На правах рукописи

Саидназаров Рахмонали Сангилоевич

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

Диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе – 2016

Работа выполнена в Курган-Тюбинском государственном университете имени Носира Хусрава Республики Таджикистан

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа Курган-Тюбинского государственного университета им. Н. Хусрава **Сафаров Джумабой**
Официальные оппоненты:	**Гадоев Махмадрахим Гафурович –** доктор физико-математических наук, Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова» в г.Мирном, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики; **Шарипов Бобоали –** кандидат физико-математических наук, Институт предпринимательства и сервиса Республики Таджикистан, доцент кафедры математики в экономике
Ведущая организация:	Таджикский национальный университет

Защита состоится *«20» января 2017 г. в 14:00 часов* на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики имени А. Джураева АН Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj.

Автореферат разослан «____»_____________2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Хайруллоев Ш.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы: Исследования, имеющие целью изучение теории систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными, прежде всего, связаны с узловыми вопросами анализа, геометрии, механики и т.д.. В этом направлении основополагающими являются исследования М.А. Лаврентьева, Г.И. Петровского, И.Н. Векуа, Л. Берса, А.В. Бицадзе, Ф.Д. Гахова, Б.В. Боярского, В С. Виноградова, А.Д. Джураева, Л.Г. Михайлова и их последователей.

Диссертационная работа посвящена исследованию задачи существования и нахождения двоякопериодических решений с основными периодами $h_1, h_2,\ Im(h_2/h_1) \neq 0$ эллиптической системы высокого порядка вида

$$\partial_{\bar{z}}^{n} w + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} w + a_2 \partial_{\bar{z}}^{n-2} w + \cdots + a_n w = f(z), \qquad (1)$$

где $z = x + iy, w = u + i\vartheta,\ \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\,\partial_y\right) -$ дифференциальный оператор Коши–Римана, $\partial_{\bar{z}}^{n} = \partial_{\bar{z}}(\partial_{\bar{z}}^{n-1})$, а $a_1(z), a_2(z), \ldots, a_n(z), f(z) -$ двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2.

Решение однородного уравнения (1)

$$Lw \equiv\ \partial_{\bar{z}}^{n} w + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} w + \cdots + a_n w = 0\,, \qquad (2)$$

в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ называется метааналитической функцией в этой области. Класс метааналитических функций включает в себя класс, аналитических, бианалитических и полианалитических функций.

Уравнения с оператором Коши-Римана в начале XX века были изучены Г.В. Колосовым и Н.И. Мусхелишвили для решений плоской задачи теории упругости. Ими было обнаружено, что эффективным средством для решения таких задач могут служить бианалитические функции, (то есть решения уравнения $\partial_{\bar{z}}^{2} w = 0$). В то же время бигармонические функции – суть вещественные или мнимые части бианалитической функции.

Случай однородной системы (2) с постоянными коэффициентами рассмотрен в работах М.Б. Балка[1,2], М.Ф. Зуева[3]. Общее представление регулярных решений этого уравнения при определенных ограничениях на

[1] Балк М.Б. О полианалитических функциях / М.Б. Балк, М.Ф.Зуев. // Успехи математических наук.– 1970. –т. XXV, вып. 5 (155). – С. 203 – 226.

[2] Балк М.Б. О метааналитических функциях / М.Б. Балк, М.Ф.Зуев. Учен. зап. СГПИ вып. 25 (1970).

[3] Зуев М.Ф. К теоремам единственности для метааналитических функций / М.Ф. Зуев //Смоленский матем. сб. – 1969.–вып. 2.–С. 54 – 59.

коэффициенты дано в работах В.И. Жегалева[4], К.М. Расулова[5] и исследованы некоторые задачи типа линейного сопряжения. В работе Н. Раджабова[6], А. Расулова разработан метод нахождения многообразия решений системы (1) через аналитические функции, удобные для решения граничных задач.

Полианалитические функции, так называемые решения уравнения

$$\partial_{\bar{z}}^{n} w = 0,$$

были предметом специального изучения многих авторов, в числе которых П. Бургатти[7], Н. Теодереску[8], Ф.С. Фёдоров[9], М.Б. Балка, М.Ф. Зуев, М.К. Расулов, В.И. Показеев[10] и другие. В этих исследованиях изучены вопросы теории полианалитических функций, примыкающие к классической теории аналитических функций, а также краевые задачи для таких функций.

Исследования задачи существования и нахождения периодических, в том числе, и двоякопериодических, решений для эллиптических систем уравнений с частными производными на плоскости представляются важными и актуальными.

Этим вопросом занимались Ф. Эрве[11], В.Л. Натанзон[12], В.И. Показеев[13], Э.М. Мухаммадиев[14], С. Байзаев[15], В.В. Показеев[16], Д.С. Сафаров[17] и другие.

---

[4] Жегалов В.И. Об одном обобщении полианалитических функций / В.И. Жегалов. // Тр. семинара по краевым задачам.– Казань: Изд-во КГУ, 1975.– вып. 12.– С. 50-57.

[5] Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических и некоторые их обобщений / К.М. Расулов //Дис. докт. физ. – мат. наук: 01.01.01. – Минск, 1995, 241 с.

[6] Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений высшего порядка / Н.Р. Раджабов, А. Расулов // ДАН СССР.– 1985.–т.282, N4.– С. 795-799.

[7] Burgatti P. Sulla funzioni analitiche d'ordinip / P. Burgatti. Bolletino della Unione Matem. Italiana, Anno 1, 1(1922).

[8] Teodorescu N. La derivee areolaire et ses applications la physique mathematique. Paris, 1931.

[9] Фёдоров Ф.С. О полиномах комплексного переменного /Ф.С. Федоров //ДАН 20(1938), 643-644.

[10] Показеев В.И. Нерегулярные полианалитические функции /В.И. Показеев //Изв. вузов, Математика, 1975, № 6, С. 103 – 113.

[11] Erwe F. Ubergewisse Klasson doppelt periodischer Funktionen / F. Erwe //Acta Math. 97 (1957), 145 – 187.

[12] Натанзон В.Я. О напряжениях в растягиваемой пластине, ослабленной отверстиями, расположенными в шахматном порядке /В.Я. Натанзон //Матем. сборник, 1935.– 42, вып. 5. – С. 617-636.

