КУРГАН-ТЮБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. НОСИРА ХУСРАВА

На правах рукописи

САИДНАЗАРОВ РАХМОНАЛИ САНГИЛОЕВИЧ

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

01.01.02- Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

На соискание ученой степени

кандидата физико – математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

Сафаров Д.

Курган-Тюбе–2016

Оглавление

Введение……...……………………………………………….…………………3

Глава 1. Некоторые сведения из теории эллиптических функций. Двоякопериодические решения неоднородного уравнения Коши – Римана ………………………………………………………………………………..…27

1.1 Некоторые сведения и основные формулы и теоремы из теории эллиптических функций ……..……………………..………………27

1.2 Эллиптические функции второго рода. Квазиэллиптические функции....35

1.3 Двоякопериодическое решение неоднородного уравнения Коши – Римана и некоторые его применения..………………...……38

Глава 2. Двоякопериодические решения эллиптических систем второго порядка…………………………………….............................44

2.1 Регулярные двоякопериодические решения с постоянными коэффициентами………..……………..44

2.2 Обобщённые двоякопериодические решения уравнения (2.1.1).. ……....56

2.3 Двоякопериодические решения уравнения (2.1.1) с переменными коэффициентами……………………………………......71

Глава 3. Двоякопериодические решения эллиптических систем высокого порядка...82

3.1 Многообразие решений однородной системы с постоянными коэффициентами……………………………………..82

3.2 Двоякопериодические решения однородного уравнения в классе C_*^n………………………………………………………..90

3.3 Двоякопериодические обобщенные решения однородного уравнения (3.1.0)……………………………………………97

3.4 Решение неоднородного уравнения (3.0.0)………..……………………...106

Заключение……………..…………………………………………………...116

Список литературы …………………..…………………………………..118

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы: Исследования, имеющие целью изучение теории систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными, прежде всего связаны с узловыми вопросами анализа, геометрии, механики и т.д.. В этом направлении основополагающими являются исследования М.А. Лаврентьева, Г.И. Петровского, И.Н. Векуа, Л. Берса, А.В. Бицадзе, Б.В. Боярского, Ф.М. Гахова, В С. Виноградова, А.Д. Джураева, Л.Г. Михайлов и их последователей [8]-[14], [16], [25]-[27], [31], [35], [61], [62].

Диссертационная работа посвящена исследованию задачи существования и нахождения двоякопериодических решений с основными периодами $h_1, h_2,\ Im(h_2/h_1) \neq 0$ эллиптической системы высокого порядка вида

$$\partial_{\bar{z}}^{n} w + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} w + a_2 \partial_{\bar{z}}^{n-2} w + \cdots + a_n w = f(z), \qquad (1)$$

где $z = x + iy, w = u + i\vartheta,\ \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\,\partial_y\right)$ – дифференциальный оператор Коши–Римана, $\partial_{\bar{z}}^{n} = \partial_{\bar{z}}(\partial_{\bar{z}}^{n-1})$, а $a_1(z), a_2(z), \dots, a_n(z), f(z)$ – двоякопериодические функции с периодами $h_1, h_2,\ Im(h_2/h_1) \neq 0$, [1], [15], [25], [47].

Решение однородного уравнения (1)

$$Lw \equiv\ \partial_{\bar{z}}^{n} w + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} w + \cdots + a_n w = 0\,, \qquad (2)$$

в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ называется метааналитической функцией в этой области [5]-[7], [18]-[23].

Класс метааналитических функций включает в себя класс, аналитических функций (то есть $\partial_{\bar{z}} w = 0$), бианалитических (то есть $\partial_{\bar{z}}^{2} w = 0$) и полианалитических (то есть $\partial_{\bar{z}}^{n} w = 0$) функций.

Уравнение с оператором Коши-Римана в начале XX века были изучены Г.В. Колосовым [23], [24] и Н.И. Мусхелишвили [33] для решений плоской задачи теории упругости. Ими было обнаружено, что эффективным средством для решения таких задач могут служить бианалитические функции, (то есть решения уравнения $\partial_{\bar{z}}^{2} w = 0$). В то же время бигармонические функции – суть вещественные или мнимые части бианалитической функцией.

Случай однородной системы (2) с постоянными коэффициентами рассмотрен в работах М.Б. Балка, М.Ф. Зуева [5]-[7], М.Ф. Зуева [5]-[7], [20]-[22]. Общее представление регулярных решений уравнения при определенных ограничениях на коэффициенты дано в работах Жегалева В.И. [17], Расулова К.М. [44] и исследованы некоторые задачи типа линейного сопряжения. В работа Раджабова Н.Р., Расулова А. [41], [46] предложен метод нахождения многообразия решений системы (1) через аналитические функции, удобны для решения граничных задач.

Исследованию классических и неклассических краевых задач для метааналитических функций посвящены работы [2], [10], [29], [57]-[59].

Полианалитические функции, так называемые решения уравнения

$$\partial_{\bar{z}}^{n} w = 0,$$

были предметом специального изучения многих авторов: П. Бургатти [62], Н. Теодереску [65], В.С. Фѐдорова [48], М.Б. Балка, М.Ф. Зуева [5]-[7], М.К. Расулова [43]-[46], В.И. Показеева [36]-[38] и других. В этих исследованиях изучены вопросы теории полианалитических функций, примыкающих к классической теории аналитических функций, а также краевые задачи для таких функций.

Исследования задачи существования и нахождения периодических, в том числе, и двоякопериодических, решений для эллиптических систем уравнений с частными производными на плоскости представляются важными и актуальными. Этим вопросом занимались Ф. Эрве [63], В.Л. Натанзон [34], В.И. Показеев [38], [39], Э.М. Мухаммадиев [32], С. Байзаев [3], [4], В.В. Показеев [40], Д.С. Сафаров [50]-[56], [63] и другие.

В работах этих авторов исследованы двоякопериодические обобщенные аналитические функции, двоякопериодические бианалитические и полипаналитические функции и построены аналоги эллиптических функций Вейерштрасса $\zeta(z), \sigma(z)$ и $\wp(z)$ и даны некоторые их приложение.

Решение уравнения (1) понимается как в обобщѐнном смысле, так и в регулярном смысле И.Н.Векуа [11], [12].

Под обобщѐнным решением уравнения (1) понимается двоякопериодическая функция $w(z)$, допускающая полюсы, как у однозначных аналитических функций, в любом параллелограмме периодов Ω

решетки $\Gamma = \{z_0 + m_1h_1 + m_2h_2,\ \ m_1, m_2 -$ целые числа $\}$, z_0 – произвольная точка плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющая уравнению (1) в области $\Omega_1 \subset \Omega$, где Ω_1 –не содержит полюсов решения. Класс таких решений уравнения (1) обозначим через $\tilde{C}_*^n$. Когда $\Omega_1 = \emptyset$, класс таких решений уравнения (1) называется регулярным и обозначается через C_*^n, [56].

Класс двоякопериодических функций, непрерывные по Гельдеру в параллелограмме Ω с показателем α, обозначим через $H_*^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$, [24].

Цель работы. В случае постоянных коэффициентов дать описание многообразие решений однородного уравнения и вычислить размерность ядро. Для неоднородного уравнения найти условия разрешимости и описать ядро и коядро задачи и выявить характер разрешимости (фредгольмовости или нетеровости), в зависимости от свойства корней характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0\,. \tag{3}$$

Методика исследования. В работе используется методы теории дифференциальных и функционального анализа, методы теории функций комплексного переменного, теории обобщенных аналитических и аппарат теории эллиптических функций Вейерштрасса.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Найдено многообразие решений однородного уравнения (2) в случае постоянных коэффициентов через эллиптические функции второго рода, когда корни уравнения (3) простые.
2. Найдены условия, когда однородное уравнение (2) имеет ненулевое решение, и когда оно имеет только нулевое решение в классе C_*^n
3. Дано описание многообразия решений уравнения (2) в классе $\tilde{C}_*^n$, с заданными полюсами, а также с заданными нулями и полюсами в случае простых корней характеристического уравнения (3).
4. Построены картины разрешимости, а также найдены условия, при которых задача является фредгольмовой и нѐтеровой.
5. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения (1) в классе C_*^n, и установлено, что в этом классе задача является фредгольмовой.

6. Показано, что поставленная задача для уравнения (1) в классе $\tilde{C}_*^n$ в зависимости от расположения корней уравнения (3) может быть фредгольмовой или нѐтеровой.
7. В случае, когда $n = 2$ и коэффициенты уравнения (1) переменные, найдено многообразие решений однородного уравнения в классах C_*^2 и $\tilde{C}_*^2$. Также даны описания ядра и коядра задачи.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа является теоретической. В ней даны алгоритмы нахождения двоякопериодических решений уравнения (1) с помощью аппарата теории эллиптических функций, с постоянными и переменными (случай $n = 2$) коэффициентами. Даны описание ядро и коядро задачи.

Полученные результаты могут найти применение при изучении свойств метааналитических функций, (а также биананалитических и полианалитических). Использованные методы могут быть применены при решении плоской задачи теории упругости и при разработке спецкурсов для студентов и магистров, специализирующихся по профилю физика, математика, механика, прикладная математика.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция, посвященная 20-й годовщине независимости Республики Таджикистан, «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения», Душанбе, 23-24 июня 2011 года.стр.113-117.
2. Международная научно-методическая конференция «Современные проблемы математики и ее преподавания», Курган-Тюбе, 10-11 мая 2013 года, стр. 81-84.
3. Международная научно – практическая конференция «Современные проблемы точных наук и их преподавания» Курган-Тюбе, 2014, стр. 78-82.
4. Международная научная конференция Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел, посвященная 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Сабирова Темура Сафаровича», Душанбе, 29-30 октября 2015.
5. Семинары кафедры математического анализа Курган-Тюбинского госуниверситета им. Н. Хусрава (2010 – 2015 гг.).

6. Ежегодные научно-практические конференции студентов и профессорско-преподавательского состава государственного университета им. Носира Хусрава города Курган-Тюбе (2010-2015 гг.).

Личный вклад соискателя и публикации. В совместных работах [67], [68] постановка задач и выбор метода доказательств принадлежат Д.С. Сафарову, все выкладки и обоснование принадлежат автору.

Структура и объѐм диссертации. Диссертация состоит из введения, трѐх глав, разделенных на параграфы, и библиографии, содержащей 75 наименования. Общий объем диссертации 124 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во введении даѐтся краткий исторический обзор результатов по затрагиваемым проблемам, обосновывается актуальность выбранной темы, определяются цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Приводятся основные результаты диссертации.

В первой главе, первом параграфе приведены основные свойства эллиптических функций и формулы их представления посредством функций Вейерштрасса $\zeta(z) -$ дзета, $\sigma(z)$ $-$сигма, $\wp(z)$ – пе [1], [15], [25], [47].

Во втором параграфе приводятся свойства и формулы представления эллиптических функций второго рода, то есть класса мероморфных функций, удовлетворяющих условиям [1], [53], [56]

$$\varphi(z+h_1) = \alpha\,\varphi(z),\ \varphi(z+h_2) = \beta\varphi(z), \tag{3}$$

где $\alpha, \beta -$ постоянные множители, $Im(h_2/h_1) \neq 0$. Условия существования таких функций зависят от числа $D = \frac{1}{2\pi i}\ [h_2\, ln\alpha - h_1\, ln\beta\,]$. При $D \in \Gamma = \{m_1h_1 + m_2h_2,\ m_1,\ m_2 - \text{целые}\}$, свойства таких функций аналогичны свойствам эллиптических функций, причѐм $r \geq 2$, r $-$число полюсов с учѐтом их кратности. Если же $D \,\overline{\in}\, \Gamma$, то в отличие от эллиптических функций всегда можно построить эллиптические функции с заданными полюсами. Также в этом параграфе приведены условия существования и формулы представления квазиэллиптических функций, то есть мероморфных функций, удовлетворяющих условиям, [1], [15].

$$\psi(z+h_1) = \psi(z) + A, \qquad \psi(z+h_2) = \psi(z) + B\,,$$

где A, B – постоянные.

В третьем параграфе приведена формула двоякопериодических решений неоднородного уравнения Коши – Римана и даны ее применения к нахождению двоякопериодических решений неоднородного уравнения Бицадзе [8], [10], [20]

$$\partial_{\bar{z}}^2 w \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} = f(z), \tag{4}$$

в классе регулярных решений, то есть C_*^2 (без полюсов).

Теорема 1.3.2. *Пусть* $f(z) \in H_*^{\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. *Тогда для разрешимости уравнения (7) в классе* C_*^2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) d\Omega = 0 .$$

При этом все решения (7) представимы в виде

$$w(z) = C + A(f)z + B(f)\bar{z} + T_\zeta(T_\zeta f).$$

где C *−произвольная постоянная, а величины* $A(f)$, $B(f)-$ *функционалы зависящие от* f. *Здесь,*

$$T_\zeta f = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} f(t)\zeta(t-z) d_t\Omega ,$$

$\zeta(z)$ *−дзета – функция Вейерштрасса, построенная на периодах* h_1, h_2.

Во второй главе исследуется поставленная задача в случае $n = 2$.

В первом параграфе этой главы исследуется вопрос существования и нахождения двоякопериодических решений класса C_*^2 для эллиптической системы второго порядка вида

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + a w_{\bar{z}} + bw = f(z), \tag{2.1.1}$$

где a, b −постоянные, $f(z)$ – заданная двоякопериодическая функция класса H_*^{α}, $0 < \alpha \leq 1$.

В работах [29], [42]-[45], [57]-[59], [66] для уравнения (2.1.1) исследованы краевые задачи аналитических функций (задача Газемана, Римана, Гильберта и др.).

Сначала находится решения однородной системы, а затем решения неоднородной системы.

1. Рассмотрим однородное уравнение

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw = 0, \qquad (2.1.2)$$

и будем искать его решения в классе C_*^2. Существование и структура решений уравнения (2.1.2) зависит от свойства корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + b = 0. \qquad (2.1.3)$$

Пусть Γ_1 − решѐтка вида $\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0}\{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}$,

где $\Omega_0 = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1)$, Ω −основной параллелограмм решѐтки Γ с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *−различные корни уравнения (2.1.3). Тогда: 1) при* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ *уравнение (2.1.2) имеет два линейно независимых решения (над полем комплексных чисел), и любое еѐ решение из класса* C_*^2 *представимо в виде*

$$w(z) = c_1 e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}, \qquad (2.1.4)$$

c_1, c_2 *−произвольные постоянные величины;*

2) если $\lambda_1 \in \Gamma_1$, $\lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1$ *или наоборот, то уравнение (2.1.2) имеет решение вида*

$$w(z) = c_1 e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}, \qquad (2.1.5)$$

c_1 *− произвольная постоянная;*

3) при $\lambda_1 \overline{\in} \Gamma_1$, $\lambda_2 \overline{\in} \Gamma_2$ *уравнение (2.1.2) имеет только нулевое решение* $w(z) \equiv 0$.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *корень уравнения (3). Тогда 1) при* $\lambda \in \Gamma_1$ *любое решение уравнения (2) из класса* C_*^2 *имеет вид*

$$w(z) = ce^{\lambda \bar{z} + \bar{\lambda} z}, \qquad (2.1.6)$$

где с – произвольная постоянная;

2) если $\lambda \overline{\in} \Gamma_1$, *то уравнение (2) имеет только нулевое решение* $w(z) \equiv 0$.

2. Решение неоднородного уравнения (2.1.1)

Методом произвольных постоянных находится решение неоднородного уравнения (2.1.1). Справедлива следующая.

Теорема 2.1.3. *Пусть* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *корни уравнения (2.1.3). Тогда: 1) при* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ *однородное уравнение (2.1.2) в классе* C_*^2 *имеет два линейно независимых решений над полем* $\mathbb{C}$

$$\varphi_1(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}, \ \varphi_2(z) = e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}.$$

Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z} \, d\Omega = 0, \quad j = 1,2.$$

При этом любое решение уравнения (2.1.1) из класса C_*^2 *представимо в виде*

$$w(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} \left[c_1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} T_\zeta (f e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z}) \right] +$$

$$+ e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z} \left[c_2 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} T_\zeta (f e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z}) \right],$$

где c_1, c_2 *—произвольные постоянные.*

Теорема 2.1.4. *Если* $\lambda_1 \in \Gamma_1$ и $\lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1$, *то однородное уравнение (2.1.2) в классе* C_*^2 *имеет одно решение вида*

$$\varphi(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z},$$

а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы.

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z} d\Omega = 0 \, .$$

При этом все решения уравнения (2.1.1) из класса C_*^2 *представимы в виде*

$$w(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} \left[c_1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} T_\zeta (f e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z}) \right] \ + e^{\lambda_2 \bar{z} + dz} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} T_\sigma (f e^{-\lambda_2 \bar{z} - dz}),$$

где c_1 *— произвольная постоянная, и* $T_\sigma \rho$ *имеет вид,*

$$T_\sigma \rho = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \rho(z) \frac{\sigma(t-z-\Delta)}{\sigma(-\Delta)\sigma(t-z)} d_t \Omega$$

постоянные d и Δ *подобраны в виде*

$$d = \frac{\lambda_2}{2\pi i}\left(\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1\right), \qquad \Delta = -\frac{\lambda_2}{\pi} \Omega_0,$$

где $\sigma(z)$ —сигма функция Вейерштрасса.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\lambda_1 \overline{\in} \Gamma_1$ и $\lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1$. *Тогда однородное уравнение (2.1.2) в классе* C_*^2 *имеет только нулевое решение* $w_0(z) \equiv 0$, *а неоднородное уравнение (2.1.1) имеет, и притом одно, решение вида*

$$w(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} + d_1 z} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} T_\sigma^1\left(f e^{-\lambda_1 \bar{z} - d_1 z}\right) + e^{\lambda_2 \bar{z} + d_2 z} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} T_\sigma^2\left(f e^{-\lambda_2 \bar{z} - d_2 z}\right),$$

где $T_\sigma^1 \rho_1, T_\sigma^2 \rho_2$, *соответственно имеют вид*

$$T_\sigma^j \rho_j = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \rho_j(t) \frac{\sigma\left(t-z-\Delta_j\right)}{\sigma\left(-\Delta_j\right)\sigma(t-z)} d_t \Omega,$$

а здесь d_j и Δ_j *подобраны в виде*

$$d_j = \frac{\lambda_j}{2\pi i}\left(\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1\right), \quad \Delta_j = -\frac{\lambda_j}{\pi} \Omega_0, \qquad j = 1,2.$$

Теорема 2.1.6. *Пусть* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *—корень уравнения (2.1.3). Тогда при* $\lambda \in \Gamma_1$ *однородное уравнение (2.1.2) в классе* C_*^2 *имеет одно решение вида*

$$w_0(z) = e^{\lambda \bar{z} - \bar{\lambda} z},$$

Для разрешимости неоднородного уравнения (2.1.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda \bar{z} + \bar{\lambda} z} d\Omega = 0.$$

При этом все решения уравнения (2.1.1) имеют вид

$$w(z) = e^{\lambda \bar{z} - \bar{\lambda} z}\left(c + A(f) z + B(f) \bar{z} + T_\zeta\left[T_\zeta\left(f e^{-\lambda \bar{z} + \bar{\lambda} z}\right)\right]\right),$$

где с- произвольная постоянная, постоянные A(f), B(f) имеют вид

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2i\Omega_0}\left(\eta_1\bar{h}_2 - \eta_2\bar{h}_1\right)T_\zeta^0 f, \quad B = -\frac{\pi}{\Omega_0}T_\zeta^0 f,$$

$$T_\zeta^0 f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(t)e^{-\lambda\bar{t}-dt}\zeta(t-z)d_t\Omega\right\}d_z\Omega,$$

здесь $\Omega_0 = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2 / h_1)$.

Теорема 2.1.7. *Если* $\lambda \overline{\in} \Gamma_1$, *то однородное уравнение (2.1.2) в классе* C_*^2 *имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (2.1.1) имеет, и притом единственное, решение вида*

$$w(z) = e^{\lambda\bar{z}+dz}T_\sigma\left[T_\sigma\left(f(z)e^{-\lambda\bar{z}-dz}\right)\right],$$

$$\mathrm{T}_\sigma\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\rho(t)\frac{\sigma(t-z-\Delta)}{\sigma(-\Delta)\sigma(t-z)}d_t\Omega,$$

постоянные d и $\Delta \in \Gamma_1$ *имеют вид*

$$d = \frac{\lambda}{2\pi i}\left[\eta_1\bar{h}_2 - \eta_2\bar{h}_1\right], \quad \Delta = -\frac{\lambda}{\pi}\Omega_0.$$

Во втором параграфе для уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw = f(z) \tag{2.2.1}$$

исследуется задачи существования и нахождения двоякопериодических решений, допускающие полюсы, (как у однозначных аналитических функций), а также нули и полюсы с учетом их кратности, $f(z) \in H_*^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, $a, b -$ постоянные.

Обозначим через $\tilde{C}_*^2$ −класс двоякопериодических решений уравнения (2.1.1), допускающие полюсы, в основном параллелограмме Ω решётки $\Gamma = \{m_1h_1 + m_2h_2;\ m_1, m_2 - \text{целые}\}$, как у однозначных аналитических функций, и принадлежащих $\mathrm{C}^2(\Omega\backslash\Omega_1)$, где $\Omega_1 \subset \Omega$, содержащее полюсы решения множество. В случае, когда $\Omega_1 = \emptyset$, мы получим класс регулярных решений, то есть C_*^2.

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_r$ −полюсы решения (2.2.1), имеющие соответственно кратности $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ и лежащие внутри основного параллелограмма Ω решётки Г.

1. Сначала находятся решение однородного уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + a w_{\bar{z}} + b w = 0 \tag{2.2.2}$$

в классе $\tilde{C}_*^2$, с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$.

Теорема 2.2.1. *Пусть корни уравнения (2.1.3)* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *и* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ *и пусть* $\chi(z)$ *−эллиптическая функция, имеющая полюсы* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *с учетом их кратности и*

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{z=b_k}{Res}\, \chi(z) = 0. \tag{2.2.3}$$

Тогда любое решение уравнения (2.2.2) с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$ *представимо в виде*

$$w(z) = \varphi(z)\, \vartheta(z), \tag{2.2.4}$$

где $\vartheta(z) \in C_*^2$ *−регулярное двоякопериодическое решение уравнения (2.2.2).*

Из этой теоремы и свойства эллиптических функции следует, что уравнение (2.2.2) не имеет решения с одним простым полюсом в классе $\tilde{C}_*^2$. Следовательно, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ порядок полюсов решения r должен быть $r \geq 2$.

Теорема 2.2.2. *Пусть один из корней* λ_1 или $\lambda_2 \,\overline{\in}\, \Gamma_1$. *Тогда уравнение (2.2.2) всегда имеет решение с заданными полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$.

Далее ищется решения (2.2.2), допускающие нули и полюсы внутри параллелограмма Ω.

Теорема 2.2.3. *Число нулей и полюсов решений уравнения (2.2.2), равны между собой.*

Теорема 2.2.4 *(аналог теоремы Абеля). Пусть* $\tilde{a}_1, \tilde{a}_{,2}, \dots, \tilde{a}_r$ *− нули и* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *− полюсы решения уравнения (2.2.1), лежащие внутри основного параллелограмма* Ω *с учётом их кратностей. Тогда для существования таких решений необходимо и достаточно выполнение одного из условий*

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k-\tilde{a}_k)\equiv-\frac{\lambda_1\Omega_0}{\pi}(mod\,\Gamma) \qquad (2.2.5)$$

или

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k-\tilde{a}_k)\equiv-\frac{\lambda_2\Omega_0}{\pi}(mod\,\Gamma)$$

$\Omega_0=mes\Omega=|h_1|^2 Im(h_2/h_1)$, *причѐм при* $-\frac{\lambda_1\Omega_0}{\pi}\in\Gamma$ *или* $-\frac{\lambda_2\Omega_0}{\pi}\Gamma, r\geq 2$, *а при* $-\frac{\lambda_1\Omega_0}{\pi}\overline{\in}\,\Gamma$ *или* $-\frac{\lambda_2\Omega_0}{\pi}\overline{\in}\,\Gamma, r\geq 1$.

Далее, исследуется случай $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. В этом случае требуется, чтобы решение имело только полюсы без точки ограниченной неопределенности, [34].

2. Решение неоднородного уравнения.

Теперь находится решения неоднородного уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}}+aw_{\bar{z}}+bw=f(z), \qquad (2.2.6)$$

в классе $\tilde{C}_*^2$ с заданными полюсами и с заданными нулями и полюсами при $f(z)\in \mathrm{H}_*^{\alpha}, 0<\alpha\leq 1$.

