

«Утверждаю»
Ректор Таджикского
национального университета
академик АИ РЭ профессор
Имомзода М.С.
23 мая 2017 г.



Отзыв ведущей организации
на диссертацию Рахимова Алишера Орзухуджаевича
«Асимптотическая формула в проблеме Эстермана
четвёртой степени с почти равными слагаемыми»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

1. **Актуальность избранной темы.** Основным предметом исследования диссертационной работы является изучение коротких тригонометрических сумм Вейля и их приложений к проблеме Эстермана о представлении достаточно большого натурального числа N в виде

$$p_1 + p_2 + m^k = N, \quad (1)$$

в простых числах p_1, p_2 и натурального m при условии, что слагаемые почти равны, то есть когда

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq N^{1-\theta} \ln^\eta N, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^k - \frac{N}{3} \right| \leq N^{1-\theta} \ln^\eta N, \quad (2)$$

в случае $k = 4$. В круг таких задач также входят решения диофантовых уравнений

$$p_1^s + p_2^s + \dots + p_l^s = N, \quad \left| p_i - \sqrt[s]{\frac{N}{l}} \right| \leq N^{\frac{1}{s}-\theta+\varepsilon}, \quad (3)$$

с возможной наибольшей θ . Задача (3) при $s = 1$ и $l = 3$ называется тернарной проблемой Гольдбаха с почти равными слагаемыми, которую при $\theta = \frac{1}{64}$ решил С.Б. Хаселгров, результат которого затем улучшили В. Статулявичус, Jia Chaohua, Пан Чен-дон и Пан Чен-бяо, Zhan Tao. Наилучший результат в этой задаче с $\theta = \frac{5}{12}$ принадлежит Jia Chao-hua. Задачу (3) при $s = 2$

и $l = 5$, то есть асимптотическую формулу в обобщении теоремы Хуа Ло Гена о представимости числа N , $N \equiv 5 \pmod{24}$ с $\theta = \frac{1}{46}$ в 1999 г. доказали Jianya Liu и Tao Zhan. Я. Яо в 2014 г. доказал задачу (3) при $s = 3$ и $l = 9$ с показателем $\theta = \frac{1}{51}$.

Асимптотическая формула в обобщении теоремы Эстермана с почти равными слагаемыми, то есть задача (1) – (2) в случае $k = 2, 3$ с показателями $\theta = \frac{1}{2k}$ и $\mu = k$ была доказана З.Х. Рахмоновым и его учениками.

Рассматриваемая в работе А.О. Рахимова последовательность является $p_1 + p_2 + m^k$, $k = 4$ является более редкой по сравнению с упомянутыми выше.

2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации. Все утверждения теорем и научные положения, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы и оценки, полностью обоснованы применением современных методов аналитической теории чисел, а именно:

- метод оценки специальных тригонометрических сумм и интегралов Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона, оценки тригонометрических интегралов по величине модуля производных, оценки полных рациональных сумм Хуа Ло-гена;
- метод оценок тригонометрических сумм Г. Вейля;
- круговой метод Харди, Литлвуда и Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

3. Достоверность и новизна полученных результатов. Полученные в диссертации результаты являются новыми и дополняют исследования авторов, указанных в первом пункте. Они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- изучено поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в больших дугах;
- найдена нетривиальная оценка коротких тригонометрических сумм Вейля четвёртого порядка в малых дугах;
- доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа в виде суммы трёх почти равных слагаемых, два из которых — простые числа, а третье является четвёртой степенью натурального числа.

4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел и в учебном процессе при чтении спецкурсов в по теории чисел в высших учебных заведениях.

5. Оценка содержания диссертации, её завершенность. Диссертация состоит из введения, списка обозначений, двух глав, перечня литературы. Во введении приведена краткая история по изученным задачам и изложено краткое содержание диссертации.

Во втором параграфе первой главе доказана теорема 1.1 о поведении коротких тригонометрических сумм Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau},$$

в больших дугах при $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, при $\lambda \geq 0$, сущность которой заключается:

- если величина $n\lambda x^{n-1}$ близка к целому числу, то есть $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$, то найдена асимптотическая формула вида

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{1/2+\varepsilon});$$

- в противном случае найдена прямая зависимость оценки $T(\alpha, x, y)$ от величины λ :

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leq k \leq n} (yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

В двух следствиях теоремы 1.1 найдено условие, а именно неравенство

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

при выполнении которого правая часть полученной формулы в теореме 1.1 будет асимптотической формулой с главным членом и оценкой в противном случае. Эти следствия является обобщением теоремы Р. Вона о поведении тригонометрических сумм Г. Вейля в больших дугах для соответствующих коротких сумм.

В третьем параграфе первой главы, воспользовавшись классическим методом Г. Вейля, получена нетривиальная оценка со степенным понижением суммы $T(\alpha, x, y)$ четвёртой степени на точках, принадлежащих малым дугам.

Во второй главе в теореме 2.1 доказана асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми, то есть для $I(N, H)$ — число решений диофантова уравнения задачи (1) – (2) в случае $k = 4$ с показателями

$$\theta = \frac{1}{12}, \quad \mu = \frac{40}{3}.$$

Доказательство теоремы 2.1 проводится круговым методом Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М. Виноградова и его основу составляют следствия 1.1.1 и 1.1.2, теорема 1.1, теорема 1.2.

Следствием этой формулы является тот факт, что всякое достаточно большое целое число N представляется суммой трёх почти равных слагаемых, два из которых простые числа, а третье — четвёртая степень натурального числа.

6. Достоинство и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования. К достоинству диссертации можно отнести полученные в ней основные результаты, отмеченные в пункте 3. Диссертация оформлена аккуратно, за исключением отдельных опечаток редакционного характера: например:

— стр. 51 в строках 1, 4, 5, 6, 7 снизу вместо \mathfrak{M}_1 должно быть \mathfrak{M}_2 .

— стр. 55, в формуле (2.3.18) вместо буквы m написана \mathfrak{M}_2 .

— стр. 56, в последней формуле вместо буквы m написана \mathfrak{M}_2 .

7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации, полно и правильно отражает положения диссертационной работы.

8. Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ГОСТ в полной мере.

9. Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14. Диссертация Рахимова А.О. соответствует критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней» по пунктам 10, 11 и 14.

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты в тригонометрических суммах. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении некоторых задач аналитической теории чисел.

(П.11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, четыре из которых входят в перечень ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации.

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Диссертационная работа Рахимова Али-

шера Орзухуджаевича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение в аналитической теории чисел, и полностью соответствует требованиям П.9 Положения о присуждении учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв составили кандидаты физико-математических наук, доценты А.З. Азамов, Р. Бобоева, А.Ш. Собиров. Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры алгебры и теории чисел, механико-математического факультета Таджикского национального университета, протокол №9, пункт 3 от 20 мая 2017 года.

Заведующий кафедрой
алгебры и теории чисел,
кандидат физ.-мат. наук

Азамов А.З.

Контактная информация ведущей организации
Таджикский национальный университет.

Адрес: 734025, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17
сайт: <http://www.tnu.tj/index.php/ru>, телефон: (992-372) 21-77-11
E-mail: tgnu@mail.tj

Подпись кандидата физ.-мат. наук
Азамова Аслиддина Замоновича заверяю
Начальник управления кадров
и специальной части ТНУ



Тавкиев Э.Ш.