[13] Показеев В.И. Простые обобщённые аналитические функции, автоморфные относительно элементарных групп. 1. Двоякопериодические решения /В.И. Показеев, Д.С. Сафаров // Изв. АН РТ, отд. физ. мат и хим. н.– 1992.– т 4(4).– С.15-21.

[14] Мухамадиев Э.М. Об обратимости дифференциальных операторов в частных производных эллиптического типа / Э.М. Мухамадиев // Докл. АН СССР– 1972. –т.205– С.1292-1295.

[15] Байзаев С. Исследования по теории ограниченных решений эллиптических уравнений на плоскости / С. Байзаев. Новосибирск: 1999, дис. д.ф.м.н., 01.01.02., 297 с.

[16] Показеев В.В. Полианалитические двоякопериодические функции /В.В. Показеев. // Тр. сем. по краев. задачам. Из-во Казанского ун-та. –1982.–вып. 18–с.155 – 167.

[17] Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения /Д.С. Сафаров // дис.д.ф.-м.-н., 01.01.02. - Душанбе, 2010, 297 с.

В работах этих авторов исследованы двоякопериодические обобщённые аналитические функции, двоякопериодические бианалитические и полианалитические функции и построены аналоги эллиптических функций Вейерштрасса $\zeta(z), \sigma(z)$ и $\wp(z)$ и даны некоторые их приложения.

Решение уравнения (1) понимается как в обобщённом смысле, так и в регулярном смысле И.Н.Векуа[18].

Под обобщённым решением уравнения (1) понимается двоякопериодическая функция $w(z)$, допускающая полюсы, как у однозначных аналитических функций, в любом параллелограмме периодов Ω решетки $\Gamma = \{z_0 + m_1h_1 + m_2h_2, +m_1, m_2 -$ целые числа, $z_0 -$ произвольная точка плоскости $\mathbb{C}\}$, удовлетворяющая уравнению (1) в области $\Omega_1 \subset \Omega$, где Ω_1 −не содержит полюсов решения. Класс таких решений уравнения (1) обозначим через $\tilde{C}_*^n$. Когда $\Omega_1 = \emptyset$, класс таких решений уравнения (1) называется регулярным и обозначается через C_*^n.

Класс двоякопериодических функций, непрерывных по Гёльдеру в параллелограмме Ω с показателем α, обозначим через H_*^α, $0 < \alpha \leq 1$.

Цель работы. В случае постоянных коэффициентов дать описание многообразия решений однородного уравнения и вычислить размерность ядра. Для неоднородного уравнения найти условия разрешимости и описать ядро и коядро задачи и выявить характер разрешимости (фредгольмовости или нётеровости), в зависимости от свойств корней характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 . \tag{3}$$

Методика исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа, методы теории функций комплексного переменного, теории обобщённых аналитических функций и аппарат теории эллиптических функций Вейерштрасса.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Найдено многообразие решений однородного уравнения (2) в случае постоянных коэффициентов через эллиптические функции второго рода, когда корни уравнения (3) простые.
2. Найдены условия, когда однородное уравнение (2) имеет ненулевое решение, и когда оно имеет только нулевое решение в классе C_*^n
3. Дано описание многообразия решений уравнения (2) в классе $\tilde{C}_*^n$, с заданными полюсами, а также с заданными нулями и полюсами в случае простых корней характеристического уравнения (3).

[18] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. М.: Физматгиз, 1959г.– 628 с.

4. Построены картины разрешимости, а также найдены условия, при которых задача является фредгольмовой и нётеровой.
5. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения (1) в классе C_*^n, и установлено, что в этом классе задача является фредгольмовой.
6. Показано, что поставленная задача для уравнения (1) в классе $\tilde{C}_*^n$ в зависимости от расположения корней уравнения (3) может быть фредгольмовой или нётеровой.
7. В случае, когда $n = 2$ и коэффициенты уравнения (1) переменные, найдено многообразие решений однородного уравнения в классах C_*^2 и $\tilde{C}_*^2$. Также даны описания ядра и коядра задачи.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа является теоретической. В ней даны алгоритмы нахождения двоякопериодических решений уравнения (1) с помощью аппарата теории эллиптических функций, с постоянными и переменными (случай $n = 2$) коэффициентами. Даны описания ядра и коядра задачи.

Полученные результаты могут найти применения при изучении свойств метааналитических функций, а также при решении плоской задачи теории упругости и при разработке спецкурсов для студентов и магистров, специализирующихся по профилю физики, математики, механики, прикладной математики университетов.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция, посвященная 20-й годовщине независимости Республики Таджикистан, «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения», Душанбе, 23-24 июня 2011 г., с.113-117.
2. Международная научно-методическая конференция «Современные проблемы математики и ее преподавания», Курган-Тюбе, 10-11 мая 2013 г., с. 81-84.
3. Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы точных наук и их преподавания» Курган-Тюбе, 2014 г., с. 78-82.
4. Международная научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», Душанбе, 29-30 октября 2015 г., с.148-150.
5. Семинары кафедры математического анализа Курган-Тюбинского госуниверситета им. Н. Хусрава (2010 – 2015 гг.).
6. Ежегодные научно-практические конференции студентов и профессорско-преподавательского состава государственного университета им. Носира Хусрава города Курган-Тюбе (2010-2015 гг.).

Личный вклад соискателя и публикации. В совместных работах [2], [5] постановка задач и выбор метода доказательств принадлежат научному руководителю Д.С. Сафарову, все выкладки и обоснование принадлежат автору.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разделённых на параграфы и списка литературы, содержащего 75 наименований. Общий объём диссертации 124 страницы.

Краткое содержание диссертации

Во введении даётся краткий исторический обзор результатов по затрагиваемым проблемам, обосновывается актуальность выбранной темы, определяются цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Приводятся основные результаты диссертации.

В первой главе, первом параграфе приведены основные свойства эллиптических функций и формулы их представления посредством функций Вейерштрасса $\zeta(z) -$ дзета, $\sigma(z) -$сигма, $\wp(z)$ – пе.

