

Отзыв официального оппонента
на диссертацию Рахимова Алишера Орзухуджаевича
«Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени
с почти равными слагаемыми», представленную на соискание учёной
степени кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

1. Актуальность избранной темы. В диссертационной работе исследуются проблемы аналитической теории чисел, относящиеся к области теории коротких тригонометрических сумм и их приложения к классическим аддитивным задачам с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны. В круг таких задач входят решения следующих диофантовых уравнений

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N, \quad p_1 + p_2 + m^k = N,$$

которые после создания метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова в конце тридцатых годов прошлого века решили, соответственно И.М. Виноградов, Хуа Ло Ген и Т. Эстерман при $k = 2$. Решение этих задач при условии, что слагаемые почти равны, тесно связано с проблемой поведения соответствующих коротких тригонометрических сумм в больших дугах и их оценка в малых дугах. Тернарную проблему Гольдбаха с почти равными слагаемыми решил С.Б. Хаселгров, результат которого затем улучшили В. Статулявичус, Jia Chaohua, Пан Чен-дон и Пан Чен-бяо, Zhan Tao. Наилучший результат в этой задаче принадлежит Jia Chao-hua. Асимптотическую формулу в обобщении теоремы Хуа Ло Гена о представимости достаточно большого натурального числа N , $N \equiv 5 \pmod{24}$ в виде суммы пяти квадратов простых чисел в случае, когда эти слагаемые почти равны доказали Jianya Liu и Tao Zhan. Асимптотическая формула в обобщении теоремы Эстермана с почти равными слагаемыми в случае $k = 2, 3$ была получена З.Х. Рахмоновым и его учениками.

В диссертационной работе А.О. Рахимова асимптотическая формула в последней задаче получена в случае $k = 4$.

2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации. Все утверждения теорем и научные положения, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и оценки, полностью обоснованы.

3. Достоверность и новизна полученных результатов. Полученные в диссертации результаты являются новыми и дополняют исследования авторов, указанных в первом пункте. Они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- в больших дугах изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau};$$

- найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля четвёртого порядка в малых дугах;
- доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является четвёртой степенью натурального числа.

4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся аналитической теорией чисел, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. А. Джураева АН РТ, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В. Ломоносова, в Таджикском национальном университете и в других учебных заведениях.

5. Оценка содержания диссертации, её завершенность. Диссертация А.О. Рахимова состоит из введения, списка обозначений, двух глав, перечня литературы. Во введении приведена краткая история по изученным задачам и изложено краткое содержание диссертации.

В первой главе исследуются короткие тригонометрические суммы Г. Вейля $T(\alpha; x, y)$. В случае, когда дробная $\{n\lambda x^{n-1}\}$ не превосходит величину $\frac{1}{2q}$, для $T(\alpha, x, y)$ автором получена формула

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

В подавляющем большинстве случаев первое слагаемое этой формулы является доминирующим.

В случае же, когда величина $\{n\lambda x^{n-1}\}$ «отделена» от нуля, для модуля $T(\alpha, x, y)$ автор получает нетривиальную оценку со степенным понижением вида

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leq k \leq n} (yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

Наличие минимума по параметру k делает её особенно удобной для использования.

В первой главе автор также исследует поведение суммы $T(\alpha, x, y)$ четвёртой степени на точках принадлежащих малым дугам. Для таких значений α для модуля суммы получается нетривиальная оценка со степенным понижением (теорема 1.2).

Во второй главе полученные результаты используются автором для вывода асимптотической формулы для $I(N, H)$ — число решений диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + m^4 = N,$$

в простых числах p_1, p_2 и натурального m с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^4 - \frac{N}{3} \right| \leq H,$$

при $H \geq N^{\frac{11}{12}} \mathcal{L}^{\frac{40}{3}}$. Следствием этой формулы является тот факт, что всякое достаточно большое целое число N представляется суммой трёх почти равных слагаемых, два из которых простые числа, а третье — четвёртая степень натурального числа.

6. Достоинство и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования. К достоинству диссертации можно отнести полученные в ней основные результаты, отмеченные в пункте 3. В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо. В тексте диссертации имеется ряд незначительных неточностей и опечаток, не влияющих на научную значимость полученных результатов. Укажем некоторые из них.

1. На стр. 51 в определении интеграла $I(\mathcal{M}_2)$ имеются две описки: вместо $I(\mathcal{M}_1)$ и m в пределе интеграла должны фигурировать соответственно $I(\mathcal{M}_2)$ и \mathcal{M}_2 .
2. На стр. 51 в строках 1, 4, 5, 6, 7 снизу вместо \mathcal{M}_1 должно быть \mathcal{M}_2 .
3. На стр. 55, в формуле (2.3.18) имеется описка, максимум берется по $\alpha \in \mathcal{M}_2$, а должно фигурировать $\alpha \in m$.

7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации, полно и правильно отражает положения диссертационной работы.

8. Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ГОСТ в полной мере.

9. Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14. Диссертация Рахимова А.О. соответствует критериям, установленным «Положением о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14.

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты в тригонометрических суммах. Полученные автором

результаты могут быть использованы при решении некоторых задач аналитической теории чисел.

(П.11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, четыре из которых входят в перечень ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации.

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Диссертационная работа Рахимова Алишера Орзухужаевича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для коротких тригонометрических сумм, и полностью соответствует требованиям П.9 Положения о присуждении учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент: Авдеев Иван Фёдорович
кандидат физико-математических наук по
специальности 01.01.06 — Математическая логика,
алгебра и теории чисел, доцент кафедры математического
и информационного анализа экономических процессов
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

Адрес: 302026, г. Орел, ул. Комсомольская д. 95.
тел.: +79208061777, e-mail: ivan_avd@mail.ru

Подпись Авдеева И. Ф. заверяю.
Ученый секретарь ученого совета
ФГБОУ ВО «Орловский государственный
университет имени И.С. Тургенева»
И.Н.Чадаева

Подпись Авдеева И.Ф. заверяю

