алишера Орзухуджаевича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для коротких тригонометрических сумм, и полностью соответствует требованиям П.9 Положения о присуждении учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент: Пачев Урусби Мухамедович
доктор физико–математических наук по
специальности 01.01.06 — Математическая логика,
алгебра и теории чисел, профессор кафедры геометрии
и высшей алгебры ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский
государственный университет имени Х.М. Бербекова»

Контактная информация:
ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный
университет имени Х.М. Бербекова»
360004, г. Нальчик, ул.Чернышевского, 173.
Телефон: 8(8662)42-25-60,
e-mail: bsk@kbsu.ru

"ЗАВЕРЯЮ"
Ученый секретарь КБГУ
"22" 05 2017 г