Во втором параграфе приводятся свойства и формулы представления эллиптических функций второго рода, то есть класса мероморфных функций, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(z+h_1) = \alpha\,\varphi(z),\ \varphi(z+h_2) = \beta\varphi(z),$$

где $\alpha, \beta -$ постоянные множители, $Im(h_2/h_1) \neq 0$. Условия существования таких функций зависят от числа $D = \frac{1}{2\pi i}\ [h_2\,ln\alpha - h_1\,ln\beta\,]$. При $D \in \Gamma = \{m_1h_1 + m_2h_2,\ m_1,\ m_2\ -\text{целые}\,\}$, свойства таких функций аналогичны свойствам эллиптических функций, причём $r \geq 2,\ r -$число полюсов с учётом их кратности. Если же $D \overline{\in} \Gamma$, то в отличие от эллиптических функций всегда можно построить эллиптические функции с заданными полюсами. Также в этом параграфе приведены условия существования и формулы представления квазиэллиптических функций, то есть мероморфных функций, удовлетворяющих условиям:

$$\psi(z+h_1) = \psi(z) + A, \qquad \psi(z+h_2) = \psi(z) + B\,,$$

где A, B – постоянные.

В третьем параграфе приведена формула двоякопериодических решений неоднородного уравнения Коши – Римана и даны её применения к нахождению двоякопериодических решений неоднородного уравнения Бицадзе

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f(z), \tag{1.3.1}$$

в классе регулярных решений, то есть в C_*^2 (без полюсов).

Теорема 1.3.2. *Пусть* $f(z) \in H_*^{\alpha},\ 0 < \alpha \leq 1$. *Тогда для разрешимости уравнения (1.3.1) в классе* C_*^2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)d\Omega = 0\,.$$

При этом все решения (1.3.1) представимы в виде

$$w(z) = \mathrm{c} + A(f)z + B(f)\bar{z} + T_\zeta\big(T_\zeta f\big).$$

где с $-$*произвольная постоянная, а величины* $A(f)$, $B(f)$ $-$*функционалы, зависящие от* f.

Во второй главе исследуется поставленная задача в случае $n = 2$.

В первом параграфе этой главы исследуются вопросы существования и нахождения двоякопериодических решений класса C_*^2 для эллиптической системы второго порядка вида

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw = f(z), \qquad (2.1.1)$$

где a, b −постоянные, $f(z)$ – заданная двоякопериодическая функция класса $H_*^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$.

Существование и структура решений уравнения (2.1.1) зависят от свойства корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + b = 0. \qquad (2.1.2)$$

Пусть Γ_1 − решётка вида $\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0}\{m_1h_1 + m_2h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}$,

где $\Omega_0 = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1)$, Ω −основной параллелограмм решётки Г с вершинами $0, h_1,\ h_1 + h_2, h_2$.

Сначала находятся решение однородного уравнения, затем - решение неоднородного уравнения. Справедлива следующая

Теорема 2.1.3. *Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ корни уравнения (2.1.2). Тогда: 1) при $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ однородное уравнение (2.1.1) в классе C_*^2 имеет два линейно независимых решения над полем $\mathbb{C}$*

$$\varphi_1(z) = e^{\lambda_1\bar{z} - \bar{\lambda}_1 z},\ \varphi_2(z) = e^{\lambda_2\bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}.$$

Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)e^{-\lambda_j\bar{z} + \bar{\lambda}_j z}\, d\Omega = 0, \quad j = 1,2.$$

При этом любое решение уравнения (2.1.1) из класса C_*^2 представимо в виде

$$w(z) = e^{\lambda_1\bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}\left[c_1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}T_\zeta(fe^{-\lambda_1\bar{z} + \bar{\lambda}_1 z})\right] +$$
$$+e^{\lambda_2\bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}\left[c_2 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}T_\zeta(fe^{-\lambda_2\bar{z} + \bar{\lambda}_2 z})\right],$$

где c_1, c_2 −*произвольные постоянные.*

Теорема 2.1.4. *Если* $\lambda_1 \in \Gamma_1$ и $\lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1$, *то однородное уравнение (2.1.1) в классе C_*^2 имеет решение вида*

$$\varphi(z) = e^{\lambda_1\bar{z} - \bar{\lambda}_1 z},$$

а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы.

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)e^{-\lambda_1\bar{z} + \bar{\lambda}_1 z} d\Omega = 0.$$

При этом все решения уравнения (2.1.1) из класса C_*^2 представимы в виде

$$w(z) = e^{\lambda_1\bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}\left[c_1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}T_\zeta(fe^{-\lambda_1\bar{z} + \bar{\lambda}_1 z})\right] + e^{\lambda_2\bar{z} + dz}\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}T_\sigma(fe^{-\lambda_2\bar{z} - dz}),$$

где c_1 − *произвольная постоянная, и $T_\sigma\rho$ имеет вид,*

$$T_\sigma\rho=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\rho(z)\frac{\sigma(t-z-\Delta)}{\sigma(-\Delta)\sigma(t-z)}d_t\Omega,$$

а постоянные d и Δ *подобраны в виде*

$$d=\frac{\lambda_2}{2\pi i}\left(\eta_1\bar h_2-\eta_2\bar h_1\right),\qquad \Delta=-\frac{\lambda_2}{\pi}\Omega_0$$

и $\sigma(z)$ −сигма – функция Вейерштрасса, построенная на периодах h_1, h_2.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\lambda_1 \bar\in \Gamma_1$ и $\lambda_2 \bar\in \Gamma_1$. *Тогда однородное уравнение (2.1.1) в классе* C_*^2 *имеет только нулевое решение* $w_0(z)\equiv 0$, *а неоднородное уравнение имеет, и притом одно, решение вида*

$$w(z)=e^{\lambda_1\bar z+d_1z}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}T_\sigma^1\left(fe^{-\lambda_1\bar z-d_1z}\right)+e^{\lambda_2\bar z+d_2z}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}T_\sigma^2\left(fe^{-\lambda_2\bar z-d_2z}\right),$$

где $T_\sigma^1\rho_1, T_\sigma^2\rho_2$, *соответственно имеют вид*

$$T_\sigma^j\rho_j=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\rho_j(t)\frac{\sigma\left(t-z-\Delta_j\right)}{\sigma\left(-\Delta_j\right)\sigma(t-z)}d_t\Omega,$$

а здесь d_j и Δ_j *подобраны в виде*

$$d_j=\frac{\lambda_j}{2\pi i}\left(\eta_1\bar h_2-\eta_2\bar h_1\right),\quad \Delta_j=-\frac{\lambda_j}{\pi}\Omega_0,\qquad j=1,2.$$