Показывается, что интегрирование уравнения (2.2.6) в классе $\tilde{C}_*^2$ можно свести к интегрированию уравнения в классе C_*^2, с помощью леммы 2.2.2. и теоремы 2.2.5 – 2.2.7.

Пусть заданы полюсы решения (2.2.6) $b_1, b_2, \dots, b_r$, лежащие внутри основного параллелограмма, Ω с учетом их кратности.

Теорема 2.2.8. *Пусть* $\lambda_1\neq\lambda_2$ и $\lambda_1,\lambda_2\in\Gamma_1$ *и* $\varphi(z)$ *−эллиптическая функция с полюсами в точках* $b_1, b_2, \dots, b_r$,

$$\sum_{k=1}^{r}\underset{z=b_k}{Res}\,\varphi(z)=0.$$

Тогда для разрешимости уравнения (2.2.6) необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f_1(z)e^{-\lambda_j\bar{z}+\bar{\lambda}_j z}\,d\Omega=0,\;\; f_1(z)=\frac{1}{\varphi(z)}f(z);\;\; j=1,2.$$

При этом решения уравнения (2.2.6) представимы в виде

$$w(z)=\varphi(z)e^{\lambda_1\bar{z}-\bar{\lambda}_1 z}\big(c_1+T_\zeta(f_1e^{-\lambda_1\bar{z}+\bar{\lambda}_1 z})\big)+\varphi(z)e^{\lambda_2\bar{z}-\bar{\lambda}_2 z}\big(c_2+T_\zeta(f_1e^{-\lambda_2\bar{z}+\bar{\lambda}_2 z})\big),$$

где c_1, c_2 *−произвольные постоянные.*

Теорема 2.2.10. *1) Пусть* $\lambda_1 \bar{\in} \Gamma_1,\ \lambda_2 \in \Gamma_1$ *(или* $\lambda_1 \in \Gamma_1, \lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1$*). Тогда однородное уравнение всегда имеет решение с заданными полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *в виде*

$$w_0(z)=c_1\varphi(z)e^{\lambda_1\bar{z}}+c_2e^{\lambda_2\bar{z}-\bar{\lambda}_2 z}, \qquad (2.2.7)$$

где $\varphi(z)$ *−эллиптическая функция второго рода с полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$*, удовлетворяющая условию*

$$\varphi\big(z+h_j\big)=e^{-\lambda_1\bar{h}_j}\varphi(z),$$

c_1, c_2 *− произвольные постоянные. Для разрешимости неоднородного уравнения должно выполняться условие*

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)e^{-\lambda_2\bar{z}+\bar{\lambda}_2 z}d\,\Omega=0. \qquad (2.2.8)$$

При этом уравнение (2.2.6) имеет решение вида

$$w(z)=w_0(z)+\frac{e^{\lambda_1\bar{z}+dz}}{\lambda_1-\lambda_2}T_\sigma\big(fe^{-\lambda_1\bar{z}-dz}\big)+e^{\lambda_2\bar{z}-\bar{\lambda}_2 z}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}T_\zeta\big(fe^{-\lambda_2\bar{z}+\bar{\lambda}_2 z}\big).$$

2) Если $\lambda_1 \bar{\in} \Gamma_1, \lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1$*, то однородное уравнение всегда имеет решение с заданными полюсами в виде*

$$\widetilde{w}_0(z)=c_1\varphi(z)e^{\lambda_1\bar{z}},\ \text{(или } c_2\psi(z)e^{\lambda_1\bar{z}}\text{) при } \lambda_1-\lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1,$$

c_1 *−постоянная,* $\varphi(z)$*- как в части 1) (* $\psi(z)$ *как в часть 1).*

При этом неоднородное уравнение (2.2.6) при любой правой части $f(z) \in \mathrm{H}_*^\alpha$ *имеет решение вида*

$$w(z)=\widetilde{w}_0(z)+e^{\lambda_1\bar{z}+d_1 z}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}T_\sigma^1(fe^{-\lambda_1\bar{z}-d_1 z})+$$

$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2\bar{z}+d_2 z}T_\sigma^2(fe^{-\lambda_2\bar{z}-d_2 z})\,.$$

Далее находится решение с заданными нулями и полюсами, (теоремы 2.2.11).

В третьем параграфе для уравнения с переменными коэффициентами

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w = f(z), \qquad (2.3.0)$$

когда коэффициенты $a(z), b(z) \in C_*^{1,\alpha}, C_*^{1,\alpha} = C_*^1 \cap H_*^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$ и $f(z) \in H_*^\alpha$, дается описание ядра и коядра оператора L в классе C_*^2 и $\tilde{C}_*^2$.

Сначала дается описание ядра оператора L, то есть уравнения

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w = 0. \qquad (2.3.1)$$

Определение. Два решения уравнения (2.3.1) $\varphi(z), \psi(z) \in C^2(\mathcal{D})$ называются фундаментальными в области $\mathcal{D}$, если их определитель Вронский

$$W[\varphi, \psi] = \varphi(z)\psi_{\bar{z}}(z) - \psi(z)\varphi_{\bar{z}}(z) \neq 0$$

всюду в области $\mathcal{D}$.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\varphi(z), \psi(z) \in C_*^2$- *система фундаментальных решений уравнения (2.3.1) и*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} a(z) d\Omega \in \Gamma, \qquad (2.3.2)$$

Ω −основной параллелограмм решётки Г, $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2;\ m_1, m_2 -$ целые$\}$. *Тогда всякое решение уравнения (2.3.1) из класса* C_*^2 *представимо в виде*

$$w(z) = c_1\varphi(z) + c_2\psi(z), \qquad (2.3.3)$$

где c_1, c_2 *−произвольные постоянные.*

Теорема 2.3.2. *Пусть* $\vartheta(z) \in C_*^2$ *ненулевое решение уравнения (2.3.1) и* $a_0 \,\overline{\in}\, \Gamma$. *Тогда всякое решение уравнения (2.3.1) представляется формулой*

$$w(z) = c\vartheta(z), \qquad (2.3.4)$$

где c *−произвольная постоянная.*

Теорема 2.3.3. *Пусть коэффициенты* $a(z), b(z) \in C_*^1$ *и связаны между собой соотношениями*

$$a(z) = -\frac{1}{c(z)} c_{\bar{z}}, b(z) = -c^2(z),$$

причем

$$c(z) \in C_*^1 \text{ и } c_0 = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} c(z) d\Omega.$$

Тогда уравнение (2.3.2) имеет систему фундаментальных решений

$$\vartheta_1 = exp\left(-T_\zeta c\right), \vartheta_2 = exp\left(T_\zeta c\right) T_\zeta\left(c e^{-2T_\zeta c}\right).$$

Теорема 2.3.1 и 2.3.2 допускают обобщения для решения (2.3.2) из класса $\tilde{C}_*^2$ с заданными полюсами.

Теорема 2.3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1 и* $a_0 \in \Gamma$. *Тогда для решения уравнения (2.3.2) из класса* $\tilde{C}_*^2$ *существуют эллиптические функции* $\varphi_1(z)$ *и* $\varphi_2(z)$ *такие, что решение (2.3.2) представимо в виде*

$$w(z) = \varphi_1(z)\vartheta_1(z) + \varphi_2(z)\vartheta_2(z).$$

Теорема 2.3.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2 и* $a_0 \overline{\in} \Gamma$. *Тогда любое решение уравнения (2.3.1) из класса* $\tilde{C}_*^2$ *представимо в виде*

$$w(z) = \varphi(z)\vartheta(z),$$

где $\varphi(z) -$ *эллиптическая функция, имеющая полюсы решения (2.3.1).*

Доказанные теоремы 2.3.1, 2.3.5. позволяют найти решения неоднородного уравнения и описать коядро задачи в классе C_*^2 и $\tilde{C}_*^2$.

Дадим описания коядра уравнения (2.3.0) в классе C_*^2 при наличии фундаментальных решений однородного уравнения (2.3.1).

Теорема 2.3.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1. Тогда для разрешимости уравнения (2.3.0) в классе* C_*^n *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{f(z)}{\psi_1(z)} \vartheta_1 d\Omega = 0, \qquad \iint\limits_{\Omega} \frac{f(z)}{\psi_1(z)} \vartheta_2 d\Omega = 0, \tag{2.3.5}$$

где $\psi_1(z) -$*вронскиан системы фундаментальных решений* $\vartheta_1(z), \vartheta_2(z)$ *однородного уравнения. При этом решения (2.3.0) представимы в виде*

$$w(z) = c_1\vartheta_1(z) + c_2\vartheta_2(z) - \vartheta_1 T_\zeta\left(\frac{f}{\psi_1}\vartheta_2\right) + \vartheta_2 T_\zeta\left(\frac{f}{\psi_1}\vartheta_1\right). \qquad (2.3.6)$$

Теорема 2.3.7. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2 и* $a_0 \overline{\in} \Gamma$ *Тогда для разрешимости уравнения (2.3.0) в классе* C_*^2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Omega} e^{-T_\zeta(\tilde{\vartheta})} T_\sigma\left(\frac{1}{\vartheta} f e^{T_\zeta\tilde{\vartheta}}\right) d\Omega = 0. \qquad (2.3.7)$$

где $\tilde{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}(2\vartheta_{\bar{z}} + a\vartheta)$, ϑ *−ненулевое решение однородного уравнения (2.3.1), и* $T_\sigma\rho$ *имеет вид*

$$T_\sigma\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \rho(t)\frac{\sigma(t-z-a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t-z)} d\Omega, \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} a(z) d\Omega.$$

При этом уравнение (2.3.0) имеет решение вида

$$w(z) = c\vartheta(z) + \vartheta T_\zeta\left[e^{-T_\zeta\tilde{\vartheta}} T_\sigma\left(\frac{1}{\vartheta} f e^{T_\zeta\tilde{\vartheta}}\right)\right], \qquad (2.3.8)$$

где c *−произвольная постоянная.*

В третьей главе работы исследуется поставленная задача для уравнения (1).

В первом параграфе этой главы дано описание многообразия решений однородного уравнения

$$Lw \equiv \partial_{\bar{z}}^n w + a_1\partial_{\bar{z}}^{n-1} w + \dots + a_n w = 0, \qquad (3.1.0)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ −постоянные.

В работах [5]-[7], [21]-[29] некоторые свойства полианалитических функций перенесены на решениях уравнения (3.1.0)

Решение уравнения (3.1.0) будем искать в классе $C^n(\Omega)$, $\Omega-$ некоторая область плоскости $\mathbb{C}$, $C^n(\Omega)$ −банаховое пространство функций, имеющие непрерывные частные производные (по x и y) до порядка n включительно.

Структура многообразия решения системы (3.1.0) зависит от свойства корней, так называемого характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{3.1.1}$$

Определение. Система n −решений уравнения (3.1.0) $\vartheta_1(z), \vartheta_2(z), \dots, \vartheta_n(z)$ называется фундаментальной, если определитель Вронского

$$W[\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n] = \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_n \\ \partial_{\bar z}\vartheta_1 & \partial_{\bar z}\vartheta_2 \dots & \partial_{\bar z}\vartheta_n \\ \partial^2_{\bar z}\vartheta_1 & \partial^2_{\bar z}\vartheta_2 \dots & \partial^2_{\bar z}\vartheta_n \\ -- & -- \; -- & -- \\ \partial^{n-1}_{\bar z}\vartheta_1 & \partial^{n-1}_{\bar z}\vartheta_2 \dots & \partial^{n-1}_{\bar z}\vartheta_n \end{vmatrix} \neq 0$$

всюду в некоторой области Ω плоскости $\mathbb{C}$.

Во втором параграфе дается описание многообразия решений уравнения (3.1.0) в классе C^n_*.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *−простые корни характеристического уравнения (3.1.1). Тогда всякое двоякопериодическое решение уравнения (3.1.0) с периодами* h_1, h_2, *представимо в виде*

$$\vartheta_j(z) = \Phi_1(z)e^{\lambda_1\bar z} + \Phi_2(z)e^{\lambda_2\bar z} + \cdots + \Phi_n(z)e^{\lambda_n\bar z}, \tag{3.2.1}$$

где $\Phi_j(z)$ *−эллиптические функции второго рода, удовлетворяющие условиям*

$$\Phi_j(z + h_k) = e^{-\lambda_j\bar h_k}\Phi_j(z), \quad k = 1,2; \quad j = 1,2 \dots n. \tag{3.2.2}$$

Это представление единственно.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma_1,\ 1 \le k \le n.$ *Тогда всякое регулярное решение уравнения (3.1.0) из класса* C^n_* *представимо в виде*

$$\vartheta(z) = c_1 e^{\lambda_1\bar z - \bar\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2\bar z - \bar\lambda_2 z} + \cdots + c_k e^{\lambda_k\bar z - \bar\lambda_k z}, \tag{3.2.3}$$

где $c_1, c_2, \dots, c_k$*-произвольные постоянные*

Теорема 3.2.3. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k,\ k \le n$ *и корни характеристического уравнения, среди них могут быть и кратные. Тогда для существования ненулевого решения уравнения (3.1.0) в классе регулярных двоякопериодических функций, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно значение* $\lambda_{j_0} \in \Gamma_1,\ j_0 \in [1, k]$, В третьем параграфе исследуются вопросы существования и нахождения двоякопериодических решений уравнения метааналитической функции [4], [6], [18], [19]

$$\partial_{\bar{z}}^{n} w + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} w + \cdots + a_{n-1} \partial_{\bar{z}} w + a_n w = 0, \tag{3.3.0}$$

с заданными полюсами, а также с заданными нулями и полюсами, как у эллиптических функций, то есть из класса $\tilde{C}_*^n$.

Пусть обобщенное двоякопериодическое решение уравнения (3.3.0) класса $\tilde{C}_*^n$ допускает полюсы $b_1, b_2, \ldots, b_r$ с кратностями $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$, и лежащие внутри основного параллелограмма Ω решѐтки

$$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2;\ m_1, m_2 - \text{целые число}\}.$$

Структура многообразия решений уравнения зависит от свойства корней характеристического уравнения (3.1.1).

Пусть, как прежде, $\Gamma_1 = \frac{\pi}{|\Omega|}\Gamma$, $|\Omega| = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1)$.

Теорема 3.3.1. *Пусть все различные корни уравнения (3.1.1)* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Gamma_1$. *Тогда, если существует эллиптическая функция* $\varphi(z)$ *с полюсами в точках* $b_1, b_2, \ldots, b_r$, *то есть*

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{z=b_k}{Res}\, \varphi(z) = 0, \tag{3.3.1}$$

то решение уравнения (3.3.0) класса $\tilde{C}_*^n$ *представляется в виде*

$$w(z) = \varphi(z) \sum_{k=1}^{n} c_k\, exp\big(\lambda_k \bar{z} - \bar{\lambda}_k z\big), \tag{3.3.2}$$

где c_k *−постоянные,* $\varphi(z)$ *имеет вид*

$$\varphi(z) = c + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\lambda_k} c_k^j\, \zeta^{(j-1)}(z - b_k), \tag{3.3.3}$$

c, c_n^j *−постоянные,* λ_k *−кратность полюса* b_k, *причем*

$$\sum_{k=1}^{r} c_k^1 = 0, \underset{z=b_k}{Res}\, \varphi(z) = c_k^1,$$

Теорема 3.3.2. *Пусть среди корней* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *хотя бы одно* $\lambda_j \,\overline{\in}\, \Gamma_1, 1 \le j \le m$. *Тогда уравнение (3.3.0) в классе* $\tilde{C}_*^n$ *всегда допускает решение с заданными полюсами.*

Причем: 1) при $\lambda_k - \lambda_j \,\overline{\in}\, \Gamma_1\, , k \ne j,\ k = 1,2, \dots, n$ *имеет решение вида*

$$w(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} F(z), \tag{3.3.5}$$

где $z_j^1 - z_j^0 = \frac{|\Omega|}{\pi} \lambda_j$, *постоянные величины* d_j *удовлетворяют системе уравнений*

$$\left. \begin{aligned} d_j h_1 + \left(z_j^1 - z_j^0\right)\eta_1 = -\lambda_j \bar{h}_1 \\ d_j h_2 + \left(z_j^1 - z_j^0\right)\eta_2 = -\lambda_j \bar{h}_2 \end{aligned} \right\}. \tag{3.3.6}$$

Эллиптическая функция $F(z)$ *имеет вид*

$$F(z) = c + d\zeta\left(z - z_j^0\right) + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta(z - b_k) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=2}^{\lambda_k} A_k^{(l-1)} \wp^{(l-2)}(z - b_k), \tag{3.3.7}$$

где постоянные $c, d, A_k, A_k^{(l-1)}$ − *связаны условиями*

$$d + \sum_{k=1}^{r} A_k = 0,$$

$$c + d\zeta\left(z_j^1 - z_j^0\right) + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta\left(z_j^1 - b_k\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=2}^{\lambda_k} A_k^{(l-1)} \wp^{(l-2)}\left(z_j^1 - b_k\right) = 0, \tag{3.3.8}$$

причем $z_j^1 - b_k \,\overline{\in}\, \Gamma,\ k = 1,2, \dots, r$;

2) при $\lambda_k - \lambda_j \in \Gamma_1,\ k \ne j,\ k = 1,2, \dots, n$ *имеется решение вида*

$$w(z)=\frac{\sigma\left(z-z_j^0\right)}{\sigma\left(z-z_j^1\right)}e^{d_jz+\lambda_j\bar{z}}F(z)\left(c_j+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}c_ke^{\tilde{\lambda}_k\bar{z}-\bar{\tilde{\lambda}}_kz}\right),$$

где c_k *—постоянные,* $\tilde{\lambda}_k=\lambda_k-\lambda_j$.

Теорема 3.3.3. *Пусть* N и P*, соответственно, число нулей и полюсов решения уравнения (3.3.0), лежащих внутри параллелограмма* Ω*. Тогда необходимо, чтобы* $N=P$.

Теорема 3.3.4. *Пусть* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ *– различные корни характеристического уравнения (3.1.1),* $b_1,b_2,\dots,b_r$ *—полюсы и* $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_r-$ *нули решения лежащие внутри параллелограмма* Ω *решѐтки*

$\Gamma=\{m_1h_1+m_2h_2;\ m_1,m_2-\text{целые}\}$. *Тогда для существования решения уравнения (3.3.0) необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из условий*

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k-\tilde{a}_k)\equiv-\frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j(mod\Gamma),\ \ j=1,2,..,n,$$

$$|\Omega|=mes\Omega=|h_1|^2Im(h_2/h_1). \tag{3.3.9}$$

В четвертом параграфе рассматриваются вопросы существования и нахождения двоякопериодических решений класса $\tilde{C}_*^n$ для неоднородного уравнения

$$Lw\equiv\partial_{\bar{z}}^nw+a_1\partial_{\bar{z}}^{n-1}w+\cdots+a_nw=f(z), \tag{3.4.0}$$

где $a_1,a_{,2},\dots,a_n$ —постоянные величины, $f(z)$ —заданная двоякопериодическая функция класса $H_*^\alpha,0<\alpha\leq1$.

Вид уравнения (3.4.0), как при $n=2$, позволяет свести нахождение обобщенных решений класса $\tilde{C}_*^n$ к нахождению регулярных решений класса C_*^n.

Лемма 3.4.1. *Пусть* $\varphi(z)-$ *эллиптическая функция с периодами* $h_1,h_2,Im(h_2/h_1)>0$*, имеющая полюсы решения уравнения (3.4.0). Тогда формула*

$$w(z) = \varphi(z)\, \vartheta(z), \tag{3.4.1}$$

дает обобщенное решение уравнения (3.4.0) из класса $\tilde{C}_*^n$, *если* $\vartheta(z)$ *является регулярным решением из класса* C_*^n *уравнения*

$$\partial_{\bar{z}}^n \vartheta + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} \vartheta + \cdots + a_{n-1} \vartheta = \frac{1}{\varphi(z)} f(z), \tag{3.4.2}$$

и наоборот.

1. Регулярные решения неоднородного уравнения из класса C_*^n.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – все простые собственные значения характеристического однородного уравнения (3.4.0). Имеет место

Теорема 3.4.1. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma_1$. $k \leq n$. *Тогда однородное уравнение (3.4.0) в классе* C_*^n *имеет* k *–линейно независимых решений*

$$exp\left(\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z\right), \;\; j = 1,2, \dots, k,$$

а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)\, exp\left(-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z\right) d\Omega = 0, \quad j = 1,2, \dots, k. \tag{3.4.3}$$

При этом все решения уравнения (3.4.0) выражаются формулой

$$w(z) = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z} \left(c_j + A_j T_\zeta^j \left(f e^{-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{n} e^{\lambda_j \bar{z} + d_j z}\, A_j T_\sigma^j \left(f e^{-\lambda_j \bar{z} - d_j z}\right), \tag{3.4.4}$$

где c_j *–произвольные постоянные, а постоянные* Δ_j *и* d_j *соответственно удовлетворяют уравнениям*

$$exp\left(d_j h_1 + \Delta_j \eta_1 + \lambda_j \bar{h}_1\right) = exp\left(d_j h_2 + \Delta_j \eta_2 + \lambda_j \bar{h}_2\right) = 1, j = k+1, \dots, n \tag{3.4.5}$$

здесь $\Delta_1 \equiv -\frac{\lambda_j}{\pi}|\Omega|$, $|\Omega| = mes\Omega$. $T_\zeta f, T_\sigma f$ *интегральные операторы (как в главе 2)*

$$T_\zeta^j f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(t)e^{-\lambda_j\bar{z}+\bar{\lambda}_j z}\,\zeta(t-z)d\Omega, \quad j = 1,2,\dots,k$$

$$T_\sigma^j f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(t)e^{-\lambda_j\bar{z}-d_j z}\,\frac{\sigma(t-z-\Delta_j)}{\sigma(-\Delta_j)\sigma(t-z)}d\Omega, j = k+1, k+2,\dots,n,$$

A_j *—постоянные зависящие от* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Теорема 3.4.2. *Пусть все собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \,\bar{\in}\, \Gamma_1$. *Тогда однородное уравнение (3.4.0) имеет лишь нулевое решение, а неоднородное уравнение при любой правой части* $f(z) \in H_*^\alpha$, *в классе* C_*^n, *имеет, притом единственное, решение вида*

$$w(z) = \sum_{j=1}^{n} e^{d_j z+\lambda_j\bar{z}}\,A_j T_\sigma^j\left(f e^{-\lambda_j\bar{z}-d_j z}\right), \qquad (3.4.6)$$

где постоянные d_j *— как в теореме 3.4.1 при* $\lambda_j \,\bar{\in}\, \Gamma_1$, *условие вида (3.4.6).*

Из теоремы 3.4.1 и 3.4.2 следует

Теорема 3.4.3. *Для однозначной обратимости оператора* $L: C_*^n \to H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, *необходимо и достаточно, чтобы все различные собственные значения характеристического полинома однородного уравнения (3.4.0)* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \,\bar{\in}\, \Gamma_1$.

2. Обобщенные решения неоднородного уравнения класса $\tilde{C}_*^n$

Будем искать обобщенные решения уравнения (3.4.0) из класса $\tilde{C}_*^n$, с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots,, b_r$, лежащие внутри основного параллелограмма Ω решѐтки Γ, соответственно с кратностями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$.