Теорема 2.1.6. *Пусть* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ *−корень уравнения (2.1.2). Тогда при* $\lambda\in\Gamma_1$ *однородное уравнение (2.1.1) в классе* C_*^2 *имеет решение вида*

$$w_0(z)=e^{\lambda\bar z-\bar\lambda z}.$$

Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega}f(z)e^{-\lambda\bar z+\bar\lambda z}\,d\Omega=0.$$

При этом все решения уравнения (2.1.1) имеют вид

$$w(z)=e^{\lambda\bar z-\bar\lambda z}\left(c+A(f)z+B(f)\bar z+T_\zeta\left[T_\zeta\left(fe^{-\lambda\bar z+\bar\lambda z}\right)\right]\right),$$

где с- произвольная постоянная, постоянные A(f), B(f) имеют вид

$$A=\frac{1}{2i\Omega_0}\left(\eta_1\bar h_2-\eta_2\bar h_1\right)T_\zeta^0f,\qquad B=-\frac{\pi}{\Omega_0}T_\zeta^0f,$$

$$T_\zeta^0f=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}f(t)e^{-\lambda\bar t-dt}\zeta(t-z)d_t\Omega\right\}d_z\Omega,$$

здесь $\Omega_0=mes\Omega=|h_1|^2Im(h_2/h_1)$.

Теорема 2.1.7. *Если* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\bar\in\Gamma_1$, *то однородное уравнение (2.1.1) в классе* C_*^2 *имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение имеет, и притом единственное, решение вида*

$$w(z)=e^{\lambda\bar z+dz}T_\sigma\left[T_\sigma\left(f(z)e^{-\lambda\bar z-dz}\right)\right],$$

где

$$T_\sigma\rho=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\rho(t)\frac{\sigma(t-z-\Delta)}{\sigma(-\Delta)\sigma(t-z)}d_t\Omega,$$

постоянные d и $\Delta\in\Gamma_1$ *имеют вид*

$$d = \frac{\lambda}{2\pi i}\left[\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1\right], \quad \Delta = -\frac{\lambda}{\pi}\Omega_0.$$

Во втором параграфе для уравнения (2.1.1) исследуется задача существования двоякопериодических решений, допускающих полюсы, (как у однозначных аналитических функций), а также нули и полюсы с учётом их кратности, $f(z) \in H_*^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1,\ \ a, b -$ постоянные, то есть из класса C_*^2.

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_r$ —полюсы решения (2.1.1), имеющие соответственно кратности $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ и лежащие внутри основного параллелограмма Ω решётки Γ. Сначала находится решение однородного уравнения в классе $\tilde{C}_*^2$, с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$.

Теорема 2.2.1. *Пусть корни уравнения (2.1.2)* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *и* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ *и пусть* $\chi(z)$ *—эллиптическая функция, имеющая полюсы* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *с учётом их кратности и*

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{z=b_k}{Res}\, \chi(z) = 0. \tag{2.2.1}$$

Тогда любое решение однородного уравнения (2.1.1) с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$ *представимо в виде*

$$w(z) = \varphi(z)\, \vartheta(z), \tag{2.2.2}$$

где $\vartheta(z) \in C_*^2$ *—регулярное двоякопериодическое решение однородного уравнения (2.1.1).*

Из этой теоремы и свойства эллиптических функций следует, что однородное уравнение (2.1.1) не имеет решения с одним простым полюсом в классе $\tilde{C}_*^2$. Следовательно, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ порядок полюсов решения r должен быть $r \geq 2$.

Теорема 2.2.2. *Пусть один из корней* λ_1 или $\lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1$. *Тогда уравнение (2.1.1) всегда имеет решение с заданными полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$.

Далее ищутся решения (2.1.1), допускающие нули и полюсы внутри параллелограмма Ω.

Теорема 2.2.3. *Число нулей и полюсов решений однородного уравнения (2.1.1), равны между собой.*

Теорема 2.2.4 *(аналог теоремы Абеля). Пусть* $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r -$ *нули и* $b_1, b_2, \dots, b_r -$ *полюсы решения однородного уравнения (2.1.1), лежащие внутри основного параллелограмма* Ω *с учётом их кратностей. Тогда для существования таких решений необходимо и достаточно выполнения одного из условий*

$$\sum_{k=1}^{r} (b_k - \tilde{a}_k) \equiv -\frac{\lambda_j \Omega_0}{\pi} (mod\, \Gamma), \qquad j = 1,2, \tag{2.2.3}$$

где $\Omega_0 = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1)$, *причём при* $-\frac{\lambda_1 \Omega_0}{\pi} \in \Gamma,\ r \geq 2$, *а при* $-\frac{\lambda_2 \Omega_0}{\pi} \overline{\in} \Gamma, r \geq 1$.

Затем, исследуется случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае требуется, чтобы решение имело только полюсы (как однозначные аналитические функции).

Далее находятся решения неоднородного уравнения (2.1.1) в классе $\tilde{C}_*^2$ с заданными полюсами и с заданными нулями и полюсами при $f(z) \in \mathrm{H}_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

Показывается, что интегрирование уравнения (2.1.1) в классе $\tilde{C}_*^2$ можно свести к интегрированию уравнения в классе C_*^2.

Пусть заданы полюсы решения (2.1.1) $b_1, b_2, \dots, b_r$, лежащие внутри основного параллелограмма, Ω с учётом их кратности.