Из леммы 3.4.0 и теоремы 3.4.1 следует

Теорема 3.4.4. *Пусть все простые собственные значения характеристического полинома однородного уравнения (3.4.0)* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Gamma_1$. *Пусть* $\varphi(z)$ *—эллиптическая функция, имеющая все полюсы решения, с их кратностями и имеющая периоды* h_1, h_2 *и*

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=b_k}{Res}\, \varphi(z) = 0. \qquad (3.4.7)$$

Тогда для разрешимости уравнения (3.4.0) в классе $\tilde{C}_*^n$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\varphi(z)} f(z)\, exp\big(-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z\big) d\Omega = 0, \quad j = 1,2, \dots, n\,. \qquad (3.4.8)$$

При этом решение уравнения (3.4.0) представляется формулой

$$w(z) = \varphi(z) \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z} \left(c_j + T_\zeta f_j\right), \qquad (3.4.9)$$

где c_j *−произвольные постоянные,*

$$f_j(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} exp\big(-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z\big).$$

Теорема 3.4.5. *Пусть среди собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ хотя бы одно значение $\lambda_j \,\bar{\in}\, \Gamma_1$, тогда однородное уравнение (3.4.0) всегда имеет решение с заданными полюсами.*

При этом

1) *если все $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \,\bar{\in}\, \Gamma_1$, то однородное уравнение имеет решение, а неоднородное уравнение всегда разрешимо;*
2) *если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma$, $k \neq j, k < n$, то однородное уравнение имеет $k+1$ решений, а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\iint_{\Omega} f(z)\, e^{-\lambda_k \bar{z} + \bar{\lambda}_k z} d\Omega = 0, \qquad i = 1,2, \dots, k.$$

Теорема 3.4.6. *Пусть $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ −нули и $b_1, b_2, \dots, b_r$ − полюсы решения (3.4.0) связаны с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ хотя бы одним условием*

$$\sum_{k=1}^{r} (b_k - \tilde{a}_k) \equiv \frac{|\Omega|}{\pi} \lambda_j (mod \Gamma), \qquad j - \textit{фиксировано}, \qquad 1 \leq j \leq n\,.$$

Пусть $\psi(z)$ −эллиптическая функция второго рода, имеющая нули и полюсы решения уравнения (3.4.0), удовлетворяющая условию

$$\psi(z+h_k)=e^{-\lambda_j\bar{h}_k}\psi(z), \qquad k=1,2. \tag{3.4.11}$$

Тогда при $\lambda_k-\lambda_j\in\Gamma_1,\ k\neq j,\ k=1,2,\dots,l,\ l<n,$ *однородное уравнение (3.4.0) имеет* $l+1-$ *решений, а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнение* $l+1$ *условий*

$$\iint_{\Omega}\frac{1}{\psi(z)}f(z)\,e^{-\lambda_j\bar{z}}d\Omega=0, \tag{3.4.12}$$

$$\iint_{\Omega}\frac{1}{\psi(z)}f(z)\,e^{-\lambda_k\bar{z}+\bar{\lambda}_k z}d\Omega=0, \qquad k=1,2,\dots,l,k\neq j.$$

При этом уравнение (3.4.0) имеет решение вида

$$w(z)=\psi(z)\left[\left(c_je^{\lambda_j\bar{z}}+A_je^{\lambda_j\bar{z}}T_\zeta f_j\right)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l}e^{\lambda_j\bar{z}-\bar{\lambda}_i z}\left(c_i+A_iT_\zeta^jf_i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{i=l+1\\ i\neq j}}^{n}A_i\,e^{d_iz}T_\sigma^jf_i\right], \tag{3.4.13}$$

где c_k *−постоянные величины,* A_k *−постоянные, зависящие от* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, *а* $T_\zeta f_i,\ T_\sigma f_i$,*- как в теоремах 3.4.1 и 3.4.2*

$$f_j(z)=\frac{1}{\psi(z)}f(z)e^{-\lambda_j\bar{z}},\ \text{при}\ i\neq j,$$

$$f_k(z)=\frac{1}{\psi(z)}f(z)e^{-\lambda_k\bar{z}+\bar{\lambda}_kz},\ \ k=1,2,\dots,n,\ \ k\neq j$$

Глава 1. Некоторые сведение из теории эллиптических функций. Двоякопериодические решения неоднородного уравнения Коши – Римана

В первой главе работы в § 1.1–1.2 приведены некоторые сведения из теории эллиптических функций (свойства, общие теоремы), которые используются в дальнейшем исследовании. Также приведены формулы, выражающие эллиптические функции второго рода и квазиэллиптические функции через функции Вейерштрасса $\zeta(z)$,$\sigma(z)$, $\wp(z)$, построенные на периодах h_1, h_2.

В §1.3 приведена формулы двоякопериодических решений неоднородного уравнения Коши – Римана в классе регулярных функций C_*^1. Далее с помощью этой формулы найдены двоякопериодические решения неоднородного уравнения Бицадзе [7], [10], [19], [70]

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f(z)$$

в классе регулярных функций C_*^2, (то есть без особых точек).

1.1. Некоторые сведения и основные формулы и теоремы из теории эллиптических функций.

Пусть функция $f(z)$ определена на комплексной плоскости. Если для всех z имеет место $f(z+h) = f(z)$, то число h называется периодом функции $f(z)$. Множество всех периодов мероморфной функции образует дискретную абелевую группу по сложению. Она называется группой (или модулем) периодов. В силу теоремы Абеля [25] все элементы этого множества являются целыми кратными одного периода h_1 или суммой целых кратных двух периодов h_1 и h_2 , для которых $\mathrm{Im}(h_2/h_1) > 0.$ В первом случае функция $f(z)$ называется просто периодической, а во втором случае называется двоякопериодической. Примерами просто периодических функций являются элементарные функции $\sin z, \cos z,$ $tg\, z, ctg\, z,$ а также $e^{(2\pi i/\omega z).}$ Элементарные мероморфные двоякопериодические функции $f(z)$, через которые выражается любой период $h = m_1h_1 + m_2h_2, (m_1, m_2$ целые числа), называются основными периодами функции $f(z)$. Не существует аналитической функции одного комплексного переменного, отличной от константы, имеющей более двух основных периодов. Точки вида

$$\Gamma = \{z_0 + m_1h_1 + m_2h_2,\ \ m_1, m_2 - \text{целые} \}, \qquad \mathrm{Im}(h_2/h_1) \neq 0,$$

z_0 −произвольная точка плоскости $\mathbb{C}$ образуют на плоскости параллелограммы периодов. Точки z_1, z_2, для которых $z_1 - z_2 = m_1 h_1 + m_2 h_2$, записываются символом $z_1 \equiv z_2 mod(h_1, h_2)$, то есть z_1 и z_2, сравнимые по модулю (h_1, h_2), называются конгруэнтными. В конгруэнтных точках двоякопериодическая функция $f(z)$ принимает одно и то же значение. Поэтому достаточно изучить поведение $f(z)$ в каком-нибудь параллелограмме периодов. Обычно в качестве такого параллелограмма принимается множество точек $\Omega = \{z: z = z_0 + t_1 h_1 + t_2 h_2,\ 0 \leq t_1 < 1,\ 0 \leq t_2 < 1\}$. Этому соответствует $\mathrm{I}m(h_2/h_1) > 0$. Тогда произвольная точка плоскости ₵ будет конгруэнтна одной, и только одной, точке параллелограмма Ω. Это означает, что система параллелограммов периодов покрывает всю плоскость один раз.

Определение. *Мероморфная функция называется эллиптической, если она имеет периоды* h_1 и h_2, *отношение которых* $Im(h_2/h_1) \neq 0$.

Предположим, что числа h_1 и h_2 заданы, и рассмотрим множество K всех эллиптических функций с периодами h_1 и h_2, $\mathrm{I}m(h_2/h_1) \neq 0$. Множество K имеет следующие свойства, [15]

1). Любая постоянная принадлежит множеству K.

2). Если $f_1(z) \epsilon\ K$ и $f_2(z) \epsilon K$, то $f_1(z) + f_2(z) \epsilon K$, $f_1(z) -$

$-f_2(z) \epsilon\ K$, $f_1(z) \cdot f_2(z) \in \neq K$, $\frac{f_1(z)}{f_{2(z)}} \epsilon\, K$, то есть множество K образует поле функций $(f_2(z) \not\equiv 0)$.

3). Произвольная рациональная функция от функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$, $f_j(z) \in K$, $j = 1,2, \dots, n$ также принадлежит полю K, (если знаменатель отличен от тождественного нуля).

4). Если $f(z) \epsilon K$, то $f'(z) \epsilon$ K.

5). Пусть точка a −полюс функции $f(z) \in K$, и главная часть $f(z)$ в этом полюсе равна $g\left(\frac{1}{z-a}\right)$. Тогда любая конгруэнтная с точкой a точка a', (то есть такая, что $a' \equiv a mod(h_1, h_2)$), также является полюсом функции $f(z)$ с главной частью $g\left(\frac{1}{z-a'}\right)$ в полюсе a'.

Пусть $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$ −полюсы функции $f(z)$ в параллелограмме периодов Ω, (каждая точка $\tilde{a}_k$ пишется столько раз, какова ее кратность). Число $r = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$, где n_k является кратностью полюса $\tilde{a}_k$, называется порядком функции $f(z)$. Система точек $[\tilde{a}_1], [\tilde{a}_2], \dots, [\tilde{a}_r]$ образует в совокупности множество всех полюсов функции $f(z)$. Если из каждой системы $[\tilde{a}_k]$ выбрать по одному числу a'_k, то r чисел $a'_1, a'_2, \dots, a'_r$ называются полной системой полюсов функции $f(z)$.

Приведем ряд общих теорем, на которые будем часто опираться в дальнейшем. Доказательство этих теорем можно найти в [1], [15], [25], [47].

Теорема 1.1.1. *Функция $f(z) \in K$ порядка $r = 0$ постоянна.*

Теорема 1.1.2. *Сумма вычетов $f(z) \epsilon K$ по всем полюсам, лежащая в параллелограмме периодов, равна нулю.*

Теорема 1.1.3. Не *существует функции $f(z) \epsilon K$ порядка $r = 1$.*

Теорема 1.1.4. *Пусть функция $f(z) \epsilon K$ имеет порядок $r \geq 2$, и пусть $b_1, b_2, \dots, b_r$ −полюсы функции $f(z)$, а $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ −нули этой функции (с учетом их кратности), расположенные в параллелограмме периодов Ω. Тогда имеет место равенство*

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_r \equiv (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \cdots + \tilde{a}_r) mod (h_1, h_2).$$

Теорема 1.1.5. *Все эллиптические функции $f(z) \epsilon K$ имеют две образующие. В качестве этих образующих можно взять функции Вейерштрасса $\wp(z)$ и $\wp'(z)$.*

1.Пе-функция ($\wp$-функции) Вейерштрасса $\wp(z)$($\wp$ −знак Вейерштрасса) для заданных основных периодов h_1, h_2, $\mathrm{Im}(h_2/h_1) > 0$ определяется рядом [1], [25], [30], [47]

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{h \neq 0}{}' \left(\frac{1}{(z-h)^2} - \frac{1}{h^2} \right), \qquad (1.1.1)$$

где штрих означает, что суммирование распространено на периодах $h \neq 0$, $h = m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1 m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Функция $\wp(z)$ является четной эллиптической функцией порядка

$r=2,$ имеющей в каждом параллелограмме периодов единственный полюс второго порядка с нулевым вычетом, (если $0 \in \Omega$). Ее производная $\wp'(z)$ – нечетная эллиптическая функция, и

$$\wp'(z) = -2\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-m_1h_1-m_2h_2)^3},$$

с периодами h_1,h_2, причем $\wp'\left(\frac{1}{2}h_1\right)=\wp'\left(\frac{1}{2}(h_1+h_2)\right)=\wp'\left(\frac{1}{2}h_2\right)=0.$

Если c – конечное число, то уравнение $\wp(z)-c=0$ будет иметь двойные корни в том и только в том случае, когда c совпадает с одним из чисел e_1,e_2,e_3, где $e_1=\wp\left(\frac{h_1}{2}\right)$, $e_1=\wp\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)$, $e_1=\wp\left(\frac{h_2}{2}\right)$, причем значения $e_{1,}e_2,e_3$ попарно различны.

Разложение $\wp(z)$ в окрестности точки $z=0$ имеет вид:

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^{2n-2},\ \ c_n=(2n-1)\sum_{h\neq 0}{}' \ \frac{1}{h^{2n}}. \qquad (1.1.2)$$

Здесь c_1,c_2,c_3 – многочлены от g_2,g_3 с положительными коэффициентами,

$$g_2=20c_2=60\sum_{h\neq 0}{}' \ \frac{1}{h^4},\ \ g_3=28c_3=140\sum_{h\neq 0}{}' \ \frac{1}{h^6}. \qquad (1.1.3)$$

Функция $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3\,. \qquad (1.1.4)$$

Числа g_1и g_2 принято называть инвариантами функции $\wp(z)$, [1], [15], [25], [47]. Числа e_1,e_2,e_3 являются корнями кубического уравнения

$$4u^3-g_2u-g_3=0. \qquad (1.1.5)$$

Величина

$$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2$$

называется дискриминантом (1.1.5). Так как $e_i-e_j\neq 0,\quad i\neq j,$ то $\Delta\neq 0.$

2. Дзэта - функция Вейерштрасса определяется формулой [1], [15], [25]

$$\zeta'(z) = -\wp(z) \tag{1.1.6}$$

и имеет вид

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{h\neq 0}{}' \left(\frac{1}{z-h} + \frac{1}{h} + \frac{z}{h^2}\right). \tag{1.1.7}$$

Функция $\zeta(z)$ имеет один простой полюс в точке $z = 0$. Разложение $\zeta(z)$ в окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n \frac{z^{2n-1}}{2n-1}, \tag{1.1.8}$$

где числа c_1, c_2, c_3 определены с помощью формул (1.1.2) и (1.1.3).

Функция $\zeta(z)$ – нечетная, то есть $\zeta(-z) = -\zeta(z)$, и является квазипериодической

$$\zeta(z + m_1 h_1 + m_2 h_2) = \zeta(z) + m_1\eta_1 + m_2\eta_2, \tag{1.1.9}$$

где m_1, m_2 −целые числа, $\eta_i = 2\zeta(h_i/2), i = 1,2$.

Теорема 1.1.7. *Величины* η_1, η_2, h_1, h_2 *связаны между собой соотношением Лежандра*

$$\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i. \tag{1.1.10}$$

Для функции $\zeta(z)$ имеет место формула

$$\zeta(z_1 + z_2) = \zeta(z_1) + \zeta(z_2) + \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{2[\wp(z_1) - \wp(z_2)]},$$

которая носит название теоремы сложения для функции $\zeta(z)$.

Теорема 1.1.8. *Произвольная эллиптическая функция* $f(z) \in K$ *с периодами* h_1, h_2 *может быть представлена в виде*

$$f(z) = c + \sum_a \left\{A\zeta(z-a) + A^1\wp(z-a) + \cdots + A^{(k-1)}\wp^{(k-2)}(z-a)\right\}, \tag{1.1.11}$$

где сумма распространяется по всем различным полюсам функции $f(z)$,

$c -$ *произвольная постоянная.*

Постоянные $A, A^1, \dots, A^{(k-1)}$, отвечающие полюсу $z = a$, получаются из главной части функции $f(z)$ в этом полюсе, записанной в виде

$$\frac{A}{z-a} - \frac{A^1}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,A^{(k-1)}}{(z-a)^k}.$$

3. Сигма – функция Вейерштрасса - $\sigma(z)$ определяется из равенства

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$$

и имеет вид

$$\sigma(z) = \prod_{h\neq 0}\left\{\left(1-\frac{z}{h}\right) exp\left(\frac{z}{h}+\frac{z^2}{2h^2}\right)\right\}. \qquad (1.1.12)$$

Разложение целой функции $\sigma(z)$ в ряд по степеням z имеет вид

$$\sigma(z) = z + k_2 z^5 + k_3 z^7 + \cdots,$$

где $k_2, k_3, k_4, \dots$, являются многочленами от величин g_1 и g_2, причем коэффициенты этих многочленов - рациональные числа,

$$k_2 = -\frac{1}{240} g_2, \qquad k_3 = -\frac{1}{840} g_3 \dots .$$

Функция $\sigma(z)$ является нечетной и

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z} = 1. \qquad (1.1.13)$$

Имеет место равенство

$$\sigma(z+h) = \varepsilon\sigma(z) exp\left\{\eta\left(z+\frac{h}{2}\right)\right\}. \qquad (1.1.14)$$

Здесь $h = m_1 h_1 + m_2 h_2$, $\eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$; $\varepsilon = 1$, если $h/2 -$период, в противном случае $\epsilon = -1$. В частности, из формулы (1.1.14) следует

$$\left.\begin{aligned}\sigma(z+h_1)=\sigma(z)\exp\left\{\eta_1\left(z+\frac{h_1}{2}\right)\right\}\\ \sigma(z+h_2)=\sigma(z)\exp\left\{\eta_2\left(z+\frac{h_2}{2}\right)\right\}\end{aligned}\right\}.$$

В свою очередь, из этих формул для отношения

$$\varphi(z)=\frac{\sigma(z-a)}{\sigma(z-b)},$$

где a и b −произвольные постоянные и $(b-a)$ не является периодом, получим равенство

$$\varphi(z+h)=\varphi(z)e^{\eta(b-a)}. \tag{1.1.15}$$

Пусть теперь $f(z)-$ произвольная эллиптическая функция порядка r с периодами h_1 и h_2; $b_1, b_{2,} \dots, b_r$ −полная система полюсов, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ −полная система нулей этой функции. Тогда в силу теоремы 1.1.4. (Абеля, Лиувилля) [1], [15], [25], [47]

$$b_1+b_2+\cdots+b_r=\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\cdots+\tilde{a}_r\big(mod(h_1,h_2)\big)$$

или можно считать, что

$$b_1+b_2+\cdots+b_r=\tilde{a}+\tilde{a}_2+\cdots+\tilde{a}_r. \tag{1.1.16}$$

Например, можно взять $\tilde{a}=\tilde{a}_1 mod(h_1,h_2)$. Тогда имеет место

Теорема 1.1.9. *Любую эллиптическую функцию $f(z)\,\epsilon\,\mathcal{K}$ с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$ и нулями $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ в основном параллелограмме периодов можно представить в виде*

$$f(z)=c\,\frac{\sigma(z-\tilde{a})\sigma(z-\tilde{a}_2)\dots\sigma(z-\tilde{a}_r)}{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)\dots\sigma(z-b_r)},$$

где c – произвольная постоянная.

1.2. Эллиптические функции второго рода. Квазиэллиптические функции

Определения 1.2.1. Мероморфная функции $f(z)$ называется эллиптической функцией второго рода с периодами h_1, h_2, если

$$f(z+h_1)=\mu_1 f(z),\ f(z+h_2)=\mu_2 f(z), \qquad (1.2.20)$$

где $\mu_1, \mu_2 -$ постоянные, $Im\left(\frac{h_2}{h_1}\right) \neq 0, [1], [47]$.

Функции, удовлетворяющие условию (1.2.20), называются двоякопериодическими функциями второго рода h_1, h_2, при $Im(h_2 / h_1) \neq 0$, когда $\mu_1 \neq 1$ и $\mu_2 \neq 1$, а в случае $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1$ называются двоякопериодическими функциями первого рода, (то есть двоякопериодическими в обычном понимании) и соответственно мероморфные функции – эллиптическими функциями первого рода.

При изучении двоякопериодических обобщенных аналитических функций встречаются мероморфные функции, удовлетворяющие условиям [53]-[56]

$$\varphi(z+h_1)=e^{\eta_1 D}\varphi(z),\ \varphi(z+h_2)=e^{\eta_2 D}\varphi(z), \qquad (1.2.21)$$

где $m_1, m_2 -$целые числа, $\eta_1, \eta_2 -$ циклические постоянные дзета-функции, D – некоторое число. Если в (1.2.20) положить $\mu_1 = \exp(\eta_1 D)$, $\mu_2 = = \exp(\eta_2 D)$, то в силу соотношения Лежандра будем иметь $D = \frac{1}{2\pi i}[h_2 \ln \mu_1 - h_1 \ln \mu_2]$. При таком выборе числа D, условия разрешимости и формулы представления решений функциональных уравнений (1.2.20) и (1.2.21) ничем не отличаются.

Класс функций, удовлетворяющих условию (1.2.20) или (1.2.21), допускающих в $r -$внутренних точках основного параллелограмма Ω полюсы, как у аналитических функций, и принадлежащих классу $C^1(\Omega_0)$, $\Omega_0 -$любая подобласть области Ω, не содержащая полюсов, обозначается через M_r^D; число r называется порядком функций класса M_r^D. Мероморфные функции класса M_r^D при $D = 0$ являются эллиптическими функциями первого рода, а при $D \neq 0 -$эллиптическими функциями второго рода.

Отношение $\varphi'(z) / \varphi(z)$ является эллиптической функцией. Поэтому из свойств эллиптических функций непосредственно получается

Теорема 1.2.1. *Пусть* N и $P-$ *суммарное число нулей и полюсов эллиптической функции второго рода внутри параллелограмма* Ω. *Тогда для существования таких функций, необходимо* $N = P$.

Доказательство этой теоремы приведено в [1], [15], [47].

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ – *нули и* $b_1, b_2, \dots, b_r$ – *полюсы эллиптической функции второго рода, с учетом их кратности, удовлетворяющие условию (1.2.21). Тогда для существования таких функций необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}} (\mathrm{b_k} - \tilde{a}_\mathrm{k}) \equiv \mathrm{Dmod}(\mathrm{h_1}, \mathrm{h_2}) , \tag{1.2.22}$$

и все они при $D \epsilon \Gamma,\ r \geq 2$ *представлялись в виде*

$$\varphi(z) = c\,\frac{\sigma(z-\tilde{a})\sigma(z-\tilde{a}_2)\dots\sigma(z-\tilde{a}_r)}{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)\dots\sigma(z-b_r)},$$

где $\tilde{a} = D + mh_1 + nh_2$, m, n *−некоторые целые числа,* $\Gamma = \{m_1 h_1 +$ $+ m_2 h_2,\ \ m_1, m_2 -$ целые числа$\},\ Im(h_2/h_1) > 0$. (см. [56], [72])

Пусть теперь эллиптическая функция второго рода $\varphi(z)$ класса M_r^D, $r \geq 1$ допускает только полюсы в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$ (с учетом их кратности).

Теорема 1.2.3. *Пусть* $D \notin \Gamma$. *Тогда существует эллиптическая функция второго рода с заданными полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$, *которая представима в виде*

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z-z_1)} F(z),$$

где $z_0 - z_1 = D$, *а эллиптическая функция* $F(z)$ *имеет вид*

$$F(z) = c + d\zeta(z - z_0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \left[A_k \zeta(z - b_k) + \sum_{l \geq 2} A_k^{(l-1)} \wp^{(l-2)}(z - b_k) \right], \tag{1.2.23}$$

где постоянные величины c, d, $A_k, A_k^{(1-1)}$ *подчинены условиям*

$$d+\sum_{k=1}^{r}A_k=0, \tag{1.2.24}$$

$$c+d\zeta(z_1-z_0)+\sum_{k=1}^{r}A_k\zeta(z_1-b_k)+\sum_{k.l\geq 2}A_k^{(l-1)}\wp^{(l-2)}(z_1-b_k)=0, \tag{1.2.25}$$

причем $z_1-b_k\,\overline{\in}\,\Gamma,\ \ k=\overline{1,r}$.

Доказательство приведено в [39], [56].

Эта теорема показывает, что порядок эллиптической функции первого рода не совпадает с порядком эллиптической функции второго рода. При $D\notin\Gamma$ обобщенные эллиптические функции всегда существуют, и их порядок $r\geq 1$.

Пусть теперь $D\in\Gamma$. Тогда всегда можно найти постоянную b такую, что $exp[bh_1+\eta_1 D]=1,\ \ exp[bh_2+\eta_2 D]=1$. Для этого при $D\in\Gamma$ и m,n − целых числах, нужно решить систему

$$bh_1+\eta_1 D=2\pi im\,, bh_2+\eta_2 D=2\pi in, \tag{1.2.26}$$

которая благодаря соотношению Лежандра, всегда имеет решение. Тогда функция

$$\psi(z)=e^{bz}\varphi(z) \tag{1.2.27}$$

является эллиптической функцией порядка r; и в силу теоремы 1.2.8

$$\psi(z)=c+\sum_{k=1}^{r}\left[\tilde{A}_k\zeta(z-b_k)+\sum_{l\geq 2}\tilde{A}_k^{(l-1)}\wp^{(l-2)}(z-b_k)\right], \tag{1.2.28}$$

и условия

$$\sum_{k=1}^{r}\tilde{A}_k=0,\ \ \tilde{A}_k=e^{bb_k}A_k\,, \tag{1.2.29}$$

являются необходимым и достаточным условиями её существования. Тогда справедлива следующая [56]

Теорема 1.2.4. *Пусть* $D\in\Gamma$, *и эллиптическая функция второго рода имеет полюсы в точках* $b_1,b_2,\ldots,b_r$. *Тогда условие* (1.2.29) *является* *необходимым и достаточным для существования таких функций, и все они представимы в виде*

$$\varphi(z) = e^{-bz}\psi(z), \tag{1.2.30}$$

где $\psi(z)$ *определяется формулой* (1.2.28), *c – произвольная постоянная, постоянное b определяется из системы (1.2.26).*

Из теоремы 1.2.3 и 1.2.4 следует

Следствие 1.2.1. *Любая эллиптическая функция второго рода, порядка* $r = 0$, *удовлетворяющая условию* (1.2.21), *представима в виде*

$$\varphi(z) = \begin{cases} \mathrm{c}e^{-bz}, \text{если } D \in \Gamma, \\ 0, \quad \text{если } D \bar{\in} \Gamma, \end{cases} \tag{1.2.30'}$$

где c – произвольная постоянная, число b *- то же самое, что и в теореме* 1.2.4.

Следствие 1.2.2. *При* $D \bar{\in} \Gamma$ *порядок эллиптической функции второго рода класса* M_r^D *не менее единицы* $(r \geq 1)$, *а при* $D \in \Gamma -$ *не менее, чем два* $(r \geq 2)$.

Определение 1.2.2. *Мероморфная функция* $\Phi(z)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\Phi(z + h_1) = \Phi(z) + A,\ \Phi(z + h_2) = \Phi(z) + B, \tag{1.2.31}$$

называется квазиэллиптической функцией с периодами h_1, h_2, $Im(h_2 / h_1) \neq 0$, $A, B -$ *некоторые числа.*

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_r$ −полюсы квазиэллиптической функции $\Phi(z)$ лежащие внутри параллелограмма периодов Ω с учетом их кратности. Число r называется порядком функции $\Phi(z)$. Имеет место [16], [55], [56].

Теорема 1.2.5. *Для существования квазиэллиптической функции с заданными полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{z=b_k}{res}\, \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}[Ah_2 - Bh_1]. \tag{1.2.32}$$

При этом

$$\Phi(z) = c + az + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta(z - b_k) + \sum_{k,j\geq 2} A_k^{(j-1)} \wp^{(j-2)}(z - b_k), \qquad (1.2.33)$$

где c—произвольная постоянная; постоянные a и $A_0 = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$ *являются решением системы*

$$ah_1 + \eta_1 A_0 = A,\ ah_2 + \eta_2 A_0 = B, \qquad (1.2.34)$$

которая в силу соотношения Лежандра имеет единственное решение, причем постоянные A_k, $A_k^{(j-1)}$ *определяются из главной части функции* $\Phi(z)$ *в полюсах* b_k.

Следствие 1.2.3. *Пусть квазипериодическая функция с полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *удовлетворяет условиям*

$$\Phi(z + h_1) = \Phi(z) + \eta_1 \tilde{A},\ \Phi(z + h_2) = \Phi(z) + \eta_2 \tilde{A},$$

где η_1, η_2 *— циклические постоянные,* $\tilde{A}$ *—некоторая постоянная. Тогда для существования таких функций необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{r} A_k = \tilde{A}, \quad A_k = \operatorname*{Res}_{z=b_k} \Phi(z),$$

и все они представимы в виде

$$\Phi_1(z) = c + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta(z - b_k) + \sum_{k,l\geq 2} A_k^{(l-1)} \wp^{(l-2)}(z - b_k), \qquad (1.2.35)$$

где c – произвольная постоянная; постоянные A_k, $A_k^{(j-1)}$ *определяются из главной части функции* $\Phi(z)$ *в полюсах* b_k.

1.3. Двоякопериодическое решение неоднородного уравнения Коши – Римана и некоторые его применения

1. Аналог формулы Бореля-Помпею для двоякопериодических функций класса C_*^1 получен в работе [50], [56] с помощью эллиптической функции Вейерштрасса $\zeta(z)$, построенной на периодах рассматриваемых функций. Если $\varphi(z) \in C_*^1$, то справедлива формула

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\eta_1\int\limits_0^{h_2}\varphi(\tau)d\tau-\eta_2\int\limits_0^{h_1}\varphi(\tau)d\tau\right]-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial\bar{\tau}}\zeta(\tau-z)d_\tau\Omega, \qquad (1.3.1)$$

где η_1,η_2 —циклические постоянные: $\eta_j=2\zeta(h_j\,/\,2),\ j=1,2$, вместе с h_1,h_2 удовлетворяют соотношению Лежандра [1], [15]

$$\eta_1 h_2-\eta_2 h_1=2\pi i. \qquad (1.3.2)$$

Очевидно, что соотношение Лежандра вытекает из формулы (1.3.1), если $\varphi(z)\equiv const$.

Если $\varphi(z)\in C_*^1$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}=0$, то в силу теоремы Лиувилля $\varphi(z)\equiv const$, [11].

Свойства двойного интеграла (типа потенциала)

$$g(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\rho(t)\zeta(t-z)d\Omega=T_\zeta\rho$$

изучены в [50]-[56]. Показано, что интегральный оператор при $\rho\in H_*^\alpha,\ 0<\alpha\le 1$ имеет дифференциальные и интегральные свойства интегрального оператора Векуа [12],

$$T_\Omega f=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}f(t)\frac{d\Omega}{t-z}.$$

1. Если $\rho\in H_*^\alpha$ и $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\rho(z)d\Omega=0$, то $g(z)\in C_*^{1+\alpha}$, $C_*^{1+\alpha}=C_*^1\cap H_*^\alpha$,

$$\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}=\rho(z),\ \ \frac{\partial g}{\partial z}=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\rho(t)\wp(t-z)d\Omega=S_\zeta\rho,$$

где $\wp(z)$ —пе - функция Вейерштрасса и $S_\zeta\rho$ —сингулярный интеграл, который существует в смысле главного значения Коши – Римана и

$$S_\zeta\colon H_*^\alpha\to H_*^\alpha,\qquad 0<\alpha\le 1.$$

На основе формулы (1.3.1) исследована задачи существования и нахождения двоякопериодических решений класса C_*^1 для неоднородного уравнения Коши – Римана

$$\psi_{\bar{z}} = \chi(z), \tag{1.3.3}$$

где $\chi(z)$ —заданная функция класса H_*^α, $0 < \alpha \leq 1$.

Имеет место [39], [50].

Теорема 1.3.1. *Для разрешимости уравнения (1.3.3) в классе* C_*^1 *необходимо и достаточно чтобы*

$$\iint_\Omega \chi(z) d\Omega = 0. \tag{1.3.4}$$

При этом все решения (1.3.3) представимы в виде

$$\psi(z) = c + T_\zeta \chi = c - \frac{1}{\pi} \iint_\Omega \chi(t)\zeta(t-z) d\Omega, \tag{1.3.5}$$

где c *—некоторая постоянная.*

2. Двоякопериодические решения неоднородного уравнения Бицадзе.

Исследуем задачи существования и нахождения двоякопериодических решений с периодами $h_1, h_2, Im(h_2/h_1) \neq 0$ для уравнения [70]

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f(z), \tag{1.3.6}$$

где $z = x + iy$, $4w_{\bar{z}\bar{z}} = w_{xx} - w_{yy} + 2iw_{xy}$ — дифференциальный оператор Бицадзе [9], $f(z)$ —заданная двоякопериодическая функция с периодами h_1, h_2 и $f(z) \in H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

Будем искать решения (1.3.6) из класса C_*^2, то есть двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2 и регулярные в Ω решения.

Теорема 1.3.2. *Для разрешимости уравнения (1.3.6) в классе* C_*^2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint_\Omega f(z) d\Omega = 0. \tag{1.3.7}$$

При этом все решения (1.3.6) из класса C_*^2 *представимы в виде*

$$w(z) = c + A(f)z + B(f)\bar{z} + T_\zeta(T_\zeta f), \tag{1.3.8}$$

где с- произвольная постоянная, постоянные A,B имеют вид

$$A = \frac{1}{2i\Omega_0}\left(\eta_1\bar{h}_2 - \eta_2\bar{h}_1\right)T_\zeta^0 f, \quad B = -\frac{\pi}{\Omega_0}T_\zeta^0 f,$$

$$\Omega_0 = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1), \quad T_\zeta^0 f = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(t)\zeta(t-z)d_t\Omega\right\}d_z\Omega\,.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $w(z) \in C_*^2$ решения (1.3.6) и $f(z) \in H_*^\alpha, \ \ 0 < \alpha \le 1$. Тогда в силу формулы Грина имеем

$$\iint\limits_{\Omega} w_{\bar{z}\bar{z}}d\Omega = \int_0^{h_2}[w_z(z+h_1) - w_{\bar{z}}(z)]dz - \int_0^{h_1}[w_{\bar{z}}(z+h_2) - w_{\bar{z}}(z)]dz = 0.$$

Подставляя в левой части подынтегральную функцию $f(z)$, получим условия (1.3.7).

Докажем достаточность – условие (1.3.7). Пусть выполнено условие (1.3.7).

Один раз интегрируя (1.3.6) согласно формулы (1.3.5) получим

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = c_1 - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(t)\zeta(t-z)d_t\Omega = c_1 + T_\zeta f, \tag{1.3.9}$$

где c_1 – произвольная постоянная. Функция $g(z) = \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ является решением уравнения

$$g_{\bar{z}} = f(z), \tag{1.3.10}$$

в классе C_*^1.

В самом деле, при $f(z) \in H_*^\alpha, \ \ 0 < \alpha \le 1$ и выполнении условия (1.3.7) функция

$$g_1(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(z)\zeta(t-z)\,d\Omega \equiv T_\zeta f \in C_*^1,$$

а в силу свойства интеграла $T_\zeta f$, разность $g(z) - g_1(z)$ удовлетворяет уравнению Коши – Римана

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big(g(z) - g_1(z)\big) = 0$$

и является ограниченной на всей плоскости. Тогда в силу теоремы Лиувилля

$$g(z) = c_1 + g_1(z), \qquad (1.3.11)$$

с – постоянная, то есть $g(z)$ имеет вид (1.3.10).

В силу теоремы 1.3.1 для разрешимости уравнения (1.3.9) в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\iint\limits_{\Omega} \left(c_1 - \mathrm{T}_\zeta f\right) d\Omega = 0, \qquad (1.3.12)$$

При выполнении этого условия общее решение уравнения (1.3.10) в классе C_*^1 представимо в виде

$$w(z) = \Phi(z) + \mathrm{C}_1\bar{z} + \mathrm{T}_\zeta\big(\mathrm{T}_\zeta f\big), \qquad (1.3.13)$$

где $\Phi(z)$ квазипериодическая аналитическая функция, удовлетворяющая условиям

$$\Phi\big(z + h_j\big) = \Phi(z) - c_1\bar{h}_j - \eta_j \mathrm{T}_\zeta^0 f, \quad j = 1{,}2;$$

здесь

$$\mathrm{T}_\zeta^0 f = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\left(-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(t)\zeta\,(t - z) d_t\Omega\right) d_z\Omega.$$

Функцию $\Phi(z)$ представим в виде

$$\Phi(z) = A_1 z + \varphi(z), \qquad (1.3.14)$$

постоянные A_1 и C_1 подберѐм так, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_1 h_1 + \mathrm{C}_1\bar{h}_1 &= -\eta_1 \mathrm{T}_\zeta^0 f \\ A_1 h_2 + \mathrm{C}_1\bar{h}_2 &= -\eta_2 \mathrm{T}_\zeta^0 f \end{aligned}\right\}.$$

Эта система в силу условия $Im\,(h_2/h_1) \neq 0$ имеет единственное решение

$$C_1 = -\frac{\pi}{\Omega_0} T_\zeta^0 f, \qquad A_1 = \frac{1}{2i\Omega_0}\left(\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1\right) T_\zeta^0 f,$$

где $\Omega_0 = mes\Omega = |h_1|(h_2/h_1)$. Здесь использовали соотношения Лежандра $\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i$, $\eta_1 = 2\zeta(h_1/2), \eta_2 = 2\zeta(h_2/2)$.

В таком случае в представлении (1.3.14) функция $\varphi(z)$ является эллиптической функцией нулевого порядка, то есть двоякопериодической и аналитической на всей плоскости. Тогда в силу теоремы Лиувилля $\varphi(z) \equiv c$, $c -$ постоянная. Таким образом, если выполнено условие (1.3.5), то уравнение (1.3.6) в классе C_*^1 имеет решения вида (1.3.8).

Глава 2. Двоякопериодические решения эллиптических систем второго порядка

2.1. Регулярные двоякопериодические решения с постоянными коэффициентами

Исследуем вопрос существования и нахождения двоякопериодических решений класса C_*^2 для эллиптической системы второго порядка вида $[2], [10], [29], [44], [68] - [71]$

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw = f(z), \tag{2.1.1}$$

где a, b −постоянные, $f(z)$ – заданная двоякопериодическая функция класса $H_*^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$.

1. Сначала находим решения однородной системы, а затем решения неоднородной системы.

Рассмотрим однородное уравнение

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw = 0, \tag{2.1.2}$$

и будем искать его решения в классе C_*^2. Существование и структура решений (2.1.1) зависит от свойства корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + b = 0. \tag{2.1.3}$$

Пусть $\Gamma_1 -$ решѐтка вида $\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0}\{m_1h_1 + m_2h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}$, где $\Omega_0 = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1)$, Ω −основной параллелограмм решѐтки Г. Имеет место

Теорема 2.1.1. *Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ −различные корни уравнения (2.1.3). Тогда: 1) при $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ уравнение (2.1.2) имеет два линейно независимых решения (над полем комплексных чисел) и любые еѐ решения из класса C_*^2 представимы в виде*

$$w(z) = c_1 e^{\lambda_1\bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} + c_2 e^{\lambda_2\bar{z} - \bar{\lambda}_2 z} \tag{2.1.4}$$

c_1, c_2 −произвольные постоянные;

2) если $\lambda_1 \in \Gamma_1,\ \lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1$ или наоборот, то уравнение (2.1.2) имеет одно решение вида

$$w(z) = c_1 e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}, \qquad (2.1.5)$$

c_1 *−произвольная постоянная;*

3) при $\lambda_1 \overline{\in} \Gamma_1$, $\lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1$ *уравнение (2.1.2) имеет только нулевое решение* $w(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2 −различные корни характеристического уравнения (1.5.3), и $w \in C_*^2$ - решение уравнения (2.1.2). Тогда методом факторизации уравнение (2.1.2) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \lambda_2 w\right) = 0$$

Это уравнение в обозначениях

$$\varphi(z) = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \lambda_2 w, \qquad (2.1.6)$$

примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - \lambda_1 \varphi = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\varphi(z) = \psi(z) e^{\lambda_1 \bar{z}}, \qquad (2.1.7)$$

где $\psi_1(z)$ −двоякопериодическая функция второго рода, удовлетворяющая условиям

$$\psi(z + h_j) = e^{-\lambda_1 \bar{h}_j}\, \psi(z), \;\; j = 1.2, \qquad (2.1.8)$$

и аналитическая функция в области $\bar{\Omega}$.

Подставляя (2.1.7) в (2.1.6), получим неоднородное уравнение первого порядка вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \lambda_2 w = \psi(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} .$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$w(z) = \varphi_1(z) e^{\lambda_2 \bar{z}} . \qquad (2.1.9)$$

Тогда $\varphi_1(z)$ будет удовлетворять неоднородному уравнению Коши-Римана

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar{z}} = \psi_1(z)e^{(\lambda_1-\lambda_2)\bar{z}}.$$

В силу, что $\psi_1(z)$- аналитическая функция в $\overline{\Omega}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то интегрируя последнее уравнение, получим

$$\varphi_1(z) = \psi_2(z) + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\psi_1(z)e^{(\lambda_1-\lambda_2)\bar{z}}. \qquad (2.1.10)$$

Так как $w \in C_*^2$,то $\varphi(z)$ удовлетворяет условию

$$\varphi_1(z+h_j) = e^{-\lambda_2\bar{h}_j}\varphi_1(z), \qquad j = 1,2,$$

тогда и $\psi_2(z)$ должна удовлетворять этому условию.

Теперь, подставляя (2.1.10) в (2.1.9) с новыми переобозначениями, получим, что любое решение уравнения (2.1.2) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ в классе C_*^2 представимо в виде

$$w(z) = \phi_1(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \phi_2(z)e^{\lambda_2\bar{z}}, \qquad (2.1.11)$$

где $\phi_j(z)$ –двоякопериодические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\phi_k(z+h_j) = e^{-\lambda_k\bar{h}_j}\phi_k(z), \quad k = 1,2; \quad j = 1,2 \qquad (2.1.12)$$

и аналитические функции в области $\overline{\Omega}$.

Представление (2.1.11) – единственное, и в этом легко можно убедиться.

Значит, $\phi_k(z)$ –эллиптические функции второго рода, удовлетворяющие условиям (2.1.12), имеющие порядок нуль, и согласно формуле (1.2.30') $\phi_k(z)$ имеют вид [53]-[56]

$$\phi_k(z) = \begin{cases} c_k e^{-\bar{\lambda}_k z} & \textit{если} \;\; \lambda_j \in \Gamma_1, \\ 0, & \textit{если} \;\; \lambda_j \,\overline{\in}\, \Gamma_1. \end{cases} \qquad (2.1.13)$$

где c_k произвольная постоянная $k = 1,2$.

Теперь в силу представлений (2.1.1) и (2.1.13) все утверждения теоремы становятся очевидными.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *корень уравнения (2.1.3). Тогда:*

1) при $\lambda \in \Gamma_1$ *любое решение уравнения (2.1.2) имеет вид*

$$w(z) = ce^{\lambda\bar{z}-\bar{\lambda}z}, \tag{2.1.14}$$

где с- произвольная постоянная.

2) если $\lambda \overline{\in} \Gamma_1$, *то уравнение (2.1.2) имеет только нулевое решение* $w(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ - корень уравнения (2.1.3), и $w(z) \in C_*^2$- решение уравнения (2.1.2).

Тогда уравнение (2.1.2) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \lambda\right)\left(\frac{\partial w}{\partial\bar{z}} - \lambda w\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \lambda\right)^2 w = 0$$

Введя обозначение

$$\psi(z) = \frac{\partial w}{\partial\bar{z}} - \lambda w,$$

получим уравнение для $\psi(z) \in C_*^1$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} - \lambda\psi = 0.$$

Как показано в [47] ,

$$\psi(z) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda\bar{z}-\bar{\lambda}z}, & \text{если } \lambda \in \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } \lambda \overline{\in} \Gamma_1, \end{cases}$$

где c_1 −произвольная постоянная.

Отсюда при $\lambda \overline{\in} \Gamma_1$ для решения уравнения (2.1.2) получим

$$\frac{\partial w}{\partial\bar{z}} - \lambda w = 0$$

и следовательно, $w(z) \equiv 0$, то есть получим второе утверждение теоремы.

При $\lambda \in \Gamma_1$ для решения уравнения (2.1.2) получим неоднородное уравнение вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \lambda w = c_1 e^{\lambda \bar{z} - \bar{\lambda} z}. \qquad (2.1.15)$$

Отыскивая решение этого уравнения в виде

$$w(z) = \varphi(z) e^{\lambda \bar{z} - \bar{\lambda} z}, \qquad (2.1.16)$$

где $\varphi(z)$ −двоякопериодическая искомая функция, и подставляя (2.1.16) в (2.1.15) для нахождения $\varphi(z)$, получим неоднородное уравнение Коши-Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = c_1, \quad c_1 - \text{постоянная}.$$

Это уравнение в классе C_*^1 имеет решение лишь при условии $c_1 = 0$. В самом деле, интегрируя это уравнение, получим

$$0 = \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\Omega = \iint\limits_{\Omega} c_1 d\Omega = c_1 \Omega_0 = c_1 \mathrm{mes}\Omega,$$

А так как $mes\Omega = |h_1|^2 \, Im(h_2 \,/\, h_1) > 0$, то $c_1 = 0$.

Следовательно, уравнение (2.1.15) в классе C_*^1, при $\lambda \in \Gamma_1$ имеет решение лишь при условии $c_1 = 0$. Это решение имеет вид

$$w(z) = c e^{\lambda \bar{z} + \bar{\lambda} z},$$

где c- произвольная постоянная. Теорема доказана.

2. Решение неоднородного уравнения.

Теперь методом вариации произвольных постоянных находим решение неоднородного уравнения (2.1.1).

1) Пусть сначала $\lambda_1 \neq \lambda_2$ −различные корни уравнения (2.1.3). Согласно формулы представления (2.1.4), решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$w_0(z) = \varphi(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + \psi(z) e^{\lambda_2 \bar{z}}, \qquad (2.1.17)$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ −искомые двоякопериодические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\varphi\left(z+h_j\right)=\bar{e}^{\lambda_1\bar{h}_j}\varphi(z),\ \ \psi\left(z+h_j\right)=\bar{e}^{\lambda_2\bar{h}_j}\psi(z), j=1,2\ ,\quad (2.1.18)$$

и являющиеся функциями класса $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$.

Функции $\varphi(z),\psi(z)$ берём такими чтобы

$$\varphi_{\bar{z}}e^{\lambda_1\bar{z}}+\psi_{\bar{z}}e^{\lambda_2\bar{z}}=0.\quad (2.1.19)$$

Подставляя (2.1.17) в (2.1.1), с учетом (2.1.19) относительно $\varphi(z)$, $\psi(z)$ получим уравнение вида

$$\lambda_1\varphi_{\bar{z}}e^{\lambda_1\bar{z}}+\lambda_2\psi_{\bar{z}}e^{\lambda_2\bar{z}}=f(z).\quad (2.1.20)$$

Решая совместно уравнения (2.1.19),(2.1.20), находим $\varphi_{\bar{z}},\psi_{\bar{z}}$:

$$\varphi_{\bar{z}}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}f(z)e^{-\lambda_1\bar{z}}\quad (2.1.21)$$

$$\psi_{\bar{z}}=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}f(z)e^{-\lambda_2\bar{z}}\ .\quad (2.1.22)$$

Задача нахождения двоякопериодической функции $u(z)$, удовлетворяющей условию

$$u\left(z+h_j\right)=\bar{e}^{\lambda\bar{h}_j}u(z),\ j=1,2;\quad (\mathrm{A})$$

и в параллелограмме Ω уравнению

$$u_{\bar{z}}=g(z),\quad (\mathrm{B})$$

где $g(z)$ также удовлетворяет условию (А), изучена в [52]. и $g(z)\in\ H^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $0<\alpha\leq 1$.

Вспомогательная теорема из работы [52], [56]:

1. *при $\lambda\in\Gamma_1$ для разрешимости задачи (А), (В) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Omega} g(z)e^{-\bar{\lambda}z}\,d\Omega=0\ ,$$

где постоянная величина d *удовлетворяет уравнениям*

$$exp\left(\lambda\bar{h}_1 + dh_1\right) = 1, exp\left(\lambda\bar{h}_2 + dh_2\right) = 1, \ \ d = -\bar{\lambda}.$$

При этом все решения задачи (A), (B) представимы в виде

$$u(z) = e^{dz}\left[c + T_\zeta(ge^{-dz})\right], \qquad (C)$$

где с *—произвольная постоянная.*

2. *Если* $\lambda \bar{\in} \Gamma_1$, *то задача (A),(B) разрешима при любой правой части* $g(z)$, *и её единственное решение имеет вид:*

$$u(z) = e^{d_1 z}T_\sigma(ge^{-d_1 z}), \qquad (D)$$

где $T_\sigma\rho$ *—интегральный оператор вида*

$$T_\sigma\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \rho(t)\frac{\sigma(t-z-\Delta)}{\sigma(-\Delta)\sigma(t-z)}d_t\Omega, \ \ \Delta \bar{\in} \Gamma$$

здесь $\sigma(z)$ *—сигма-функция Вейерштрасса, постоянные* d и Δ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\left.\begin{aligned} d_1h_1 + \eta_1\Delta &= -\lambda\bar{h}_1, \\ d_1h_2 + \eta_2\Delta &= -\lambda\bar{h}_2 \end{aligned}\right\},$$

где $\eta_j = 2\zeta(h_j/2), \ j = 1,2.$

Эта система уравнений, благодаря соотношению Лежандра

$$\eta_1h_2 - \eta_2h_1 = 2\pi i,$$

имеет единственное решение:

$$d = \frac{\lambda}{2\pi i}\left(\eta_1\bar{h}_2 - \eta_2\bar{h}_1\right), \quad \Delta = -\frac{\lambda}{\pi}\Omega_0 \bar{\in} \Gamma. \qquad (E)$$

Теперь можно использовать эти результаты для решений задачи (2.1.18),(2.1.21),(2.1.22).

a) Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$, тогда для существования решений задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)e^{-\lambda_j\bar{z}+\bar{\lambda}_j z}d\Omega = 0, \qquad j = 1,2, \qquad (2.1.23)$$

При этом функции $\varphi(z)$и $\psi(z)$представимы в виде

$$\varphi(z) = e^{-\bar{\lambda}_1 z}\left[c_1 + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} T_\zeta\left(f e^{-\lambda_1 \bar{z}+\bar{\lambda}_1 z}\right)\right], \tag{2.1.24}$$

$$\psi(z) = e^{-\bar{\lambda}_2 z}\left[c_2 + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} T_\zeta\left(f e^{-\lambda_2 \bar{z}+\bar{\lambda}_2 z}\right)\right]. \tag{2.1.25}$$

где c_1, c_2 −произвольные постоянные.

б) Пусть $\lambda_1 \in \Gamma_1$ и $\lambda_2 \,\overline{\in}\, \Gamma_1$ (или наоборот).