Теорема 2.2.8. *Пусть* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ *и* $\chi(z)$ *−эллиптическая функция с полюсами в точках* $b_1, b_2, \dots, b_r$, *как в теореме 2.2.1.*
Тогда для разрешимости уравнения (2.1.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_\Omega f_1(z) e^{-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z}\, d\Omega = 0,\ \ f_1(z) = \frac{1}{\chi(z)} f(z);\ \ j = 1{,}2.$$

При этом решения уравнения (2.1.1) представимы в виде

$$w(z) = \chi(z)\left[e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}\left(c_1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} T_\zeta\left(f_1 e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}\left(c_2 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} T_\zeta\left(f_1 e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z}\right)\right)\right],$$

где c_1, c_2 *−произвольные постоянные.*

Теорема 2.2.10. *1) Пусть* $\lambda_1 \bar{\in} \Gamma_1,\ \lambda_2 \in \Gamma_1$ *(или* $\lambda_1 \in \Gamma_1, \lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1$*). Тогда однородное уравнение всегда имеет решение с заданными полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *в виде*

$$w_0(z) = c_1 \varphi(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + c_2 e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}, \tag{2.2.4}$$

где $\varphi(z)$ *−эллиптическая функция второго рода с полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$, *удовлетворяющая условию*

$$\varphi(z + h_j) = e^{-\lambda_1 \bar{h}_j} \varphi(z),$$

c_1, c_2 *− произвольные постоянные. Для разрешимости неоднородного уравнения должно выполняться условие*

$$\iint_\Omega f(z) e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z} d\,\Omega = 0. \tag{2.2.5}$$

При этом уравнение (2.1.1) имеет решение вида

$$w(z) = w_0(z) + \frac{e^{dz}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} T_\sigma\left(f e^{-\lambda_1 \bar{z} - dz}\right) + e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} T_\zeta\left(f e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z}\right).$$

2) Если $\lambda_1 \bar{\in} \Gamma_1, \lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1$, *то однородное уравнение всегда имеет решение с заданными полюсами в виде*

$$\widetilde{w}_0(z) = c_1 \varphi(z) e^{\lambda_1 \bar{z}},\ \text{(или } c_2 \psi(z) e^{\lambda_2 \bar{z}}\text{) при } \lambda_1 - \lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1,$$

c_1 *−постоянная,* $\varphi(z)$*- как в части 1) (* $\psi(z)$ *как в части 1).*

При этом неоднородное уравнение (2.1.1) при любой правой части $f(z) \in \mathrm{H}_*^\alpha$ *имеет решение вида*

$$w(z) = \widetilde{w}_0(z) + e^{\lambda_1\bar{z}+d_1z}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}T_\sigma^1(fe^{-\lambda_1\bar{z}-d_1z}) +$$
$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2\bar{z}+d_2z}T_\sigma^2(fe^{-\lambda_2\bar{z}-d_2z})\,.$$

Аналогично находится решение с заданными нулями и полюсами.

В третьем параграфе для уравнения с переменными коэффициентами

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w = f(z), \qquad (2.3.0)$$

когда коэффициенты $a(z),\ b(z) \in C_*^{1,\alpha}$, $C_*^{1,\alpha} = C_*^1 \cap H_*^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$ и $f(z) \in H_*^\alpha$, дается описание ядра и коядра оператора L в классах C_*^2 и $\tilde{C}_*^2$. Сначала даётся многообразие решений однородного уравнения

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w = 0. \qquad (2.3.1)$$

Определение. Два решения уравнения (2.3.1) $\varphi(z), \psi(z) \in C^2(\mathcal{D})$ называются фундаментальными в области $\mathcal{D}$, если их определитель Вронского

$$W[\varphi,\psi] = \varphi(z)\psi_{\bar{z}}(z) - \psi(z)\varphi_{\bar{z}}(z) \neq 0$$

всюду в области $\mathcal{D}$.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\varphi(z), \psi(z) \in C_*^2$*- система фундаментальных решений уравнения (2.3.1) и*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} a(z)d\Omega \in \Gamma, \qquad (2.3.2)$$

Ω *−основной параллелограмм решётки Γ,* $\Gamma = \{m_1h_1 + m_2h_2;\ m_1, m_2 -$ целые$\}$. *Тогда всякое решение уравнения (2.3.1) из класса* C_*^2 *представимо в виде*

$$w(z) = c_1\varphi(z) + c_2\psi(z), \qquad (2.3.3)$$

где c_1, c_2 *−произвольные постоянные.*

Теорема 2.3.2. *Пусть* $\vartheta(z) \in C_*^2$ *ненулевое решение уравнения (2.3.1) и* $a_0 \overline{\in} \Gamma$. *Тогда всякое решение уравнения (2.3.1) представляется формулой*

$$w(z) = c\vartheta(z), \qquad (2.3.4)$$

где c *−произвольная постоянная.*

Теорема 2.3.3. *Пусть коэффициенты* $a(z), b(z) \in C_*^1$ *и связаны между собой соотношениями*

$$a(z) = -\frac{1}{c(z)}c_{\bar{z}}, b(z) = -c^2(z),$$

причём

$$c(z) \in C_*^1 \text{ и } c_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} c(z)d\Omega = 0.$$

Тогда уравнение (2.3.2) имеет систему фундаментальных решений

$$\vartheta_1 = exp(-T_\zeta c), \vartheta_2 = exp(T_\zeta c)T_\zeta(ce^{-2T_\zeta c}).$$

Теоремы 2.3.1 и 2.3.2 допускают обобщения для решения (2.3.1) из класса $\tilde{C}_*^2$ с заданными полюсами.

Теорема 2.3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1 и* $a_0 \in \Gamma$. *Тогда для решения уравнения (2.3.1) из класса* $\tilde{C}_*^2$ *существуют эллиптические функции* $\varphi_1(z)$ *и* $\varphi_2(z)$ *такие, что решение (2.3.1) представимо в виде*

$$w(z) = \varphi_1(z)\varphi(z) + \varphi_2(z)\psi(z).$$

Теорема 2.3.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2 и* $a_0 \overline{\in} \Gamma$. *Тогда любое решение уравнения (2.3.1) из класса* $\tilde{C}_*^2$ *представимо в виде*

$$w(z) = \chi(z)\vartheta(z),$$

где $\chi(z) -$ *эллиптическая функция, имеющая полюсы решения (2.3.1).*
Доказанные теоремы 2.3.1 – 2.3.5. позволяют найти решения неоднородного уравнения и описать коядро задачи в классе C_*^2 и $\tilde{C}_*^2$.

Дадим описания коядра уравнения (2.3.0) в классе C_*^2 при наличии фундаментальных решений однородного уравнения (2.3.1).