Тогда для существования функции $\varphi(z)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_1 \bar{z}+\bar{\lambda}_1 z} d\Omega = 0\,.$$

При этом функция $\varphi(z)$ представима в виде (2.1.24)

$$\varphi(z) = e^{-\bar{\lambda}_1 z}\left[c_1 + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} T_\zeta\left(f e^{-\lambda_1 \bar{z}+\bar{\lambda}_1 z}\right)\right],$$

(c_1 − произвольная постоянная величина, d_1 − как в пункте a).

Функция $\psi(z)$ всегда существует и представима в виде

$$\psi(z) = \frac{e^{-d_1 z}}{\lambda_2-\lambda_1} T_\sigma\left(f e^{-\lambda_2 \bar{z}+d_1 z}\right). \tag{2.1.26}$$

в) Если $\lambda_1 \,\overline{\in}\, \Gamma_1$и $\lambda_2 \,\overline{\in}\, \Gamma_1$, то функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются однозначным образом и выражаются формулами

$$\varphi(z) = \frac{e^{d_1 z}}{\lambda_1-\lambda_2} T_\sigma^1\left(f e^{-\lambda_1 \bar{z}-d_1 z}\right), \tag{2.1.27}$$

$$\psi(z) = \frac{e^{d_2 z}}{\lambda_2-\lambda_1} T_\sigma^2\left(f e^{-\lambda_2 \bar{z}-d_2 z}\right), \tag{2.1.28}$$

где $T_\sigma^1\rho, T_\sigma^2\rho$ имеют соответственно вид

$$T_\sigma^1\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f e^{-\lambda_1 \bar{z}-d_1 z}\,\frac{\sigma(t-z-\Delta_1)}{\sigma(-\Delta_1)\sigma(t-z)}\,d_t\Omega,$$

$$T_\sigma^2 \rho = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} f e^{-\lambda_2 \bar{z} - d_2 z} \frac{\sigma(t - z - \Delta_2)}{\sigma(-\Delta_2)\sigma(t - z)} d_t \Omega$$

постоянные величины d_j, Δ_j вид

$$d_j = \frac{\lambda_j}{2\pi i}\left(\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1\right),\ \Delta_j = -\frac{\lambda_j}{\pi}\Omega_0,\ \ j = 1{,}2.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1.3. *Пусть* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *корни уравнения (2.1.3). Тогда при* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ *однородное уравнение (2.1.2) имеет два линейно независимых решения над полем* $\mathbb{C}$

$$\varphi_1(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}, \qquad \varphi_2(z) = e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}.$$

Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z}\, d\Omega = 0, \quad j = 1{,}2.$$

При этом любое решение (2.1.1) из класса C_*^1 *представимо в виде*

$$w(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}\left[c_1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} T_\zeta\left(f e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z}\right)\right] +$$

$$+ e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}\left[c_2 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} T_\zeta\left(f e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z}\right)\right],$$

где c_1, c_2 *—произвольные постоянные.*

Теорема 2.1.4. *Если* $\lambda_1 \in \Gamma_1$ и $\lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1$, *то однородное уравнение (2.1.2) имеет одно решение вида*

$$\varphi(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z},$$

а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z} d\Omega = 0\,.$$

При этом все решения уравнения (2.1.1) представимы в виде

$$w(z) = e^{\lambda_1\bar{z}-\bar{\lambda}_1 z}\left[c_1 + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}T_\zeta(fe^{-\lambda_1\bar{z}+\lambda_1 z})\right] + e^{\lambda_2\bar{z}+d_2 z}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}T_\sigma(fe^{-\lambda_2\bar{z}-d_2 z}),$$

где c_1 *−произвольная постоянная величина, и* $T_\sigma\rho$ *имеет вид (2.1.26)*

$$T_\sigma\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \rho(z)\frac{\sigma(t-z-\Delta_2)}{\sigma(-\Delta_2)\sigma(t-z)}d_t\Omega.$$

Постоянные d_2 и Δ_2 *подобраны в виде*

$$d_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi i}\left(\eta_1\bar{h}_2 - \eta_2\bar{h}_1\right), \qquad \Delta_2 = -\frac{\lambda_2}{\pi}\Omega_0.$$

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\lambda_1 \bar{\in} \Gamma_1$ и $\lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1$. *Тогда однородное уравнение (2.1.2) имеет только нулевое решение* $w_0(z) \equiv 0$, *а неоднородное уравнение (2.1.1) имеет при этом одно решение вида*

$$w(z) = e^{\lambda_1\bar{z}+d_1 z}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}T_\sigma^1\left(fe^{-\lambda_1\bar{z}-d_1 z}\right) + e^{\lambda_2\bar{z}+d_2 z}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}T_\sigma^2(fe^{-\lambda_2\bar{z}-d_2 z}),$$

где $T_\sigma^1\rho_1, T_\sigma^2\rho_2$, *соответственно, имеют вид*

$$T_\sigma^j\rho_j = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \rho_j(t)\frac{\sigma\left(t-z-\Delta_j\right)}{\sigma\left(-\Delta_j\right)\sigma(t-z)}d_t\Omega,$$

при этом d_j и Δ_j *имеют вид*

$$d_j = \frac{\lambda_j}{2\pi i}\left(\eta_1\bar{h}_2 - \eta_2\bar{h}_1\right), \quad \Delta_j = -\frac{\lambda_j}{\pi}\Omega_0, \qquad j = 1,2.$$

Теперь рассмотрим случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

В этом случае частное решение уравнения (2.1.1) будем искать в виде

$$w_0(z) = \varphi(z)e^{\lambda\bar{z}}, \tag{2.1.29}$$

Тогда для искомой функции $\varphi(z)$получим неоднородное уравнение Бицадзе [73],

$$\varphi_{\bar{z}\bar{z}} = e^{-\lambda\bar{z}}f(z). \tag{2.1.30}$$

Пусть $\lambda \in \Gamma_1$. Тогда, умножая обе части этого уравнения на e^{-dz}, получим уравнение

$$\left(\varphi e^{\bar{\lambda}z}\right)_{\bar{z}\bar{z}} = e^{-\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z} f(z).$$

Введём новую функцию

$$\vartheta = \varphi e^{\bar{\lambda}z}.$$

Так как $w_0(z) \in C_*^2$, то в представлении (2.1.29) функция $\varphi(z)$ должна удовлетворять условию $\varphi\left(z + h_j\right) = e^{-\lambda\bar{h}_j}\varphi(z)$.

Тогда функция $\vartheta(z) \in C_*^2$ и удовлетворяет уравнению

$$\vartheta_{\bar{z}\bar{z}} = f_1(z) = f(z)e^{-\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z}. \qquad (2.1.31)$$

Как мы уже показали, для разрешимости уравнения (2.1.31) в классе C_*^2 необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)e^{-\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z} d\Omega = 0\,.$$

При этом все решения уравнения (2.1.31) согласно формулы (1.3.8) представимы в виде

$$\vartheta(z) = c + A(f)z + B(f)\bar{z} + T_\zeta\left[T_\zeta\left(f e^{-\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z}\right)\right],$$

где с- произвольная постоянная, постоянные *A, B* имеют вид

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2i\Omega_0}\left(\eta_1\bar{h}_2 - \eta_2\bar{h}_1\right)T_\zeta^0 f,\;\; B = -\frac{\pi}{\Omega_0}T_\zeta^0 f,$$

$$T_\zeta^0 f = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\left\{-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(\tau)e^{-\lambda\bar{\tau}-d\tau}\zeta(\tau - z)d_\tau\Omega\right\}d_z\Omega.$$

Если же $\lambda \mathrel{\overline{\in}} \Gamma_1$, то постоянные d и Δ берём такими, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} dh_1 + \eta_1\Delta = -\lambda\bar{h}_1 \\ dh_2 + \eta_2\Delta = -\lambda\bar{h}_2 \end{array}\right\}$$

Эта система в силу соотношения Лежандра

$$\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i, \quad\;\; \eta_j = 2\zeta\left(h_j\,/\,2\right),\;\; j = 1{,}2$$

имеет единственное решение.

Тогда, согласно формулы (D) вспомогательной теоремы для функции $\vartheta(z) = \varphi_{\bar{z}}$, из (2.1.30) получим

$$\varphi_{\bar{z}} = e^{dz} T_{\sigma}\left(f e^{-\lambda\bar{z}-dz}\right) = F_1(z), \qquad (2.1.32)$$

где $\mathrm{T}_{\sigma}\rho$ имеет вид

$$\mathrm{T}_{\sigma}\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \rho(t)\,\frac{\sigma(t-z-\Delta)}{\sigma(-\Delta)\sigma(t-z)}\,d_t\Omega$$

в силу того, что $\lambda \overline{\in} \Gamma_1$, $\Delta \in \Gamma$.

Функции $F_1(z)$ и $\varphi_{\bar{z}}$ также удовлетворяют условиям

$$\psi\left(z+h_j\right) = e^{-\lambda\bar{h}_j}\psi(z), \;\; \lambda \overline{\in} \Gamma_1.$$

Поэтому, применяя ещѐ формулы (D) вспомогательной теоремы к уравнению (2.1.32) , получим

$$\varphi(z) = e^{dz} T_{\sigma}\left[T_{\sigma}\left(f e^{-\lambda\bar{z}-dz}\right)\right].$$

При этом однородное уравнение (2.1.30) имеет только нулевое решение $\varphi(z) \equiv 0$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.1.6. *Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ –корень уравнения (2.1.3). Тогда при $\lambda \in \Gamma_1$ однородное уравнение (1.5.2) имеет одно решение вида*

$$w_0(z) = e^{\lambda\bar{z}-\bar{\lambda}z}.$$

Для разрешимости неоднородного уравнения (2.1.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z}\, d\Omega = 0.$$

При этом все решение уравнения (2.1.1) имеют вид

$$w(z) = e^{\lambda\bar{z}-\bar{\lambda}z}\left(c + A(f)z + B(f)\bar{z} + T_{\zeta}\left[T_{\zeta}\left(f e^{-\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z}\right)\right]\right),$$

где c- произвольная постоянная, постоянные A, B имеет вид

$$A = \frac{1}{2i\Omega_0}\left(\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1\right) T_\zeta^0 f, \quad B = -\frac{\pi}{\Omega_0} T_\zeta^0 f,$$

$$T_\zeta^0 f = \frac{-1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} f(t) e^{-\lambda \bar{t} - dt} \zeta(t - z) d_t \Omega \right\} d_z \Omega,$$

здесь $\Omega_0 = mes\Omega = |h_1|^2 (h_2 / h_1)$.

Теорема 2.1.7. *Если* $\lambda \,\overline{\in}\, \Gamma_1$, *то однородное уравнение (2.1.2) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (2.1.1) имеет и притом единственное решение вида*

$$w(z) = e^{\lambda \bar{z} + dz} T_\sigma\left[T_\sigma\left(f(z) e^{-\lambda \bar{z} - dz}\right)\right],$$

$$\mathrm{T}_\sigma \rho = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t - z - \Delta)}{\sigma(-\Delta)\sigma(t - z)} d_t \Omega$$

постоянные d и $\Delta \in \Gamma_1$ *имеют вид*

$$d = \frac{\lambda}{2\pi i}\left[\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1\right], \quad \Delta = -\frac{\lambda}{\pi}\Omega_0.$$

2.2. Обобщѐнные двоякопериодические решения уравнения (2.1.1)

В этом параграфе для уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + a w_{\bar{z}} + bw = f(z) \tag{2.2.1}$$

будем исследовать задачи существования и нахождения двоякопериодических решений, допускающих полюсы, (как у однозначных аналитических функций), а также нули и полюсы с учетом их кратности [67]-[71], [75]. Здесь $f(z) \in H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1,\ a, b$ −постоянные.

Обозначим через $\tilde{C}_*^2$ −класс двоякопериодических решений уравнения (2.1.1), допускающие полюсы в основном параллелограмме Ω решѐтки $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2;\ m_1, m_2 - \text{целые}\}$, как у однозначных аналитических функций и принадлежащих $\mathrm{C}^2(\Omega \backslash \Omega_0)$, где $\Omega_0 \in \Omega$, содержащее полюсы решения. В случае, когда $\Omega_0 = \emptyset$, мы получим класс регулярных решений, то есть C_*^2.

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_r$ —полюсы решения (2.2.1), имеющие соответственно кратности $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ и лежащие внутри основного параллелограмма Ω решётки Γ.

1.Сначала находим решение однородного уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw = 0 \tag{2.2.2}$$

в классе $\tilde{C}_*^2$ с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$.

В § 2.1 было показано, что в случае, когда λ_1, λ_2 —различные корни характеристического уравнения (2.1.3), решение (2.2.2) представимо в виде

$$w(z) = \varphi(z)e^{\lambda_1 \bar{z}} + \psi(z)e^{\lambda_2 \bar{z}}\,, \tag{2.2.3}$$

где $\varphi(z), \psi(z)$ —двоякопериодические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\varphi\left(z + h_j\right) = e^{-\lambda_1 \bar{h}_j}\varphi(z), \psi\left(z + h_j\right) = e^{-\lambda_2 \bar{h}_j}\psi(z), \qquad j = 1,2, \tag{2.2.4}$$

Тогда полюсы решения $w(z)$ являются полюсами функции $\varphi(z), \psi(z)$, поэтому в представлении (2.2.3) $\varphi(z), \psi(z)$ —эллиптические функции второго рода, то есть мероморфные функции, удовлетворяющие условию (2.2.3).

<u>Определение.</u> Если в представлении (2.2.3) функции $\varphi(z)$ или $\psi(z)$ имеют все полюсы решения $b_1, b_2, \dots, b_r$, то будем говорить, что полюсы решения соответствуют корню λ_1 или λ_2.

Теорема 2.2.1. *Пусть корни уравнения (2.1.3) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ и пусть $\chi(z)$ —эллиптическая функция, имеющая полюсы $b_1, b_2, \dots, b_r$ с учётом их кратности и*

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{z=b_k}{Res}\, \chi(z) = 0. \tag{2.2.4}$$

Тогда любое решение уравнения (2.2.2) с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$ представимо в виде

$$w(z) = \varphi(z)\, \vartheta(z), \tag{2.2.5}$$

где $\vartheta(z) \in C_*^2$ —регулярное двоякопериодическое решение уравнения (2.2.2).

Действительно, если $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ и $\chi(z) -$ эллиптическая функция с полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$, тогда отношение $w(z)/\chi(z) = \vartheta(z)$ является регулярным решением уравнения (2.2.2). При выполнении условия (2.2.4) всегда можно построить эллиптическую функцию с полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$ и периодами $h_1, h_2, Im(h_2/h_1) > 0$, (Теорема 1.1.8).

Подставив в формулы (2.2.3)

$$\varphi(z) = \chi(z)\varphi_1(z), \qquad \psi(z) = \chi(z)\psi_1(z),$$

получим решение уравнения (2.2.2) в виде

$$w(z) = \varphi(z)\big(\varphi_1(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \psi_1(z)e^{\lambda_2\bar{z}}\big), \tag{2.2.6}$$

где $\varphi_1(z), \psi_1(z) -$аналитические двоякопериодические функции (без полюсов), удовлетворяющие условиям (2.2.4). Как и в § 2.1 $\varphi_1(z), \psi_1(z)$ можно представить в виде

$$\varphi_1(z) = c_1 e^{-\bar{\lambda}_1 z}, \psi_1(z) = c_2 e^{-\bar{\lambda}_2 z},$$

где $c_1, c_2 -$произвольные постоянные величины. Поэтому, обозначая через $\vartheta(z)$ регулярное решение (2.2.2)

$$\vartheta(z) = c_1 e^{\lambda_1\bar{z} + d_1 z} + c_2 e^{\lambda_2\bar{z} + d_2 z},$$

получим решение (2.2.1) в виде (2.2.5).

Условие (2.2.4) является необходимым и достаточным условием существования решения (2.2.2) в классе $\tilde{C}_*^2$ при $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$.

Из этой теоремы следует, что уравнение (2.2.2) не имеет решения с одним простым полюсом в классе $\tilde{C}_*^2$. Следовательно, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ порядок полюсов решения r должен быть $r \geq 2$.

Теорема 2.2.2. *Пусть один из корней λ_1 или $\lambda_2 \,\bar{\in}\, \Gamma_1$. Тогда уравнение (2.2.2) всегда имеет решение с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$.*

Доказательство. Пусть для определенности $\lambda_1 \,\bar{\in}\, \Gamma_1$. Пусть в представлении (2.2.3) $\varphi(z) -$ эллиптическая функция второго рода с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(z + h_j) = e^{-\lambda_1\bar{h}_j}\varphi(z), \qquad j = 1,2. \tag{2.2.6'}$$

И как известно [56], при $\lambda \overline{\in} \Gamma_1$ такую функцию $\varphi(z)$ всегда можно построить. При этом функция $\varphi(z)$ представима в виде

$$\varphi(z) = c_1 \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z - z_1)} e^{d_1 z} F(z), \qquad (2.2.7)$$

где c_1 –постоянная величина, $F(z)$ имеет вид (1.2.23), а постоянные $z_0, z_1 \overline{\in} \Gamma$ и d_1связаны условиями

$$\left.\begin{array}{l}(z_1 - z_0)\eta_1 + d_1 h_1 = -\lambda_1 \bar{h}_1 \\ (z_1 - z_0)\eta_2 + d_2 h_2 = -\lambda_1 \bar{h}_2\end{array}\right\}. \qquad (2.2.8)$$

Эта система уравнений, благодаря соотношению Лежандра

$$\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i,$$

всегда имеет решение $(z_1 - z_0, d_1)$, если $\lambda_1 \overline{\in} \Gamma_1$.

Теперь, взяв в формуле (2.2.3) $\psi(z) = \varphi(z)\mu(z)$, где $\mu(z)$ –двоякопериодическая функция второго рода (без полюсов), удовлетворяющая условию

$$\mu\left(z + h_j\right) = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{h}_j} \mu(z), \qquad (2.2.9)$$

решение (2.2.2) представим в виде

$$w(z) = \varphi(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} \left(c_1 + \mu(z) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\bar{z}}\right). \qquad (2.2.10)$$

Здесь $\mu(z)$ –аналитическая двоякопериодическая функция (без полюсов) второго рода, удовлетворяющая условию (2.2.9) и, как известно из главы 1, (следствие 1.2.1), функция $\mu(z)$ представляется в виде

$$\mu(z) = \begin{cases} c_2 e^{\tilde{\lambda}\bar{z} - \bar{\lambda} z}, \text{если } \tilde{\lambda} \in \Gamma_1, \\ \quad 0, \qquad \text{если } \tilde{\lambda} \in \Gamma_1, \end{cases}$$

где c_2 –постоянная, $\tilde{\lambda} = \lambda_1 - \lambda_2$,

Следовательно: 1) если $\lambda_1 \overline{\in} \Gamma_1$, то уравнение (2.2.2) при $\lambda_1 - \lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1$ имеет решение вида

$$w(z) = c\varphi(z) e^{\lambda_1 \bar{z}},$$

где c –постоянная.

2) при $\lambda_1 - \lambda_2 \in \Gamma_1$ уравнение имеет решения вида

$$w(z) = \varphi(z)e^{\lambda_1 \bar{z}}\left(c_1 + c_2 e^{\tilde{\lambda}\bar{z} + \tilde{d}z}\right), \qquad \tilde{d} = -\bar{\tilde{\lambda}}.$$

c_1, c_2 —произволные постоянные.

Теперь будем искать решения (2.2.2), допускающие нули и полюсы внутри параллелограмма Ω.

Известно, что необходимым условием существования эллиптических функций [1] является равенство суммарных порядков их нулей и полюсов. Для поверхностей рода $g \geq 1$ это условие не является достаточным. Необходимое и достаточное условие существования таких функций дает теорема типа Лиувилля-Абеля [1], [15], [25]. Из этих теорем в силу формулы (2.2.4) и при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует

Теорема 2.2.3. *Число нулей и полюсов решения уравнения (2.2.2), соответствующих корням λ_1и λ_2, равно между собой.*

Теорема 2.2.4 *(аналог теоремы Абеля). Пусть $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ —нули и $b_1, b_2, \dots, b_r$ —полюсы решения уравнения (2.2.1), лежащие внутри основного параллелограмма Ω, с учѐтом их кратностей. Тогда для существования таких решений необходимо и достаточно выполнение одного из условий*

$$\sum_{k=1}^{r} (b_k - \tilde{a}_k) \equiv -\frac{\lambda_1 \Omega_0}{\pi} (mod\, \Gamma), \qquad (2.2.11)$$

или

$$\sum_{k=1}^{r} (b_k - a_k) \equiv -\frac{\lambda_2 \Omega_0}{\pi} (mod\, \Gamma),$$

$\Omega_0 = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1)$, *причѐм при* $-\frac{\lambda_1\Omega_0}{\pi} \in \Gamma$ и $\frac{\lambda_2\Omega_0}{\pi} \in \Gamma$ $r \geq 2$, *а при* $-\frac{\lambda_1\Omega_0}{\pi} \,\bar{\in}\, \Gamma$ *или* $-\frac{\lambda_2\Omega_0}{\pi} \,\bar{\in}\, \Gamma$ $r \geq 1$.

Утверждение теоремы 2.2.3 следует из принципа аргумента, примененного к эллиптическим функциям $\varphi'(z)/\varphi(z)$ и $\psi'(z)/\psi(z)$, [15].

Необходимость условия теоремы 2.2.4 вытекает из теоремы теории вычетов, применѐнной к квазипериодическим функциям, [15]

$$z\varphi'(z)/\varphi(z), z\psi'(z)/\psi(z).$$

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (2.2.11). В силу равенства $\lambda_2 = \lambda_1 + \sqrt{\Delta}$, где $\Delta = a^2 - 4b$, общее решение (2.2.1) с учѐтом условия (2.2.3) можно представить в виде

$$w(z) = f(z)e^{\lambda_1 \bar{z}} \left[\varphi_1(z) + \psi_1(z)e^{\sqrt{\Delta}\bar{z}}\right], \tag{2.2.12}$$

где $f(z)$ – эллиптическая функция второго рода, удовлетворяющая условию (2.2.6') и имеющая нули и полюсы решения (2.2.1). Функция $\varphi_1(z)$ – эллиптическая функция (первого рода) порядка $r = 0, \psi_1(z)$- эллиптическая функция второго рода без полюсов и удовлетворяющая условию

$$\psi_1(z + h_j) = e^{-\sqrt{\Delta}\bar{h}_j}\psi_1(z), \ \ j = 1,2.$$

В силу известных теорем теории эллиптических функций [1] и результатов работы [48] находим $\varphi_1(z) \equiv c_1, \ c_1$ – постоянная величина;

$$\psi_1(z) = \begin{cases} c_2 e^{-bz}, \text{если } \sqrt{\Delta} \in \Gamma_1, \\ \ \ 0, \quad \ \text{если } \sqrt{\Delta} \bar{\in} \Gamma_1. \end{cases} \ \Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0}\Gamma, \tag{2.2.13}$$

c_2 – произвольная постоянная величина и число b равно $b = -\sqrt{\Delta} = -(h_2 - h_1)$.

Функцию $f(z)$ можно представить в виде (см. [56])

$$f(z) = \prod_{j=1}^{r} \frac{\sigma(z - \tilde{a}_j)}{\sigma(z - b_j)} e^{dz}, \tag{2.2.14}$$

где $\sigma(z)$ – сигма-функция Вейерштрасса, а нули $-\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$, полюсы $b_1, b_2, \dots, b_r$ и постоянная d в силу условия (2.2.3) связаны условиями

$$
\left.\begin{aligned}
\eta_1 \sum_{k=1}^{r} (b_k - \tilde{a}_k) + dh_1 = -\lambda_1 \bar{h}_1 + 2\pi i n, \\
\eta_2 \sum_{k=1}^{r} (b_k - \tilde{a}_k) + dh_2 = -\lambda_1 \bar{h}_2 + 2\pi i n,
\end{aligned}\right\}
$$

здесь n, m —некоторые целые числа. Эта система благодаря соотношению Лежандра [1] имеет единственное решение относительно $\sum_{k=1}^{r} (b_k - \tilde{a}_k)$ и d. При этом для $-\frac{\lambda_1 \Omega_0}{\pi} \in \Gamma$ нужно считать, что $r \geq 2$.

Следовательно, при выполнении условия (2.2.11) решение уравнения (2.2.1) с заданными нулями и полюсами имеет вид (2.2.12), в котором $\varphi_1(z) \equiv c_1$ —постоянная величина, функции $\psi_1(z)$ и $f(z)$ даются, соответственно, формулами (2.2.13) и (2.2.14).