Теорема 2.3.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1. Тогда для разрешимости уравнения (2.3.0) в классе* C_*^n *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{f(z)}{\psi_1(z)}\varphi d\Omega = 0, \qquad \iint\limits_{\Omega} \frac{f(z)}{\psi_1(z)}\psi d\Omega = 0, \tag{2.3.5}$$

где $\psi_1(z) -$*вронскиан системы фундаментальных решений* $\varphi(z), \psi(z)$ *однородного уравнения. При этом решения (2.3.0) представимы в виде*

$$w(z) = c_1\varphi(z) + c_2\psi(z) - \varphi T_\zeta\left(\frac{f}{\psi_1}\psi\right) + \psi T_\zeta\left(\frac{f}{\psi_1}\varphi\right). \tag{2.3.6}$$

Теорема 2.3.7. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2 и* $a_0 \overline{\in} \Gamma$. *Тогда для разрешимости уравнения (2.3.0) в классе* C_*^2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Omega} e^{-T_\zeta(\tilde{\vartheta})} T_\sigma\left(\frac{1}{\vartheta} f e^{T_\zeta \tilde{\vartheta}}\right) d\Omega = 0, \tag{2.3.7}$$

где $\tilde{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}(2\vartheta_{\bar{z}} + a\vartheta)$, $\vartheta -$*ненулевое решение однородного уравнения (2.3.1), и* $T_\sigma \rho$ *имеет вид*

$$T_\sigma \rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \rho(t)\frac{\sigma(t - z - a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t - z)} d\Omega, \ \ a_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} a(z) d\Omega.$$

При этом уравнение (2.3.0) имеет решение вида

$$w(z) = c\vartheta(z) + \vartheta T_\zeta\left[e^{-T_\zeta \tilde{\vartheta}} T_\sigma\left(\frac{1}{\vartheta} f e^{T_\zeta \tilde{\vartheta}}\right)\right], \tag{2.3.8}$$

где $c -$*произвольная постоянная.*

В третьей главе работы исследуется поставленная задача для уравнения (1) с постоянными коэффициентами.

В первом параграфе этой главы дано описание многообразия решений однородного уравнения (2).

Структура многообразия решений уравнения (2) зависит от свойства корней, характеристического уравнения (3).

Даётся определение фундаментальной n системы решений однородного уравнения. Показывается, что в классе $С_*^n$ однородное уравнение имеет систему фундаментальных решений.

Во втором параграфе дается описание многообразия решений уравнения (2) в классе $С_*^n$.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n -$ простые корни характеристического уравнения (3). Тогда всякое двоякопериодическое решение уравнения (2) с периодами h_1, h_2, представимо в виде*

$$\vartheta(z) = \Phi_1(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \Phi_2(z)e^{\lambda_2\bar{z}} + \dots + \Phi_n(z)e^{\lambda_n\bar{z}}, \qquad (3.2.1)$$

где $\Phi_j(z) -$эллиптические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_j(z + h_k) = e^{-\lambda_j\bar{h}_k}\Phi_j(z), \quad k = 1,2; \quad j = 1,2 \dots n. \qquad (3.2.2)$$

Это представление единственно.

Теорема 3.2.2. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma_1,\ 1 \le k \le n$. Тогда всякое регулярное решение уравнения (2) из класса C_*^n представимо в виде*

$$\vartheta(z) = c_1e^{\lambda_1\bar{z}-\bar{\lambda}_1 z} + c_2e^{\lambda_2\bar{z}-\bar{\lambda}_2 z} + \dots + c_ke^{\lambda_k\bar{z}-\bar{\lambda}_k z}, \qquad (3.2.3)$$

где $с_1, с_2, \dots, с_k$- произвольные постоянные.

Теорема 3.2.3. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k,\ k \le n$ и корни характеристического уравнения, среди них могут быть и кратные. Тогда для существования ненулевого решения уравнения (2) в классе регулярных двоякопериодических функций, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно значение $\lambda_j \in \Gamma_1,\ 1 \le j \le n$.*

В третьем параграфе исследуются вопросы существования и нахождения двоякопериодических решений уравнения (2) с заданными полюсами, а также с заданными нулями и полюсами, как у эллиптических функций. Класс таких решений уравнения (2) обозначим через $\tilde{C}_*^n$.

Пусть обобщённое двоякопериодическое решение уравнения (2) класса $\tilde{C}_*^n$ допускает полюсы $b_1, b_2, \dots, b_r$ и с кратностями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$, лежащие внутри основного параллелограмма Ω решётки

$$\Gamma = \{m_1h_1 + m_2h_2;\ m_1, m_2 - \text{целые число}\}.$$

Пусть, как прежде, $\Gamma_1 = \frac{\pi}{|\Omega|}\Gamma,\ |\Omega| = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1)$.

Теорема 3.3.1. *Пусть все различные корни уравнения (3) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Gamma_1$. Тогда, если $\varphi(z)$ эллиптическая функция с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$, то решение уравнения (2) классе $\tilde{C}_*^n$ представляется в виде*

$$w(z) = \varphi(z)\sum_{k=1}^{n} c_k\, exp(\lambda_k\bar{z} - \bar{\lambda}_k z), \qquad (3.3.2)$$

где $c_k -$постоянные, $\varphi(z)$ имеет вид

$$\varphi(z) = c + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\nu_k} c_k^j\, \zeta^{(j-1)}(z - b_k), \qquad (3.3.3)$$

$c, c_n^j -$постоянные, причём

$$\sum_{k=1}^{r} c_k^1 = 0, \underset{z=b_k}{Res}\,\varphi(z) = c_k^1.$$

Теорема 3.3.2. *Пусть среди корней* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *хотя бы одно* $\lambda_j \,\overline{\in}\, \Gamma_1, 1 \le j \le m$. *Тогда уравнение (2) в классе* $\tilde{C}_*^n$ *всегда допускает решение с заданными полюсами.*

Причем: 1) при $\lambda_k - \lambda_j \,\overline{\in}\, \Gamma_1, k \neq j,\ k = 1,2, \dots, n$ *имеет решение вида*

$$w(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} F(z), \tag{3.3.5}$$

где $z_j^1 - z_j^0 = \frac{|\Omega|}{\pi} \lambda_j$ *и постоянные величины* d_j *удовлетворяют системе уравнений*

$$\left.\begin{aligned} d_j h_1 + \left(z_j^1 - z_j^0\right)\eta_1 = -\lambda_j \bar{h}_1 \\ d_j h_2 + \left(z_j^1 - z_j^0\right)\eta_2 = -\lambda_j \bar{h}_2 \end{aligned}\right\}. \tag{3.3.6}$$