Теорема 2.2.5. *Если N- суммарное число нулей и P —суммарное число полюсов решения уравнения (2.2.1), то всегда $N \leq P$.*

В самом деле, пусть $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ —нули и $b_1, b_2, \dots, b_r$ —полюсы решения (2.2.1), как в теореме 2.2.4, и пусть решение уравнения (2.2.1) допускает ещѐ один нуль в точке $z = z_0$, $z_0 = \Omega_0$. Тогда из представлений (2.2.12), (2.2.13) получим

$$
w(z) = f(z) e^{\lambda_1 (\bar{z} - \bar{z}_0)} \left[c - c e^{\sqrt{\Delta} (\bar{z} - \bar{z}_0)} \right] = f(z) c \left[e^{\lambda_1 (\bar{z} - \bar{z}_0)} - e^{\lambda_2 (\bar{z} - \bar{z}_0)} \right].
$$

А так как $w_{\bar{z}}(z_0) = 0,$ то отсюда получим

$$
0 = w_{\bar{z}}(z_0) = f(z) c (\lambda_1 - \lambda_2) = 0.
$$

Значит, $c = 0, w(z) \equiv 0$, и случай $N > P$ не является возможным. Таким образом, всегда $N \leq P$. Например, функция

$$
w(z) = f(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} \left[c_1 + c_2 \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z - z_1)} e^{-\sqrt{\Delta} \bar{z} + dz} \right],
$$

где $f(z)$ имеет вид (2.2.14), $z_1 - z_0 = -\sqrt{\Delta}\frac{\Omega_0}{\pi} \overline{\in} \Gamma$ является решением уравнения (2.2.1) с нулями в точках $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ и с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r, z_1$.

Теперь рассмотрим случай, когда уравнение (2.2.2) имеет кратные корни, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ −корень уравнения (2.1.3). Тогда существуют две эллиптические функции $\Phi_1(z)$и $\Phi_2(z)$, такие, что любое решение (2.2.1) из класса $\tilde{C}_*^2$*

представимо в виде

$$w(z) = [\Phi_1(z)\bar{z} + \Phi_2(z)]e^{\lambda\bar{z}}, \qquad (2.2.15)$$

причѐм $\Phi_1(z)$ −эллиптическая функция второго рода, удовлетворяющая условию

$$\Phi_1(z + h_j) = e^{-\lambda\bar{h}_j}\Phi_1(z), \;\; j = 1,2. \qquad (2.2.16)$$

а $\Phi_2(z)$ −квазиэллиптическая функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi_2(z + h_j) = e^{-\lambda\bar{h}_j}\Phi_2(z) - \bar{h}_j\Phi_1(z)e^{-\lambda\bar{h}_j} j = 1,2. \qquad (2.2.17)$$

Используя свойства функции $\Phi_1(z)$ и условие (2.2.17), формуле (2.2.15) можно придать более удобный вид

$$w(z) = \Phi(z)e^{\lambda k\bar{z}}[c\bar{z} + \mu(z)] = \Phi(z)e^{\lambda\bar{z}}F(z),$$

где $\Phi(z)$ −эллиптическая функция второго рода, удовлетворяющая условию (2.2.16). Функция $F(z) = c\bar{z} + \mu$, где c −постоянная, а $\mu(z)$ −квазиэллиптическая функция, удовлетворяющая условию

$$\mu(z + h_j) = \mu(z) - c\bar{h}_j, \;\; j = 1,2, \qquad (2.2.18)$$

является решением неоднородной системы уравнений Коши – Римана

$$F_{\bar{z}} = c. \qquad (2.2.19)$$

Из (2.2.18), (2.2.19) легко находим, что если $F(z) \in C_*^1$, то $c = 0$, а $\mu(z)$ −постоянная величина.

Отсюда, как выше, получим, что для суммарных чисел нулей N и полюсов P всегда $N \leq P$.

Теорема 2.2.6. *Пусть* $N \leq P$, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, .., \tilde{a}_r$ *−нули и* $b_1, b_2, ..., b_r$ *−полюсы решения уравнения (2.2.1) удовлетворяют условию теоремы 2.2.4 .*

Тогда любое решение (2.2.1) имеет вид

$$w(z) = cf(z)e^{\lambda\bar{z}-\bar{\lambda}z},$$

где c *−произвольная постоянная величина,* $f(z)$ *имеет вид (2.2.14).*

Теорема 2.2.7. *Пусть* $N \leq P$, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_r$ *−нули и* $b_1, b_2, ..., b_r$ *− полюсы,* $r < p$, *удовлетворяют условию теоремы 2.2.4, для остальных полюсов* $b_{r+1}, b_{r+2}, ..., b_p$ *−существует квазиэллиптическая функция* $F(z)$, *удовлетворяющая условию (2.2.18) с вычетами*

$$\operatorname*{Res}_{z=b_k} F(z) = c_{1k},$$

и постоянная A, такая что

$$\sum_{k=r+1}^{p} c_{1k} = -c\frac{\Omega_0}{\pi}, \tag{2.2.20}$$

$$\Omega_0 = mes\Omega, \qquad A = -\frac{c}{2\pi i}\left(\bar{h}_1\eta_2 - \bar{h}_2\eta_1\right).$$

Тогда решение (2.2.1) представимо в виде

$$w(z) = f(z)e^{\lambda\bar{z}}\left[c\bar{z} + B + Az + \sum_{k=r+1}^{p}\sum_{j=1}^{\nu_k} c_{jk}\,\zeta^{(j-1)}(z-b_k)\right],$$

B *−произвольная постоянная, постоянная* c *определяется из равенства (2.2.20),* ν_k *−кратность полюса* b_k.

2. Решение неоднородного уравнения.

Теперь находим решения неоднородного уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw = f(z), \tag{2.2.21}$$

в классе $\tilde{C}_*^2$ с заданными полюсами и с заданными нулями и полюсами при $f(z) \in \mathrm{H}_*^{\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$.

Покажем, что интегрирование уравнения (2.2.21) в классе $\tilde{C}_*^n$ можно свести к интегрированию уравнения в классе C_*^2.

Пусть заданы полюсы решения (2.2.21) $b_1, b_2, \ldots, b_r$, лежащие внутри основного параллелограмма Ω с учетом их кратности.

Лемма 2.2.2. *Пусть $\varphi(z)$ −эллиптическая функция с полюсами $b_1, b_2, \ldots, b_r$ и построенная на периодах $h_1, h_2, Im(h_2/h_1) > 0$. Тогда решение уравнения (2.2.21) в классе $\tilde{C}_*^2$ представимо в виде*

$$w(z) = \varphi(z)\vartheta(z), \qquad (2.2.22)$$

где $\vartheta(z) \in C_*^2$ регулярное решение уравнения

$$\vartheta_{\bar{z}\bar{z}} + a\vartheta_{\bar{z}} + b\vartheta = \frac{1}{\varphi(z)} f(z) = f_1(z). \qquad (2.2.23)$$

Действительно, если $w(z) \in \tilde{C}_*^2$- решение уравнения (2.2.21) с заданными полюсами $b_1, b_2, \ldots, b_r$ и $\varphi(z)$ −эллиптическая функция с этими полюсами, то функция

$$w(z) = \varphi(z)\vartheta(z)$$

удовлетворяет уравнению (2.2.21), если $\vartheta(z) \in C_*^2$ и является решением уравнения (2.2.23) и обратно.

Из этой леммы согласно теореме 2.1.1 получим

Теорема 2.2.8. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$ и $\varphi(z)$ −эллиптическая функция с полюсами в точках $b_1, b_2, \ldots, b_r$,*

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{z=b_k}{Res}\, \varphi(z) = 0.$$

Тогда для разрешимости уравнения (2.2.21) в классе $\tilde{C}_*^2$ с полюсами $b_1, b_2, \ldots, b_r$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} f_1(z) e^{-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z}\, d\Omega = 0, \qquad j = 1,2.$$

При этом решения уравнения (2.2.21) представимы в виде

$$w(z) = \varphi(z) e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}\left(c_1 + T_\zeta f_1 e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z}\right) + \varphi(z) e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}\left(c_2 + T_\zeta f_1 e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z}\right),$$

где c_1, c_2 −произвольные постоянные.

Если полюсы соответствуют только одному корню, то решение уравнения (2.2.21) получается с помощью квазиэллиптических функций.

Теорема 2.2.9. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$, *и полюсы* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *соответствуют только корню* λ_1. *(или* λ_2*). И пусть* $\psi(z)$ – *квазиэллиптическая функция с полюсами* $b_1, b_2, \dots, b_r$. *Тогда при выполнении условий*

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{z=b_k}{Res}\, \psi(z) = \frac{-1}{\pi(\lambda_1 - \lambda_2)} \iint_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z} d\,\Omega, \qquad (2.2.24)$$

$$\iint_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z} d\,\Omega = 0, \qquad (2.2.25)$$

уравнение (2.2.21) имеет решение вида

$$w(z) = e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z}\left(\psi(z) + T_\zeta\left(f e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z} d\Omega\right) + e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}(c_2 + T_\zeta\left(f e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z}\right)\right. \qquad (2.2.26)$$

где c_2 – *постоянная.*

Действительно, отыскивая решение (2.2.21) в виде

$$w(z) = \varphi_1(z) e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} + \varphi_2(z) e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z},$$

как при доказательстве теоремы 2.1.1, для $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ получим неоднородные уравнения Коши – Римана

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} f(z) e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z}, \qquad (2.2.27)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} f(z) e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z}. \qquad (2.2.28)$$

Если $\varphi_1(z)$ имеет все полюсы $b_1, b_2, \dots, b_{r,}$ то, как показано в [56], для существования решения уравнения (2.2.27) необходимо и достаточно, чтобы существовала квазиэллиптическая функция $\psi(z)$, удовлетворяющая условию

$$\psi(z + h_j) = \psi(z) + \frac{\eta_j}{\pi(\lambda_1 - \lambda_2)} \iint_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z}, \qquad j = 1,2.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=b_k} \psi(z) = -\frac{1}{\pi(\lambda_1 - \lambda_2)} \iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z} \qquad (2.2.29)$$

Тогда при выполнении условия (2.2.29) уравнение (2.2.27) имеет решение вида [56]

$$\varphi_1(z) = \psi(z) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} T_\zeta\left(f e^{-\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z}\right). \qquad (2.2.30)$$

Решение уравнения (2.2.28) можно искать в классе C_*^1. Тогда при выполнении условия вида

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z} d\Omega = 0, \qquad (2.2.31)$$

оно имеет решение вида [46]

$$\varphi_2(z) = c_2 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} T_\zeta\left(f e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z}\right). \qquad (2.2.32)$$

Следовательно, при выполнении условий (2.2.29), (2.2.31) уравнение (2.2.23) имеет решение вида (2.2.26).

Теорема 2.2.10. *1) Пусть* $\lambda_1 \bar{\in} \Gamma_1,\ \lambda_2 \in \Gamma_1$ (или $\lambda_1 \in \Gamma_1, \lambda_2 \bar{\in} \Gamma_1$). *Тогда однородное уравнения (2.2.21) всегда имеет решение с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$ в виде*

$$w_0(z) = c_1 \varphi(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + c_2 e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z}, \qquad (2.2.33)$$

где $\varphi(z)$ —эллиптическая функция второго рода с полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$, удовлетворяющая условию

$$\varphi(z + h_j) = e^{-\lambda_1 \bar{h}_j} \varphi(z),$$

c_1, c_2 —произвольные постоянные величины. Для разрешимости неоднородного уравнения должно выполняться условие

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_2 \bar{z} + \bar{\lambda}_2 z} d\,\Omega = 0. \qquad (2.2.34)$$

При этом уравнение (2.2.23) имеет решение вида

$$w(z)=w_0(z)+\frac{e^{dz}}{(\lambda_1-\lambda_2)}T_\sigma\left(fe^{-\lambda_1\bar z-dz}\right)+e^{\lambda_2\bar z-\bar\lambda_2 z}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}T_\zeta\left(fe^{-\lambda_2\bar z+\bar\lambda_2 z}\right).$$

2) Если $\lambda_1 \,\overline{\in}\, \Gamma_1, \lambda_2 \,\overline{\in}\, \Gamma_1,$ *то однородное уравнение всегда имеет решение с заданными полюсами в виде*

$$\widetilde{w}_0(z)=c_1\psi(z)e^{\lambda_1\bar z}, \text{ если } \lambda_2-\lambda_1 \,\overline{\in}\, \Gamma_1$$

c_1 *—постоянная величина,* $\psi(z)$ *как в части 1).*

При этом неоднородное уравнение (2.2.23) при любой правой части $f(z)\in H_*^\alpha$ *имеет решение вида*

$$w(z)=\widetilde{w}_0(z)+e^{\lambda_1\bar z+d_1 z}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}T_\sigma^1 f_1+e^{\lambda_2\bar z+d_2 z}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}T_\sigma^2 f_2,$$

где $f_j=f(z)exp\left(-\lambda_j\bar z-d_j z\right)$*, постоянные* $d_1, d_2, T_\sigma^1, T_\sigma^2$ *—как в теореме 2.1.5.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \,\overline{\in}\, \Gamma_1, \lambda_2\in\Gamma_1,$ и точка $b_1, b_2, \dots, b_r$ —полюсы решения уравнения (2.2.21). Как показали в теореме 2.2.4, при $\lambda_1 \,\overline{\in}\, \Gamma_1$ однородное уравнение (2.2.21) имеет решение с полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$ в виде (2.1.7)

$$\varphi(z)=c_1\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z-z_1)}e^{d_1 z}F(z),$$

удовлетворяющее условиям

$$\varphi\left(z+h_j\right)=e^{-\lambda_1\bar h_j}\varphi(z),\ \ j=1,2.$$

Тогда разность

$$w(z)-c_1\varphi(z)e^{\lambda_1\bar z}=\vartheta(z)$$

является регулярным решением уравнения (2.2.23). Поэтому остальные утверждения теоремы следуют из теоремы 2.1.4 и 2.1.5.

3. Теперь находим решение уравнения (2.2.23) с заданными нулями $\tilde a_1, \tilde a_2, \dots, \tilde a_r$ и полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$.

В силу аналога теоремы Абеля для существования решения однородного уравнения (2.2.6) необходимо и достаточно выполнения одного из условий

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k-\tilde{a}_k)=-\frac{\lambda_j|\Omega|}{\pi}(mod\,\Gamma),\qquad j=1{,}2. \tag{2.2.35}$$

Если выполнено условие (2.2.35) при $j=1$, то существует эллиптическая функция $\psi(z)$ второго рода с нулями $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_r$, полюсами $b_1,b_2,\dots,b_r$ и удовлетворяющая условию

$$\psi\big(z+h_j\big)=e^{-\lambda_1\bar{h}_j}\psi(z),\;\; j=1{,}2.$$

Такую функцию $\psi(z)$, согласно теореме 1.2.2, можно представить в виде [56]

$$\psi(z)=\prod_{k=1}^{r}\frac{\sigma(z-\tilde{a}_k)}{\sigma(z-b_k)}e^{dz}, \tag{2.2.36}$$

причем постоянная величина d находится из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\eta_1A+dh_1&=-\lambda_1\bar{h}_1\\ \eta_2A+dh_2&=-\lambda_1\bar{h}_2\end{aligned}\right\}, \tag{2.2.37}$$

где η_1,η_2 –циклические постоянные, которые совместно с h_1,h_2 связаны соотношением Лежандра

$$\eta_1h_2-\eta_2h_1=2\pi i,$$

$A=\sum_{k=1}^{r}(b_k-\tilde{a}_k)$, причём при $\lambda_1\in\Gamma_1$ нужно считать $r\geq 2$ а при $\lambda_1\,\overline{\in}\,\Gamma_1$, $r\geq 1$. Теперь, отыскивается решение уравнения (2.2.21) в виде

$$w(z)=\varphi_1(z)\psi(z)e^{\lambda_1\bar{z}}+\varphi_2(z)\psi(z)e^{\lambda_2\bar{z}}, \tag{2.2.38}$$

где $\varphi_1(z),\varphi_2(z)$ –искомые функции, $\psi(z)$ имеет вид (2.2.36), причѐм $\varphi_1(z)$ –двоякопериодическая функция класса C_*^1, $\varphi_2(z)$ – двоякопериодическая функция второго рода (регулярная, без полюсов), удовлетворяющая условию

$$\varphi_2(z+h_j) = e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\bar{h}_j}\varphi_2(z), \ \ j = 1,2. \tag{2.2.39}$$

Подставляя (2.2.39) в (2.2.23) относительно $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ получим уравнения вида

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar{z}} = \frac{f(z)}{(\lambda_1-\lambda_2)\psi(z)}e^{-\lambda_1\bar{z}} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}f_1(z), \tag{2.2.40}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\bar{z}} = \frac{f(z)}{(\lambda_2-\lambda_1)\psi(z)}e^{-\lambda_2\bar{z}} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}f_2(z). \tag{2.2.41}$$

Пусть $f_1, f_2 \in \mathrm{H}_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, тогда для разрешимости уравнения (2.2.40) в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы [53]

$$\iint\limits_{\Omega} f_1(z)d\,\Omega = \iint\limits_{\Omega} \frac{f(z)}{\psi(z)}e^{-\lambda_1\bar{z}}\,d\Omega = 0, \tag{2.2.42}$$

при этом решения (2.2.40) представимы в виде [53]

$$\varphi_1(z) = c_1 + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}T_\zeta f_1. \tag{2.2.43}$$

Разрешимость уравнения (2.2.41) зависит от свойства числа $(\lambda_2-\lambda_1)$:

1) $\lambda_2-\lambda_1 \in \Gamma_1$, 2) $\lambda_2-\lambda_1 \overline{\in} \Gamma_1$.

1) Если $\lambda_2-\lambda_1 = \tilde{\lambda}_2 \in \Gamma_1$, то для разрешимости уравнения (2.2.41) необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f_2(z)e^{\bar{\lambda}_2 z}d\Omega = \iint\limits_{\Omega} \frac{f(z)}{\psi(z)}e^{-\tilde{\lambda}_2\bar{z}+\bar{\lambda}_2 z}\,d\Omega = 0. \tag{2.2.44}$$

При этом уравнение (2.2.41) имеет решение вида

$$\varphi_2(z) = e^{-\bar{\lambda}_2 z}\left[c_2 + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}T_\zeta\left(f_2e^{\bar{\lambda}_2 z}\right)\right], \tag{2.2.45}$$

c_2 —постоянная.

2) При $\tilde{\lambda}_2 \overline{\in} \Gamma_1$ уравнение (2.2.41) имеет, притом единственное, решение вида

$$\varphi_2(z) = \frac{e^{\tilde{d}z}}{\lambda_2-\lambda_1}T_\sigma\left(f_2e^{-\tilde{d}z}\right), \tag{2.2.46}$$

где $\tilde{d}-$ постоянная как в теореме 2.2.10.

Таким образом, доказана

Теорема 2.2.11. *Пусть нули* $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_r$ *и полюсы* $b_1, b_2, \ldots, b_r$ *решения (2.2.21) связаны с собственными значениями характеристического уравнения 2.1.3* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *условием*

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k-\tilde{a}_k)=-\frac{\lambda_1|\Omega|}{\pi}(mod\,\Gamma),$$

и пусть $f(z)/\psi(z) \in \mathrm{H}_*^\alpha, 0<\alpha\leq 1,\ \psi(z)$ *имеет вид (2.2.36).*

Тогда:

1) при $\lambda_2-\lambda_1 \overline{\in} \Gamma_1$, *уравнение (2.2.21) разрешимо, если выполняется условие (2.2.42). При этом уравнение (2.2.21) имеет решение вида (2.2.38)*

$$w(z)=\psi(z)\left[\varphi_1(z)e^{\lambda_1\bar{z}}+\varphi_2(z)e^{\lambda_2\bar{z}}\right],$$

в котором функция $\varphi_1(z)$ *представима в виде (2.2.43), а* $\varphi_2(z)$ *выражается формулой (2.2.46).*

2) при $\lambda_2-\lambda_1 \in \Gamma_1$ *уравнение (2.2.21) имеет решение, если выполнены условия (2.2.42), (2.2.44).*

При этом решение (2.2.21) выражается формулой (2.2.38), в которой $\varphi_1(z)$ *представляется в виде (2.2.42), а* $\varphi_2(z)$ *имеет вид (2.2.46).*

2.3. Двоякопериодические решения уравнения (2.1.1) с переменными коэффициентами

В этом параграфе для уравнения [2], [17]-[20], [44], [57]-[59], [66]

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}}+a(z)w_{\bar{z}}+b(z)w=f(z), \tag{2.3.0}$$

когда коэффициенты $a(z), b(z) \in C_*^{1,\alpha}, C_*^{1,\alpha}=C_*^1\cap H_*^\alpha,\ 0<\alpha\leq 1$ и $f(z)\in H_*^\alpha$. дадим описание ядра и коядра оператора L в классе C_*^2 и $\tilde{C}_*^2$.

1. Сначала дадим описания ядра оператора L, то есть многообразия однородного уравнения

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}}+a(z)w_{\bar{z}}+b(z)w=0. \tag{2.3.1}$$

Определение. Два решения уравнения (2.3.1) $\varphi(z), \psi(z) \in C^2(\mathcal{D})$ называются фундаментальными в области $\mathcal{D}$, если их определитель Вронского

$$W[\varphi, \psi] = \varphi(z)\psi_{\bar{z}}(z) - \psi(z)\varphi_{\bar{z}}(z) \neq 0$$

всюду в области $\mathcal{D}$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\varphi(z), \psi(z) \in C_*^2$- система фундаментальных решений уравнения (2.3.1) и*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} a(z)d\Omega \in \Gamma, \tag{2.3.2}$$

Ω —основной параллелограмм решѐтки Γ, $\Gamma = \{m_1h_1 + m_2h_2;\ m_1, m_2 -$ целые$\}$. Тогда всякое решение (2.3.1) из класса C_*^2 представимо в виде

$$w(z) = c_1\varphi(z) + c_2\psi(z), \tag{2.3.3}$$

где c_1, c_2 —произвольные постоянные.

Теорема 2.3.2. *Пусть $\vartheta(z) \in C_*^2$- ненулевое решение (2.3.1) и $a_0 \,\overline{\in}\, \Gamma$. Тогда всякое решение уравнения (2.3.1) представляется формулой*

$$w(z) = c\vartheta(z), \tag{2.3.4}$$

где c —произвольная постоянная.

Доказательству этих теорем предпошлем лемму.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\varphi(z), \psi(z) \in C_*^2$ два решения (2.3.1). Тогда их определитель Вронского $\chi(z) = W[\varphi, \psi]$ является решением уравнения*

$$\chi_{\bar{z}} + a(z)\chi = 0. \tag{2.3.5}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(z), \psi(z) \in C_*^2$ как в условии леммы, то есть

$$\varphi_{\bar{z}\bar{z}} + a\varphi_{\bar{z}} + b\varphi = 0,$$
$$\psi_{\bar{z}\bar{z}} + a\psi_{\bar{z}} + b\psi = 0.$$

Умножая первое уравнение на ψ, а второе на φ и вычитая их, получим

$$\varphi_{\bar{z}\bar{z}}\psi - \psi_{\bar{z}\bar{z}}\varphi + a(\psi\varphi_{\bar{z}} - \varphi\psi_{\bar{z}}) = 0.$$

А так как

$$(\varphi\psi_{\bar{z}} - \psi\varphi_{\bar{z}})_{\bar{z}} = -(\varphi_{\bar{z}\bar{z}}\psi - \varphi\psi_{\bar{z}\bar{z}}),$$

то последнее уравнение имеет вид (2.3.5), где через $\chi(z)$ обозначено $\chi(z) = \varphi(z)\psi_{\bar{z}} - \psi(z)\varphi_{\bar{z}}$.

Теперь переходим к доказательству теорем 2.3.1 и 2.3.2. Как известно [53], [56] всякое решение уравнения (2.3.5) из класса C_*^1 представимо в виде

$$\chi(z) = \begin{cases} c exp\left(T_\zeta a + bz\right) & \text{если } a_0 \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } a_0 \overline{\in} \Gamma, \end{cases} \tag{2.3.6}$$

можно здесь вести условие нормировку и считать, что $\chi(z_0) = 1, z_0 \in \Omega$.

Пусть сначала $a_0 \overline{\in} \Gamma$ и $\vartheta(z)$ —ненулевое фиксированное решение (2.3.5) из класса C_*^2 и $w(z)$ —другое решение тоже из класса C_*^2. Тогда согласно лемме и формулы (2.3.6) их определитель Вронского

$$W[w, \vartheta] \equiv 0.$$

Это означает, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{w}{\vartheta}\right) = 0.$$

Так как $w/\vartheta \in C_*^1$, то согласно теореме Лиувилля (свойство эллиптических функций нулевого порядка) [1], [25]

$$w(z) = c\,\vartheta(z),$$

где c —некоторая постоянная, и теорема 2.3.2 доказана.

Докажем теорему 2.3.1. Согласно лемме, если $\varphi, \psi \in C_*^2$- два частных решения (2.3.2), то $W[\varphi, \psi] \neq 0$.

Если $w \in C_*^2$ —другое решение уравнения (2.3.1), то функции

$$(w\varphi_{\bar{z}} - \varphi w_{\bar{z}})\frac{1}{\chi(z)}, (w\psi_{\bar{z}} - \psi w_{\bar{z}})\frac{1}{\chi(z)},$$

где $\chi(z)$ —вронскиан решений φ и ψ, являются аналитическими в области Ω.

В самом деле, функции $(w\varphi_{\bar{z}} - \varphi w_{\bar{z}}), (w\psi_{\bar{z}} - \psi w_{\bar{z}})$ и $\chi(z)$ удовлетворяют уравнению (2.3.5). Поэтому для отношения$(w\varphi_{\bar{z}} - \varphi w_{\bar{z}})/\chi(z)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{w\varphi_{\bar{z}}-\varphi w_{\bar{z}}}{\chi(z)}\right)=-\frac{a(z)(w\varphi_{\bar{z}}-\varphi w_{\bar{z}})\chi(z)}{\chi^2(z)}+\frac{a(z)(w\varphi_{\bar{z}}-\varphi w_{\bar{z}})\chi(z)}{\chi^2(z)}=0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{w\psi_{\bar{z}}-\psi w_{\bar{z}}}{\chi(z)}\right)=0.$$

А так как функции $(w\varphi_{\bar{z}}-\varphi w_{\bar{z}})/\chi(z)\in C_*^1,(w\psi_{\bar{z}}-\psi w_{\bar{z}})/\chi(z)\in C_*^1$, то согласно теореме Лиувилля [49]

$$\left.\begin{aligned}w\psi_{\bar{z}}-\psi w_{\bar{z}}=c_1\chi(z)\\ w\varphi_{\bar{z}}-\varphi w_{\bar{z}}=c_2\chi(z)\end{aligned}\right\},$$

где c_1,c_2 —произвольные постоянные.

Исключая из этой системы $w_{\bar{z}}$, получим решение уравнения (2.3.2) в виде (2.3.3). Теперь методом факторизации покажем существование частных решений уравнения (2.3.1) в классе C_*^2, [54].

Теорема 2.3.3. *Пусть коэффициенты* $a(z),b(z)\in C_*^1$ *и связаны между собой соотношениями*

$$a(z)=-\frac{1}{c(z)}c_{\bar{z}},\qquad b(z)=-c^2(z),$$

причѐм

$$c(z)\in C_*^1 \text{ и } \mathrm{c}_0=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}c(z)d\Omega=0.$$

Тогда уравнение (2.3.2) имеет систему фундаментальных решений

$$\vartheta_1=exp\left(-T_\zeta c\right),\vartheta_2=exp\left(T_\zeta c\right)T_\zeta(ce^{-2T_\zeta c}).$$

В самом деле, при выполнении условий теоремы функция

$$\vartheta_1=exp\left(-T_\zeta c\right)\in C_*^2 \quad \text{при } c_0=0,$$

$$\vartheta_1\left(z+h_j\right)=exp\left[-T_\zeta c\left(z+h_j\right)\right]=exp\left(-T_\zeta c+\eta_j c_0\right)=exp\left(-T_\zeta c\right)=\vartheta_1(z),$$

$$\vartheta_{1\bar{z}}=-cexp\left(-T_\zeta c\right),\vartheta_{1\bar{z}\bar{z}}=-c_{\bar{z}}exp\left(-T_\zeta c\right)+c^2exp\left(-T_\zeta c\right).$$

Подставляя $\vartheta_1,\vartheta_{1\bar{z}},\vartheta_{1\bar{z}\bar{z}}$ в уравнение (2.3.2) , убедимся, что

$$\vartheta_{1\bar{z}\bar{z}} + a\vartheta_{1\bar{z}} + b\vartheta_1 = 0.$$

Следовательно, при выполнении условии теоремы $\vartheta_1(z) \in C_*^2$ —частное решение уравнения (2.3.2).

Если $\vartheta(z) \in C_*^2$ —другое частное решение, то их определитель Вронского

$$\chi(z) = W[\vartheta, \vartheta_1] = \vartheta_z\vartheta_1 - \vartheta\vartheta_{1\bar{z}}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} + a\chi = 0.$$

Так как по условию теоремы $c(z) \neq 0, c(z) \in C_*^1$, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} a(z)d\Omega = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \frac{c_{\bar{z}}}{c}d\Omega = 0.$$

И последнее уравнение в классе C_*^1 имеет решение вида [56]

$$\chi(z) = c_2 c(z),$$

где c_2 —произвольная постоянная. Из этого равенства для нахождения $\vartheta(z)$ получим уравнение вида

$$\vartheta_{\bar{z}} - c(z)\vartheta = c_2 c(z)e^{-T_\zeta c}\ .$$

Отыскивая решение этого уравнения в виде

$$\vartheta(z) = \mu(z)e^{T_\zeta c},$$

для нахождения $\mu(z)$ получим неоднородное уравнение Коши-Римана

$$\mu_{\bar{z}} = c_2 c(z)e^{T_\zeta c}.$$

Так как, $T_\zeta c \in C_*^1$, то легко видеть, что

$$\iint\limits_{\Omega} c(z)e^{-2T_\zeta c}d\Omega = -\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(e^{-2T_\zeta c})d\Omega = 0.$$

Таким образом, для $\mu(z)$ получим [56]

$$\mu(z) = c_1 + c_2 T_\zeta(ce^{-2T_\zeta c}),$$

где c_1 −произвольная постоянная.

Следовательно, решение уравнения (2.3.2) имеет вид

$$w(z) = c_1 e^{-T\zeta c} + c_2 e^{-T\zeta c} T_\zeta (c e^{-2T\zeta c}).$$

Второе частное решение представимо в виде

$$\vartheta_2(z) = e^{-T\zeta c} T_\zeta (c e^{-2T\zeta c}).$$

Легко видеть, что

$$W[\vartheta_1, \vartheta_2] = c(z) e^{-4T\zeta c} \neq 0.$$

Значит, решения $\vartheta_1(z), \vartheta_2(z)$ составляют фундаментальную систему решений.

Теорема 2.3.4. *Пусть $a(z), b(z) \in C_*^1$ связаны условием*

$$2a_{\bar{z}} + a^2 = 4b \ . \qquad (2.3.7)$$

Тогда: при

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} a(t)\, d\Omega \,\overline{\in}\, \Gamma$$

уравнение (2.3.1) в классе C_*^2 имеет только нулевое решение $w(z) \equiv 0$.

2) при $\tilde{a}_0 \in \Gamma$ −имеет одно решение вида

$$\vartheta(z) = exp\left(-\frac{1}{2} T_\zeta a - dz\right),$$

где постоянная d удовлетворяет уравнению

$$exp(\tilde{a}_0 \eta_1 + dh_1) = exp(\tilde{a}_0 \eta_2 + dh_2) = 1. \qquad (2.3.6^1)$$

Доказательство. Пусть $a(z), b(z) \in C_*^1$ связаны условием $(2.3.6^1)$. Тогда левую часть (2.3.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} + a \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + bw = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{a}{2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{a}{2} w\right)$$

Таким образом, надо найти решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+\frac{a}{2}w\right)=0. \qquad (2.3.8)$$

Как показано в [56], для всякого решения уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}+a\varphi=0$$

в классе C_*^1 справедлива формула (2.3.6).

Поэтому, если $\tilde{a}_0=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} a(t)\,d\Omega \,\overline{\in}\, \Gamma$, то из (2.3.5) получим

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+\frac{a}{2}w=0.$$

Ещѐ раз применяя формулы (2.3.7) в случае $\tilde{a}_0 \,\overline{\in}\, \Gamma$, получим тривиальное решение уравнения (2.3.2) $w(z)\equiv 0$.

2) если $\tilde{a}_0 \in \Gamma$, тогда из (2.3.8) согласно формуле (2.3.6) имеем

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+\frac{a}{2}w=c_1 e^{-\frac{1}{2}T_\zeta a-dz}, \qquad (2.3.9)$$

где постоянная d соответствует условию $(2.3.6^1)$, c_1 —некоторая постоянная. Докажем, что $c_1=0$.

Решение уравнения (2.3.9) будем искать в виде

$$w(z)=\varphi(z)e^{-\frac{1}{2}T_\zeta a-dz}, \qquad (2.3.10)$$

где $\varphi(z)\in C_*^1$ —искомая функция.

Подставляя (2.3.10) в (2.3.9), для искомой функции $\varphi(z)$ получим уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}=c_1$$

Так как $\varphi(z)\in C_*^1$, то после интегрирования последнего уравнения получим

$$0=\iint\limits_{\Omega} c_1\,d\Omega=c_1|\Omega|,\ \ |\Omega|\neq 0, |\Omega|=mes\Omega,$$

поэтому $c_1 = 0$.

Тогда уравнение (2.3.9) примет вид

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{a}{2} w = 0,$$

и опять согласно формуле (2.3.6), получим

$$w(z) = ce^{-\frac{1}{2}T_\zeta a - dz},$$

где c —произвольная постоянная. Отсюда функция

$$\vartheta_1 = exp\left(-\frac{1}{2}T_\zeta a - dz\right)$$

есть частное решение уравнения (2.3.2).

Можно найти ещѐ другие зависимости между $a(z), b(z)$, позволяющие найти частные решения уравнения (2.3.2).

Теоремы 2.3.1 и 2.3.2 допускают обобщения для решения (2.3.2) из класса $\tilde{C}_*^2$ с заданными полюсами.

Теорема 2.3.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1 и* $a_0 \in \Gamma$. *Тогда для решения уравнения (2.3.2) из класса* $\tilde{C}_*^2$ *существуют эллиптические функции* $\varphi_1(z)$ *и* $\varphi_2(z)$ *такие, что решение (2.3.2) представимо в виде*

$$w(z) = \varphi_1(z)\vartheta_1(z) + \varphi_2(z)\vartheta_2(z).$$

Теорема 2.3.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2 и* $a_0 \overline{\in} \Gamma$. *Тогда любое решение уравнения (2.3.1) из класса* $\tilde{C}_*^2$ *представимо в виде*

$$w(z) = \varphi(z)\vartheta(z),$$

где $\varphi(z) -$ *эллиптическая функция, имеющая полюсы решения (2.3.1).*

Доказательство теорем 2.3.5 и 2.3.6 ничем не отличаются от доказательства теорем 2.3.1, 2.3.2. Достаточно провести доказательство этих теорем для решений класса $C^2(\Omega \backslash \Omega_0)$, где Ω_0 —множество полюсов решения (2.3.1).

1. Решение неоднородного уравнения (2.3.0).

Доказанные теоремы 2.3.1, 2.3.6 позволяют найти решения неоднородного уравнения и описать коядро задачи в классе C_*^2 и $\tilde{C}_*^2$.

Дадим описания коядра уравнения (2.3.0), в классе C_*^2, при наличии фундаментальных решений однородного уравнения (2.3.1).

Теорема 2.3.7. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1. Тогда для разрешимости уравнения (2.3.0) в классе C_*^2 необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{f(z)}{\psi_1(z)} \vartheta_1 d\Omega = 0, \iint\limits_{\Omega} \frac{f(z)}{\psi_1(z)} \vartheta_2 d\Omega = 0, \tag{2.3.10}$$

где $\psi_1(z)$ −вронскиан фундаментальных решений $\vartheta_1(z), \vartheta_2(z)$ однородного уравнения. При этом решения (2.3.0) представимы в виде

$$w(z) = c_1\vartheta_1(z) + c_2\vartheta_2(z) - \vartheta_1 T_\zeta\left(\frac{f}{\psi_1}\vartheta_2\right) + \vartheta_2 T_\zeta\left(\frac{f}{\psi_1}\vartheta_1\right). \tag{2.3.11}$$

В самом деле, отыскиваем решение неоднородного уравнения (2.3.0) в классе C_*^2 в виде

$$w(z) = \varphi(z)\vartheta_1(z) + \psi(z)\vartheta_2(z), \tag{2.3.12}$$

где $\vartheta_1, \vartheta_2 \in C_*^2$- фундаментальная система решений однородного уравнения (2.3.1). Обозначаем через $\psi_1(z)$ −вронскиан решений ϑ_1, ϑ_2, $\psi_1(z) = W[\vartheta_1, \vartheta_2]$.

Подставляя в (2.3.0) для нахождения $\varphi(z), \psi(z)$, получим неоднородные уравнения Коши-Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = -\frac{1}{\psi_1} f\vartheta_2, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{\psi_1} f\vartheta_1 \tag{2.3.13}$$

Как известно [53], условие (2.3.10) является необходимым и достаточным для разрешимости уравнений (2.3.13) в классе C_*^2. При этом

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= c_1 - T_\zeta\left(\frac{1}{\psi_1} f\vartheta_2\right), \\ \psi(z) &= c_2 + T_\zeta\left(\frac{1}{\psi_1} f\vartheta_1\right), \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

c_1, c_2 —произвольные постоянные. Подставляя (2.3.14) в (2.3.12), получим решение уравнения (2.3.0) в виде (2.3.11).

Теорема 2.3.8. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2 и* $a_0 \overline{\in} \Gamma$. *Тогда для разрешимости уравнения (2.3.0) в классе* C_*^2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint_{\Omega} e^{-T_\zeta(\tilde{\vartheta})} T_\sigma \left(\frac{1}{\vartheta} f e^{T_\zeta \tilde{\vartheta}}\right) d\Omega = 0, \qquad (2.3.15)$$

где $\tilde{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}(2\vartheta_{\bar{z}} + a\vartheta)$, ϑ *—ненулевое решение однородного уравнения (2.3.1) и* $T_\sigma \rho$ *имеет вид*

$$T_\sigma \rho = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t - z - a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t - z)} d\Omega, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega.$$

При этом уравнение (2.3.0) имеет решение вида

$$w(z) = c\vartheta(z) + \vartheta T_\zeta \left[e^{-T_\zeta \tilde{\vartheta}} T_\sigma \left(\frac{1}{\vartheta} f e^{T_\zeta \tilde{\vartheta}}\right)\right], \qquad (2.3.16)$$

где c *—произвольная постоянная.*

В самом деле, пусть $\vartheta \in C_*^2$ — ненулевое решение уравнения (2.3.1) и

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega \,\overline{\in}\, \Gamma.$$

Будем искать решение уравнения (2.3.0) в виде

$$w(z) = \chi(z)\vartheta(z), \qquad (2.3.17)$$

где $\chi(z) \in C_*^2$ —искомая функция. Подставляя (2.3.17) в (2.3.0), для нахождения $\chi(z)$ получим уравнение вида

$$\chi_{\bar{z}\bar{z}} + \frac{1}{\vartheta}(2\vartheta_{\bar{z}} + a\vartheta)\chi_{\bar{z}} = \frac{1}{\vartheta} f(z). \qquad (2.3.18)$$

Обозначим через $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}(2\vartheta_{\bar{z}} + a\vartheta)$.

Тогда легко видеть, что

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \tilde{\vartheta}(z)d\Omega = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} a(z)d\Omega = a_0 \overline{\in} \Gamma.$$

Поэтому, согласно результатам работы [54], из (2.3.18) получим

$$\chi_{\bar{z}} = e^{-T_\zeta \tilde{\vartheta}} T_\sigma \left(\frac{1}{\vartheta} f e^{T_\zeta \tilde{\vartheta}}\right), \tag{2.3.19}$$

где

$$T_\sigma \rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t - z - a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t - z)} d\Omega.$$

Так как $\chi(z) \in C_*^2$, то для разрешимости уравнения (2.3.19) необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} e^{-T_\zeta \tilde{\vartheta}}\, T_\sigma \left(\frac{1}{\vartheta} f e^{T_\zeta \tilde{\vartheta}}\right) d\Omega = 0.$$

При выполнении этого условия из (2.3.19) получим [44]

$$\chi(z) = c + e^{-T_\zeta \tilde{\vartheta}} T_\sigma \left(\frac{1}{\vartheta} f e^{T_\zeta \tilde{\vartheta}}\right).$$

Подставляя $\chi(z)$ в (2.3.17) , получим формулу (2.3.16).

Аналогично § 2.2 можно найти решение (2.3.0) в классе $\tilde{C}_*^2$, если выполнены условия теорем 2.1.7 и 2.1.8.

Глава 3

Двоякопериодические решения эллиптических систем высокого порядка.

3.1. Многообразие решений однородной системы с постоянными коэффициентами

В этом параграфе дадим описание многообразия решений однородной системы

$$Lw \equiv \partial_{\bar{z}}^{n} w + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} w + \cdots + a_n w = 0, \qquad (3.1.0)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ −постоянные, [5]-[7], [68], [75].

Решение уравнения (3.1.0) будем искать в классе $C^n(\Omega)$, Ω −некоторая область плоскости, $C^n(\Omega)$ −банаховое пространство функций, имеющих непрерывные частные производные (по x и y) до порядка n включительно в Ω.

Структура многообразия решения системы (3.1.0) зависит от свойства корней так называемого характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad (3.1.1)$$

Определение. Система n −решений уравнения (3.1.0) $\vartheta_1(z), \vartheta_2(z), \dots, \vartheta_n(z)$ называется фундаментальной, если определитель Вронского

$$W[\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n] = \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_n \\ \partial_{\bar{z}}\vartheta_1 & \partial_{\bar{z}}\vartheta_2 \dots & \partial_{\bar{z}}\vartheta_n \\ \partial_{\bar{z}}^2\vartheta_1 & \partial_{\bar{z}}^2\vartheta_2 \dots & \partial_{\bar{z}}^2\vartheta_n \\ - - - & - & - - \; - - \\ \partial_{\bar{z}}^{n-1}\vartheta_1 & \partial_{\bar{z}}^{n-1}\vartheta_2 \dots & \partial_{\bar{z}}^{n-1}\vartheta_n \end{vmatrix} \neq 0$$

всюду в некоторой области Ω плоскости $\mathbb{C}$.

Покажем, что уравнение (3.1.0) всегда имеет фундаментальную систему решений.

1) Пусть все корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ различны. Тогда функции

$$\vartheta_1 = e^{\lambda_1 \bar{z}}, \vartheta_2 = e^{\lambda_2 \bar{z}}, \dots, \vartheta_n = e^{\lambda_n \bar{z}}, \qquad (3.1.2)$$

являются решениями уравнения (3.1.0). Докажем, что эти решения образуют фундаментальную систему решений. Вронскиан $W\left(e^{\lambda_1 \bar{z}}, e^{\lambda_2 \bar{z}}, \dots, e^{\lambda_n \bar{z}}\right) = W(z)$ имеет вид

$$W(z) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 \bar{z}} & e^{\lambda_2 \bar{z}} & \dots & e^{\lambda_n \bar{z}} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 \bar{z}} & \lambda_2 e^{\lambda_2 \bar{z}} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n \bar{z}} \\ - & - & - & - \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 \bar{z}} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 \bar{z}} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n \bar{z}} \end{vmatrix} = e^{\bar{z}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ - & - & - & - \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

так как $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -a_1$, а детерминант

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ - & - & - & - \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} \left(\lambda_i - \lambda_j\right),$$

то

$$W(z) = e^{-a_1 \bar{z}} \prod_{1 \le j < i \le n} \left(\lambda_i - \lambda_j\right), \qquad (3.1.3)$$

Поскольку корни λ_j –различны, получим, что $W(z) \neq 0$ всюду в области Ω.

Следовательно, функции $e^{\lambda_1 \bar{z}}, e^{\lambda_2 \bar{z}}, \dots, e^{\lambda_n \bar{z}}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1.0).

2) Корни характеристического уравнения различны, но среди них есть кратные.

Заметим, что если ν –корень кратности s многочлена

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

то

$$F(\nu) = 0, \qquad F^1(\nu), \dots, F^{(s-1)}(\nu) = 0. \qquad (3.1.4)$$

Продифференцируем m раз, $m < s$, по λ равенство

$$L\left(e^{\lambda \bar{z}}\right) = e^{\lambda \bar{z}} F(\lambda)$$

Так как операции L и операция дифференцирования по λ перестановочные

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[L(e^{\lambda\bar{z}})\right] = L\left[\bar{z}^m e^{\lambda\bar{z}}\right] = \frac{d^m}{d\lambda^m}\left[e^{\lambda\bar{z}}F(\lambda)\right], \qquad (3.1.5)$$

то при дифференцировании в правой части, используя правило Лейбница, получим

$$L\left[\bar{z}^m e^{\lambda\bar{z}}\right] = \frac{d^m}{d\lambda^m}\left[e^{\lambda\bar{z}}F(\lambda)\right] = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \left(e^{\lambda\bar{z}}\right)^{m-j} F^{(j)}(\lambda). \qquad (3.1.6)$$

Подставляя в этом равенстве $\lambda = \nu$ (ν –корень $F(\lambda)$ кратности s) и пользуясь равенством (3.1.4), получим

$$L(e^{\nu\bar{z}}) = L(\bar{z}e^{\nu\bar{z}}) = 0, \dots, L(\bar{z}^{\nu-1}e^{\nu\bar{z}}) = 0.$$

Таким образом, корню ν кратности s соответствуют s решений вида

$$\vartheta_1 = e^{\nu\bar{z}}, \vartheta_2 = \bar{z}e^{\nu\bar{z}}, \dots, \vartheta_s \bar{z}^{\nu-1}e^{\nu\bar{z}}, \qquad (3.1.7)$$

В силу сказанного, если $F(\lambda) = 0$ имеет корни λ_1 кратности s_1, λ_2 кратности s_2 и т.д. λ_p кратности s_p, $s_1 + s_2 + \dots + s_p = n$, то уравнение (3.1.0) имеет решения

$$\begin{array}{c} e^{\lambda_1\bar{z}}, \bar{z}e^{\lambda_1\bar{z}}, \dots, \bar{z}^{s_1-1}e^{\lambda_1\bar{z}} \\ e^{\lambda_2\bar{z}}, \bar{z}e^{\lambda_2\bar{z}}, \dots, \bar{z}^{s_2-1}e^{\lambda_2\bar{z}} \\ - - - - - - - - - - - \\ e^{\lambda_p\bar{z}}, \bar{z}e^{\lambda_p\bar{z}}, \dots, \bar{z}^{s_p-1}e^{\lambda_p\bar{z}} \end{array} \qquad (3.1.8)$$

Аналогичными рассуждениями, которые приводились в предыдущем случае, можно доказать, что все выписанные функции (3.1.8) образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1.0).

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *–различные корни характеристического уравнения (3.1.1). Тогда для любого решения уравнения (3.1.0)* $\vartheta(z) \in C^n(\Omega)$ *существуют аналитические функции (однозначные)* $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_n(z)$ *такие, что справедлива формула*

$$\vartheta(z) = \Phi_1(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \Phi_2(z)e^{\lambda_2\bar{z}} + \dots + \Phi_n e^{\lambda_n\bar{z}}, \qquad (3.1.9)$$

и это представление единственно.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – различные корни уравнения (3.1.1), и $\vartheta(z) \in C^n(\Omega)$ –решение уравнения (3.2.0).Тогда согласно теореме Виета, многочлен $F(\lambda)$можно разложить на простые множители

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

Отсюда следует, что уравнение (3.1.10) можно записать (или факторизовать) в виде

$$L\vartheta \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_n\right)\vartheta = 0. \qquad (3.1.10)$$

Если $\vartheta(z)$ −решение этого уравнения, то функция

$$\vartheta_1(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_3\right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_n\right)\vartheta \qquad (3.1.11)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \bar{z}} - \lambda_1 \vartheta_1 = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\vartheta_1(z) = \Phi_1(z) e^{\lambda_1 \bar{z}},$$

где $\Phi_1(z)$ −произвольная (однозначная) аналитическая функция. Подставляя значение ϑ_1 в левую часть, и вводя новое обозначение

$$\vartheta_2(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_3\right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_n\right)\vartheta, \qquad (3.1.12)$$

получим уравнение вида

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \bar{z}} - \lambda_2 \vartheta_2 = \Phi_1(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} .$$

Умножая обе части на $e^{-\lambda_1 \bar{z}}$, получим $\left(\vartheta_2 e^{-\lambda_2 \bar{z}}\right)\bar{z} = \Phi_1(z) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{z}}$.