Эллиптическая функция $F(z)$ *имеет вид*

$$F(z) = c + d\zeta\left(z - z_j^0\right) + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta(z - b_k) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=2}^{\lambda_k} A_k^{(l-1)} \wp^{(l-2)}(z - b_k), \tag{3.3.7}$$

где постоянные $c, d, A_k, A_k^{(l-1)}$ *связаны условиями*

$$d + \sum_{k=1}^{r} A_k = 0,$$

$$c + d\zeta\left(z_j^1 - z_j^0\right) + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta\left(z_j^1 - b_k\right) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=2}^{\lambda_k} A_k^{(l-1)} \wp^{(l-2)}\left(z_j^1 - b_k\right) = 0\,, \tag{3.3.8}$$

причем $z_j^1 - b_k \,\overline{\in}\, \Gamma,\ k = 1,2, \dots, r$;

2) при $\lambda_k - \lambda_j \in \Gamma_1,\ k \neq j,\ k = 1,2, \dots, n$ *имеется решение вида*

$$w(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} F(z) \left(c_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} c_k e^{\tilde{\lambda}_k \bar{z} - \bar{\tilde{\lambda}}_k z} \right),$$

где c_k *–постоянные,* $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k - \lambda_j$.

Теорема 3.3.3. *Пусть* N и P, *соответственно, число нулей и полюсов решения уравнения (2), лежащих внутри параллелограмма* Ω. *Тогда необходимо, чтобы* $N = P$.

Теорема 3.3.4. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *– различные корни характеристического уравнения (3),* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *–полюсы и* $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ *– нули решения, лежащие внутри параллелограмма* Ω *решётки* $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2;\ m_1, m_2 - \text{целые}\}$. *Тогда для существования решения уравнения (3.3.0) необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из условий*

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k-\tilde{a}_k)\equiv -\frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j(mod\Gamma),\ \ j=1,2,..,n,$$

$$|\Omega|=mes\Omega=|h_1|^2 Im(h_2/h_1). \tag{3.3.9}$$

В четвертом параграфе рассматриваются вопросы существования и нахождения двоякопериодических решений класса $\tilde{C}_*^n$ для неоднородного уравнения (1) где $a_1,a_{,2},\dots,a_n$ −постоянные, $f(z)$ −заданная двоякопериодическая функция класса $H_*^{\alpha}, 0<\alpha\leq 1$.

Лемма 3.4.1. *Пусть $\varphi(z)-$ эллиптическая функция с периодами $h_1,h_2,Im(h_2/h_1)>0$, имеющая полюсы решения уравнения (1). Тогда формула*

$$w(z)=\varphi(z)\,\vartheta(z), \tag{3.4.1}$$

дает обобщённое решение уравнения (1) из класса $\tilde{C}_*^n$, если $\vartheta(z)$ является регулярным решением (из класса C_*^n) уравнения

$$\partial_{\bar{z}}^{n}\vartheta+a_1\partial_{\bar{z}}^{n-1}\vartheta+\dots+a_n\vartheta=\frac{1}{\varphi(z)}f(z). \tag{3.4.2}$$

Теорема 3.4.1. *Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\Gamma_1$. $k\leq n$. Тогда однородное уравнение (2) в классе C_*^n имеет k линейно независимых решений*

$$exp\left(\lambda_j\bar{z}-\bar{\lambda}_j z\right),\ \ j=1,2,\dots,k,$$

а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} f(z)\,exp\left(-\lambda_j\bar{z}+\bar{\lambda}_j z\right)d\Omega=0,\quad j=1,2,\dots,k. \tag{3.4.3}$$

При этом все решения уравнения (1) выражаются формулой

$$w(z)=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j\bar{z}-\bar{\lambda}_j z}\left(c_j+A_jT_{\zeta}^{j}\left(fe^{-\lambda_j\bar{z}+\bar{\lambda}_j z}\right)\right)+$$

$$+\sum_{j=k+1}^{n}e^{\lambda_j\bar{z}+d_j z}\,A_jT_{\sigma}^{j}\left(fe^{-\lambda_j\bar{z}-d_j z}\right), \tag{3.4.4}$$

где c_j −произвольные постоянные, а постоянные Δ_j и d_j соответственно удовлетворяют уравнениям

$$exp\left(d_jh_1+\Delta_j\eta_1+\lambda_j\bar{h}_1\right)=exp\left(d_jh_2+\Delta_j\eta_2+\lambda_j\bar{h}_2\right)=1, j=k+1,\dots,n. \tag{3.4.5}$$

Здесь $\Delta_1\equiv-\frac{\lambda_j}{\pi}|\Omega|$, $|\Omega|=mes\Omega$. $T_\zeta f, T_\sigma f$ интегральные операторы, как в главе 1

$$T_{\zeta}^{j}f=-\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}f(t)e^{-\lambda_j\bar{z}+\bar{\lambda}_j z}\,\zeta(t-z)d\Omega,\quad j=1,2,\dots,k,$$

$$T_{\sigma}^{j}f=-\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}f(t)e^{-\lambda_j\bar{z}-d_j z}\,\frac{\sigma\left(t-z-\Delta_j\right)}{\sigma\left(-\Delta_j\right)\sigma(t-z)}d\Omega, j=k+1,k+2,\dots,n,$$

A_j −постоянные, зависящие от $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$.

Теорема 3.4.2. *Пусть все собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \overline{\in} \Gamma_1$. *Тогда однородное уравнение (2) имеет лишь нулевое решение, а неоднородное уравнение при любой правой части* $f(z) \in H_*^\alpha$, *в классе* C_*^n, *имеет, притом единственное, решение вида*

$$w(z) = \sum_{j=1}^{n} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} A_j T_\sigma^j \left(f e^{-\lambda_j \bar{z} - d_j z} \right), \tag{3.4.6}$$

где постоянные d_j – *как в теореме 3.4.1 при* $\lambda_j \overline{\in} \Gamma_1$, *условие вида (3.4.6).*

Из теоремы 3.4.1 и 3.4.2 следует

Теорема 3.4.3. *Для однозначной обратимости оператора* $L: C_*^n \to H_*^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, *необходимо и достаточно, чтобы все различные собственные значения характеристического полинома однородного уравнения (2)* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \overline{\in} \Gamma_1$.

Далее находится обобщённые решения уравнения (1) из класса $\tilde{C}_*^n$, с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$, лежащие внутри основного параллелограмма Ω решётки Γ, соответственно с кратностями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$.

Теорема 3.4.4. *Пусть все простые собственные значения характеристического уравнения однородного уравнения (2)* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Gamma_1$. *Пусть* $\varphi(z)$ *–эллиптическая функция, имеющая все полюсы решения, с их кратностями и имеющая периоды* h_1, h_2 *и*

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=b_k}{Res}\, \varphi(z) = 0. \tag{3.4.7}$$

Тогда для разрешимости уравнения (1) в классе $\tilde{C}_*^n$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\varphi(z)} f(z)\, exp\left(-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z\right) d\Omega = 0, \quad j = 1,2, \dots, n\,. \tag{3.4.8}$$

При этом решение уравнения (1) представляется формулой

$$w(z) = \varphi(z) \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z} \left(c_j + A_j T_\zeta f_j \right), \tag{3.4.9}$$

где c_j *–произвольные постоянные,*

$$f_j(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} exp\left(-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z\right),$$

A_j *как в теореме 3.4.1.*

Теорема 3.4.5. *Пусть среди собственных значений* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, *хотя бы одно значение* $\lambda_j \overline{\in} \Gamma_1$, *тогда однородное уравнение (1) всегда имеет решение с заданными полюсами.*

При этом

1) *если все* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \overline{\in} \Gamma_1$, *то однородное уравнение имеет решение, а неоднородное уравнение всегда разрешимо;*

2) *если* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \,\overline{\in}\, \Gamma,\ k \neq j, k < n,$ *то однородное уравнение имеет* $k+1$ *решений, а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)\, e^{-\lambda_k \bar{z} + \bar{\lambda}_k z} d\Omega = 0, \qquad i = 1,2, \ldots, k.$$

Теорема 3.4.6. *Пусть* $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_r$ *−нули и* $b_1, b_2, \ldots, b_r$ *−полюсы решения (1) связаны с собственными значениями* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *хотя бы одним условием*

$$\sum_{k=1}^{r} (b_k - \tilde{a}_k) \equiv \frac{|\Omega|}{\pi} \lambda_j (mod\Gamma), \qquad j - \text{фиксировано}, \qquad 1 \leq j \leq n\,.$$

Пусть $\psi(z)$ *−эллиптическая функция второго рода, имеющая нули и полюсы решения уравнения (1), удовлетворяющая условию*

$$\psi(z + h_k) = e^{-\lambda_j \bar{h}_k} \psi(z), \qquad k = 1,2. \qquad (3.4.11)$$

Тогда при $\lambda_k - \lambda_j \in \Gamma_1,\ k \neq j,\ k = 1,2, \ldots, l,\ l < n,$ *однородное уравнение (2) имеет* $l + 1 -$ *решений, а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнения* $l+1$ *условий*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\psi(z)} f(z)\, e^{-\lambda_j \bar{z}} d\Omega = 0, \qquad (3.4.11)$$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\psi(z)} f(z)\, e^{-\lambda_k \bar{z} + \bar{\lambda}_k z} d\Omega = 0, \qquad k = 1,2, \ldots, l, k \neq j.$$

При этом уравнение (1) имеет решение вида

$$w(z) = \psi(z) \left[\left(c_j e^{\lambda_j \bar{z}} + A_j e^{\lambda_j \bar{z}} T_\zeta f_j \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l} e^{\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_i z} \left(c_i + A_i T_\zeta^j f_i \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{i=l+1 \\ i \neq j}}^{n} A_i\, e^{d_i z} T_\sigma^j f_i \right], \qquad (3.4.12)$$

где c_k *−постоянные величины,* A_k *−постоянные, зависящие от* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *а* $T_\zeta f_i,\ T_\sigma f_i$,*- как в теоремах 3.4.1 и 3.4.2*

$$f_j(z) = \frac{1}{\psi(z)} f(z) e^{-\lambda_j \bar{z}} \ \ \text{при}\ \ i \neq j,$$

$$f_k(z) = \frac{1}{\psi(z)} f(z) e^{-\lambda_k \bar{z} + \bar{\lambda}_k z},\ \ k = 1,2, \ldots, n,\ \ k \neq j.$$

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях из списка ВАК Минобрнауки РФ:

1. Саидназаров, Р.С. Обобщённые двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] / Д.С. Сафаров, Р.С.Саидназаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан.– 2013.– Т.56, №10.–С.779-788.
2. Саидназаров, Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем высокого порядка [Текст] / Д.С. Сафаров, Р.С. Саидназаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан.– 2014.–Т.57.- №5.–С.363-370.
3. Саидназаров, Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] / Р.С. Саидназаров // Вестник Таджикского национального университета.-2015.–1/1(156).–С. 8-16.
4. Саидназаров, Р.С. О многообразии двоякопериодических решений одной эллиптической системы второго порядка [Текст] / Р.С.Саидназаров // Вестник Таджикского национального университета.-2015.–1/1(156).–С.47-53.

В других изданиях:

5. Саидназаров, Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] /Д.С.Сафаров, Р.С. Саидназаров // Материалы международной конференции «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения».- Душанбе, 2011.–С.113-117.
6. Саидназаров, Р.С. Эллиптические функции второго рода и их приложения [Текст] / Р.С. Саидназаров, А.Т. Гаюров // Материалы международной научно–методической конференции «Современные проблемы математики и ее преподавания».–Курган-Тюбе, 2013.–С.81-84.
7. Саидназаров, Р.С. О двоякопериодических решениях уравнения Бицадзе [Текст] /Р.С.Саидназаров // Материалы международной научно практической конференции «Современные проблемы точных наук и их преподавания», Курган-Тюбе.– 2014.–С.78-82.
8. Саидназаров, Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] /Д.С. Сафаров, Р.С. Саидназаров //Materialy VIII Międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji «Nauk owaprzestrzeń Europy - 2012» Volume 37. Matematyka. Technicznenauki.: Przemysl. Naukaistudia – 104 s.
9. Саидназаров, Р.С. Двоякопериодические метааналитические функции [Текст] /Д.С. Сафаров, Р.С. Саидназаров // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел.- Душанбе, 2015.–С.148-150.