После интегрирования находим ϑ_2:

$$\vartheta_2(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) e^{\lambda_2 \bar{z}} \ ,$$

где $\Phi_2(z)$ −аналитическая функция; последовательно повторяя эту процедуру для $\vartheta_{n-1}(z)$, получим

$$\vartheta_{n-1}(z) = \Phi_1(z) e^{\lambda_1 \bar{z}} + \Phi_2(z) e^{\lambda_2 \bar{z}} + \dots + \Phi_{n-1}(z) e^{\lambda_{n-1} \bar{z}},$$

$$\vartheta_{n-1}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_n\right)\vartheta.$$

Окончательно для искомого решения получим уравнение вида

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\bar{z}} - \lambda_n\vartheta = \Phi_1(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \ldots + \Phi_{n-1}(z)e^{\lambda_{n-1}\bar{z}} \ ,$$

где $\Phi_1(z)..,\Phi_{n-1}(z)$ –аналитические функции.

Из последнего уравнения, как и выше, находим

$$\vartheta(z) = \Phi_1(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \cdots + \Phi_n(z)e^{\lambda_n\bar{z}},$$

$\Phi_j(z)$ –аналитические функции, $j = 1,2,\ldots,n$.

Легко видеть, что представление (3.1.9) единственно. Вследствие фундаментальности функции $e^{\lambda_1\bar{z}}, e^{\lambda_2\bar{z}}, \ldots$, при $z \neq \bar{z}$ и $z \neq -\bar{z}$ из равенства (3.1.9) в случае $\vartheta(z) \equiv 0$ получим, что $\Phi_1(z) \equiv 0, \Phi_2(z) \equiv 0, \ldots, \Phi_n(z) \equiv 0$.

Теорема 3.1.2. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *–корни уравнения (3.1.1) с кратностями* $s_1, s_2, \ldots, s_p$, $s_1 + s_2 + \cdots + s_p = n$. *Тогда любое решение уравнения (3.1.0),* $\vartheta(z) \in C^n(\Omega)$ *представляется формулой*

$$\vartheta(z) = \sum_{j=1}^{\rho} \rho_j(z)e^{\lambda_j\bar{z}}, \qquad (3.1.13)$$

где

$$\rho_j(z) = \Phi_i^j(z) + \Phi_2^j(z)\bar{z} + \cdots + \Phi_{s_j}^j(z)\frac{\bar{z}^{s_j-1}}{(s_j-1)!}$$

$\Phi_1^j(z), \Phi_2^j(z), \ldots, \Phi_{s_j}^j(z)$ *–аналитические функции,* $j = 1,2\ldots,\ \rho$; $s_1 + s_2 + \cdots + s_p = n$.

Доказательство. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ –корни характеристического уравнения с кратностями $s_1, s_2, \ldots, s_p, s_1 + s_2 + \cdots + s_p = n$, то уравнение (3.1.0) можно записать в виде

$$L_1\vartheta = \left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \lambda_1\right)^{s_1}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \lambda_2\right)^{s_2}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \lambda_p\right)^{s_p}\vartheta = 0, \qquad (3.1.14)$$

Как при доказательстве теоремы (3.1.11), вводя новую функцию

$$\vartheta_1(z) = \left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \lambda_2\right)^{s_2}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \lambda_p\right)^{s_p}\vartheta, \qquad (3.1.15)$$

для $\vartheta_1(z)$ получим уравнение вида

$$L_{s_1}\vartheta_1 = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_1\right)^{s_1} \vartheta_1 = 0. \qquad (3.1.16)$$

Лемма 3.1.1. *Для любой функции $f(z) \in C^m$ имеет место формула*

$$L\left[e^{\lambda\bar{z}} f(z)\right] = e^{\lambda\bar{z}}\left[F(\chi)f(z) + \frac{F^1(\lambda)}{1!} f_{\bar{z}}(z) + \cdots + \frac{F^{(m)}(\lambda)}{m!} f_{\bar{z}}^{(m)}\right], \quad (3.1.17)$$

Доказательство леммы аналогично известной формуле в теории обыкновенных уравнений [28].

Теперь, отыскивая решение уравнения (3.1.16) в виде

$$\vartheta_1(z) = e^{\lambda_1\bar{z}}\chi_1(z), \qquad (3.1.18)$$

и при обозначениях $l(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1}$, согласно формуле леммы будем иметь

$$L_{s_1}\left[e^{\lambda\bar{z}}\chi(z)\right] = e^{\lambda_1\bar{z}}\left[l(\lambda)\chi(z) + \frac{l^1(\lambda)}{1!}\chi_{\bar{z}}(z) + \cdots + \frac{l^{(s_1)}(\lambda_1)}{s_1!} f_{\bar{z}}^{(s_1)}(z)\right].$$

Подставляя в этой формуле $\lambda = \lambda_1$ и учитывая, что

$$l(\lambda_1) = 0, l'(\lambda_1) = 0, \dots, l^{(s_1-1)}(\lambda_1) = 0, l^{(s_1)}(\chi_1) \neq 0$$

получим

$$L_{s_1}\left[e^{\lambda_1\bar{z}}\chi(z)\right] = \chi_{1\bar{z}}^{(s_1)}(z). \qquad (3.1.19)$$

Из этой формулы следует, что если $\vartheta_1(z)$ −решение (3.1.16), то функция $\chi(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^{s_1}\chi}{\partial\bar{z}^{s_1}} \equiv \chi_{1\bar{z}}^{(s_1)}(z) = 0, \qquad (3.1.20)$$

то есть функция $\chi\,(z)$ является полианалитической [5], [15]. Справедливо и обратное утверждение.

Свойства полианалитических функций изучены в работах [3]-[5], [42]-[45].

После интегрирования (3.1.20) получим

$$\chi_1(z) = \psi_1^1(z) + \psi_2^1(\bar{z}) + \cdots + \psi_{s_j}^1(z)\frac{\bar{z}^{s_j-1}}{(s_j-1)!}, \qquad (3.1.21)$$

где $\psi_1^1(z), \psi_2^1(\bar{z}), \dots, \psi_{s_j}^1(z)$ – аналитические функции.

Подставляя (3.1.21) в (3.1.18), затем в (3.1.15), находим на первом шаге уравнение вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right)^{s_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_3\right)^{s_3} \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_p\right)^{s_p} \vartheta = e^{\lambda_1 \bar{z}} \chi_1(z), \tag{3.1.22}$$

$\chi_1(z)$ –определяется формулой (3.1.21),

Обозначая через ϑ_2:

$$\vartheta_2(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_3\right)^{s_3} \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_p\right)^{s_p} \vartheta, \tag{3.1.23}$$

для ϑ_2 получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right)^{s_2} \vartheta_2 = e^{\lambda_1 \bar{z}} \chi_1(z). \tag{3.1.24}$$

Отыскивая решение этого уравнения в виде

$$\vartheta_2 = e^{\lambda_2 \bar{z}} \chi_2(z) \tag{3.1.25}$$

и подставляя в (3.1.24) по формуле (3.1.19), где вместо λ_1 подставлено λ_2, получим уравнение вида

$$\frac{\partial^{s_2} \chi}{\partial \bar{z}^{s_2}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{z}} \chi(z) = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{z}} \left[\psi_1^1(z) + \psi_2^1(\bar{z})\bar{z} + \dots + \psi_{s_j}^1(z) \frac{\bar{z}^{s_j - 1}}{(s_j - 1)!}\right] \tag{3.1.26}$$

Общее решение уравнения (3.1.26) $\chi_2(z)$ представимо в виде

$$\chi_2(z) = \chi_2^1(z) + \chi_2^2(z), \tag{3.1.27}$$

где $\chi_2^1(z)$ решение однородного уравнения $\frac{\partial^{s_2} \chi_2^1}{\partial \bar{z}^{s_2}} = 0$, a $\chi_2^2(z)$ –частное решение неоднородного уравнения (3.1.26).

При интегрировании неоднородного уравнения надо учесть, что если Ω –односвязная область и $0 \in \Omega$ –фиксируется, $z \in \Omega$ – произвольная точка из Ω, то

$$\int_0^z \frac{\bar{z}^s}{s!} e^{\lambda \bar{z}} d\bar{z} = \left[\frac{\bar{z}^s}{\lambda s!} - \frac{\bar{z}^{s-1}}{\lambda^2 (s-1)!} + \cdots + (-1)^s \frac{1}{\lambda^{s+1}}\right] e^{\lambda \bar{z}}.$$

Из этого выражения следует, что при интегрировании (3.1.26) в правой части изменяются только коэффициенты при $\bar{z}^s, s = 0,1,2, \dots, s_j - 1$.

Поэтому для частного решения неоднородного уравнения (3.1.26) получим

$$\chi_2^2(z) = \left[\tilde{\psi}_1^1(z) + \tilde{\psi}_2^1(z)\bar{z} + \cdots + \tilde{\psi}_{s_j}^1(z) \frac{\bar{z}^{s_j - 1}}{(s_j - 1)!}\right] e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{z}},$$

$\tilde{\psi}_1^1(z) + \tilde{\psi}_2^1(z)\bar{z}, \dots, \tilde{\psi}_{s_j}^1(z)$ −аналитические функции.

Решение однородного уравнения получим в виде

$$\chi_2^1(z) = \left[\psi_1^2(z) + \psi_2^2(z)\bar{z} + \cdots + \psi_{s_2}^2 \frac{\bar{z}^{s_2 - 1}}{(s_2 - 1)!}\right] e^{\lambda_1 \bar{z}} .$$

Подставляя это выражение в (3.1.27), находим $\vartheta_2(z)$ в форме

$$\vartheta_2(z) = \sum_{k=1}^{s_1} \tilde{\psi}_k^1 \frac{\bar{z}^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_1 \bar{z}} + \sum_{m=1}^{s_2} \psi_m^2 \frac{\bar{z}^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_2 \bar{z}}.$$

Подставляя $\vartheta_2(z)$ в (3.1.23) , получим на втором шаге уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_3\right)^{s_3} \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_p\right)^{\lambda_p} \vartheta = \sum_{k=1}^{s_1} \tilde{\psi}_k^1(z) \frac{\bar{z}^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_1 \bar{z}} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{s_2} \psi_k^2(z) \frac{\bar{z}^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_2 \bar{z}}. \qquad (3.1.28)$$

Повторяя приведенные выше процедуры, на $p - 1$ шаге получим уравнение вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_\rho\right)^{s_p} \vartheta = \sum_{j=1}^{p-1} Q_j(z)\, e^{\lambda_j \bar{z}}, \qquad (3.1.29)$$

где

$$Q_j(z) = q_1^j(z) + q_2^j(z)\bar{z} + \dots + q_{s_j}^j(z)\frac{\bar{z}^{s_j-1}}{(s_j-1)!}, q_1^j(z), \quad q_2^j(z), \dots, q_{s_j}^j(z)$$

аналитические функции.

Интегрируя уравнение (3.1.29) и полученные аналитические функции при $\bar{z}^{s_j}, j = 1,2, \dots, p-1$, соответственно обозначая через $\Phi_1^j(z), \Phi_2^j(z), \dots, \Phi_{s_j}^j(z)$, получим решение (3.1.0) в виде (3.1.13).

3.2. Двоякопериодические решения однородного уравнения в классе C_*^n

В этом параграфе, используя результаты § 3.1 представление общего решения однородного уравнения, дадим описание многообразия двоякопериодических решений, с основными периодами $h_1, h_2, Im(h_2/h_1) \neq$ $\neq 0$, уравнения (3.1.0).

Рассмотрим отдельно случаи простых и кратных корней характеристического уравнения.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ −простые корни уравнения (3.1.1). Тогда решение уравнения (3.1.0) $\vartheta_j(z)$, соответствующее корню λ_j, в силу формулы (3.1.17) представимо в виде

$$\vartheta_j(z) = \Phi_j(z)e^{\lambda_j\bar{z}}j = 1,2, \dots n, \tag{3.2.1}$$

где $\Phi_j(z)$ −аналитическая функция (однозначная).

Для того чтобы функция $\vartheta_j(z)$ была двоякопериодической с периодами h_1, h_2, необходимо и достаточно, чтобы аналитическая функция $\Phi_j(z)$ удовлетворяла условию

$$\Phi_j(z + h_k) = \Phi_j(z)e^{-\lambda_j\bar{h}_k}, \ k = 1,2. \tag{3.2.2}$$

Мероморфные функции, удовлетворяющие условию (3.2.2), называются эллиптическими функциями второго рода [1].

Таким образом, справедлива

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n -$ *простые корни характеристического уравнения (3.1.1). Тогда всякое двоякопериодическое решение уравнения (3.1.0) с периодами* h_1, h_2 *представимо в виде*

$$\vartheta(z) = \Phi_1(z)e^{\lambda_1 \bar{z}} + \Phi_2(z)e^{\lambda_2 \bar{z}} + \dots + \Phi_n(z)e^{\lambda_n \bar{z}}, \qquad (3.2.3)$$

где $\Phi_j(z) -$*эллиптические функции второго рода, удовлетворяющие условиям*

$$\Phi_j(z + h_k) = e^{-\lambda_j \bar{h}_k}\Phi_j(z), \quad k = 1,2; \quad j = 1,2 \dots n. \qquad (3.2.4)$$

Представление (3.2.3) единственно.

Действительно, все функции вида (3.2.1) составляют частные решения уравнения (3.1.0), имеющие периоды h_1, h_2, функции $\Phi_j(z)$ удовлетворяют условию (3.2.2). Поэтому их сумма тоже дает решение уравнения (3.2.2), и обратно, решение вида (3.2.3) в силу фундаментальности системы решений

$e^{\lambda_1 \bar{z}}, e^{\lambda_2 \bar{z}}, \dots, e^{\lambda_n \bar{z}}$ будет двоякопериодической, если функции $\Phi_j(z)$ удовлетворяют условию (3.2.2).

Теперь находим условия существования двоякопериодических решений уравнения (3.1.0) с основными периодами h_1, h_2 и принадлежащих классу $C^n(\Omega)$, $\Omega -$один из параллелограммов решетки Γ, то есть классу C_*^n.

$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2;\ m_1, m_2 - \text{целые число}\}$. В качество $\Omega -$можно брать основной параллелограмм решетки Γ с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$.

Как раньше $\Gamma_1 -$решетка вида $\Gamma_1 = \frac{\pi}{|\Omega|}\Gamma$, $|\Omega| = mes\Omega == |h_1|^2 Im(h_2/h_1)$.

Из результатов работы [53] и теоремы 3.2.1 получим

Теорема 3.2.2. *Пусть простые корни (3.1.1)* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma_1$, $1 \le k \le n$. *Тогда всякое регулярное решение уравнения (3.1.0) из класса* C_*^n *представимо в виде*

$$\vartheta(z) = c_1 e^{\lambda_1 \bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z} + \dots + c_k e^{\lambda_k \bar{z} - \bar{\lambda}_k z}, \qquad (3.2.3)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_k$*-произвольные постоянные.*

Доказательство. Согласно теореме 3.2.1, всякое решение уравнения (3.1.0) из класса C_*^n представляется в виде

$$\vartheta(z) = \Phi_1(z)e^{\lambda_1\bar{z}} + \Phi_2(z)e^{\lambda_2\bar{z}} + \cdots + \Phi_n(z)e^{\lambda_n\bar{z}},$$

где $\Phi_j(z)$ удовлетворяют условиям

$$\Phi_j(z+h_1) = e^{-\lambda_j\bar{h}_k}\Phi_j(z), \quad k = 1,2; \;\; j = 1,2,\dots,n,$$

и $\Phi_j(z)$ аналитическая в Ω и $\in C^1(\bar{\Omega})$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \in \Gamma_1$, и $\lambda_{k+1,}\lambda_{k+2,\dots,}\lambda_{n,} \bar{\in} \Gamma_1$. Как показано в главе 1, § 1.2, такие аналитические функции выражаются формулами

$$\Phi_j(z) = \begin{cases} c_j e^{-\bar{\lambda}_j z}, \text{если } \lambda_j \in \Gamma_1, \\ \quad 0, \quad\; \text{если } \lambda_j \bar{\in} \Gamma_1 \end{cases} j = 1,2 \dots n,$$

где c_j —некоторые постоянные.

Поэтому при $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma_1$ существуют постоянные $c_1, c_2, \dots, c_k$ такие, что решение уравнения (3.1.0) из класса C_*^n выражается формулой (3.2.3).При $\lambda_j \bar{\in} \Gamma_1, \Phi_j(z) \equiv 0, \;\; j = k+1, \dots, n$

Теорема 3.2.3. *Пусть корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ характеристического уравнения различные и имеют кратности $s_1, s_2, \dots, s_p$ и $s_1 + s_2 + \cdots + s_p = n$. Тогда любое решение уравнения из класса C_*^n при условии $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma_1, \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_p \bar{\in} \Gamma_1$ выражается формулой*

$$\vartheta(z) = \sum_{j=1}^{k} c_j e^{\lambda_j\bar{z} - \bar{\lambda}_j z}, \tag{3.2.4}$$

где c_j —некоторые постоянные.

Для доказательства этой теоремы сначала докажем две леммы

Лемма 3.2.1. *Всякое решение уравнения*

$$L_1\varphi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \lambda\right)^{(s)} \varphi = 0, \tag{3.2.5}$$

из класса C_*^s представимо в виде

$$\varphi(z) = \begin{cases} ce^{\lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z} \text{ если } \lambda \in \Gamma_1, \\ \quad 0, \quad\; \text{если } \lambda \bar{\in} \Gamma_1, \end{cases} \tag{3.2.6}$$

где c —некоторая постоянная.

Доказательство леммы. Пусть $\varphi(z) \in C_*^s$ − решение уравнения (3.2.5) и $\lambda \overline{\in} \Gamma_1$. Как мы уже заметили в главе 2, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \lambda u = 0$$

в классе C_*^1 имеет решение [53]-[56], [67]-[75]

$$u(z) = \begin{cases} ce^{\lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z} & \text{если } \lambda \in \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } \lambda \overline{\in} \Gamma_1, \end{cases}$$

где c −постоянная величина. Отсюда следует, если $\lambda \overline{\in} \Gamma_1$, то для решения $\varphi(z) \in C_*^1$ уравнения (3.2.5) справедливо

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda\right)^{(s-j)} u = 0$$

для любого $j \leq s.$ Следовательно, при $\lambda \overline{\in} \Gamma_1$ уравнение (3.2.5) имеет лишь нулевое решение $\varphi(z) \equiv 0$.

Пусть $\lambda \in \Gamma_1$, тогда функция

$$u_0(z) = e^{\lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z}$$

является двоякопериодической.

Тогда функция $F(\mu) = (\mu - \lambda)^s$ в точке $\mu = \lambda$ имеет нуль порядка $s - 1$, то есть

$$F(\lambda) = 0, \qquad F^1(\lambda) = 0, \dots, F^{(s-1)}(\lambda) = 0, F^{(s)}(\lambda) = s!.$$

Будем отыскивать решение уравнения (3.2.5) в виде

$$\varphi(z) = e^{\lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z}\Phi(z), \tag{3.2.7}$$

где $\Phi(z)$ − искомая двоякопериодическая функция класса $C_*^s s \geq 1$.

Подставляя (3.2.7) в (3.2.5), в силу равенства

$$L_2\left[e^{\lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z}\Phi(z)\right] = e^{\lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z}\left[F(\lambda)\Phi_{\bar{z}}(z)F'(\lambda)\Phi_{\bar{z}}(z) + \dots + \frac{F^{(s)}(\lambda)}{s!}\Phi_{\bar{z}}^s(z)\right]$$

получим, что $\Phi(z)$ −является решением уравнения

$$\frac{\partial^s \Phi}{\partial \bar{z}^s} = 0,$$

то есть $\Phi(z)$ –полианалитическая функция. Из ограниченности функции $\Phi(z)$ в $\overline{\Omega}$ и двоякопериодичности следует, что $\Phi(z)$ –ограниченная на всей плоскости. Тогда в силу теоремы Лиувилля [47]-[49], $\Phi(z) \equiv$ c, и справедлива формула

$$\varphi(z) = ce^{\lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z}$$

при $\lambda \in \Gamma_{1,}$ и лемма доказана.

Лемма 3.2.2. *Пусть* $\varphi(z) \in C_*^{s_1+s_2}, s_1 + s_2 \geq 2$ *и является решением уравнения*

$$L_2\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_1\right)^{(s_1)} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right)^{(s_2)} \varphi(z) = 0. \quad (3.2.8)$$

Тогда $\varphi(z)$ *выражается формулой*

$$\varphi(z) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1\bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} + c_2 e^{\lambda_2\bar{z} - \bar{\lambda}_2 z} & \text{если } \lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_1, \\ c_1 e^{\lambda_1\bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} & \text{если } \lambda_1 \in \Gamma_1, \lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } \lambda_1, \lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

где c_1, c_2 *–произвольные постоянные.*

Доказательство. Утверждение леммы в случае $\lambda_1, \lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1$ следует сразу из леммы 3.2.1. Если $\lambda_1 \in \Gamma_1$ и $\lambda_2 \overline{\in} \Gamma_1$, то в силу того, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_1\right)^{s_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right)^{s_2} \vartheta = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right)^{s_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_1\right)^{s_1} \vartheta$$

утверждение этого случая - также есть очевидное следствие леммы 3.2.1.

Исследуем случай $\lambda_1 \in \Gamma_1, \lambda_2 \in \Gamma_1$. В этом случае, интегрируя (3.2.8) s_1 раз, в силу формулы (3.2.6) получим

$$L_3\varphi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right)^{s_2} \varphi = ce^{\lambda_1\bar{z} - \bar{\lambda}_1 z} \quad (3.2.10)$$

как и выше, c –постоянная.

Функция $F(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)^s$ имеет нуль порядка $s - 1$ в точке $\lambda = \lambda_2$, так как

$$F(\lambda_2) = 0, F'(\lambda_2) = 0, \dots, F^{(s-1)}(\lambda_2) = 0, F^{(s)}(\lambda_2) = s! \neq 0$$

Отыскивая решение уравнения (3.2.10) в виде

$$\varphi(z) = e^{\lambda_2 \bar{z} - \bar{\lambda}_2 z} \chi(z), \tag{3.2.11}$$

где постоянная d_2- как в лемме, и $\chi(z)$ −двоякопериодическая функция класса $C_*^{s_2}$, в силу формулы (3.1.17) получим

$$L_3\left[e^{\lambda_2 \bar{z} + d_2 z} \chi(z)\right] = e^{\lambda_2 \bar{z} + d_2 z} \chi_{\bar{z}}^{(s_2)}(z).$$

Из этого равенства в силу (3.2.10) для функции $\chi(z)$ получим неоднородное уравнение полианалитической функции

$$\frac{\partial^{s_2} \chi}{\partial \bar{z}^{s_2}} = \tilde{c} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{z} - (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) z}. \tag{3.2.12}$$

Так как функция $\mu(z) = c\ exp\left[(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{z} - (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) z\right] \in C_*^s,\ s \geq 1,$ то в силу формулы Грина [11] получим

$$\iint\limits_{\Omega} \mu(z) d\Omega = 0.$$

После однократного интегрирования уравнения (3.2.11) получим

$$\frac{\partial^{s_2 - 1} \chi}{\partial \bar{z}^{s_2 - 1}} = c_1 + \frac{\tilde{c}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{z} - (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) z}, \tag{3.2.13}$$

Так как функции в левой части и правой части принадлежат классу C_*^1, то после интегрирования обеих частей по области Ω в силу формулы Грина [16] получим

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial^{s_2 - 1} \chi}{\partial \bar{z}^{s_2 - 1}} d\Omega = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{z} - (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) z} d\Omega = 0 \ \text{и}\ c_1 \iint\limits_{\Omega} d\Omega = c_1\ mes\Omega = 0.$$

Отсюда следует, что $c_1 = 0$. Следовательно, уравнение (3.2.11) имеет одно решение вида (3.2.13) , в котором $c_1 = 0$, то есть

$$\frac{\partial^{s_2 - 1} \chi}{\partial \bar{z}^{s_2 - 1}} = \frac{\tilde{c}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{z} - (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) z}$$

Интегрируя это уравнение последовательно, и повторяя вышеприведенные рассуждения, окончательно находим $\chi(z)$ в виде

$$\chi(z) = c_2 + \frac{\tilde{c}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^{s_2}} e^{(\lambda_1-\lambda_2)\bar{z}-(\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2)z}$$

(c_2 −некоторая постоянная). Обозначая $c_1 = \frac{\tilde{c}}{(\lambda_1-\lambda_2)^{s_2}}$ и подставляя $\chi(z)$ в (3.2.10), получим решение уравнения (3.2.8) в виде первой формулы (3.2.9).

Теперь переходим к доказательству теоремы. В силу предположения теоремы, уравнение (3.1.0) можем записать в виде

$$L\vartheta \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_1\right)^{s_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right)^{s_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_p\right)^{s_p} \vartheta = 0, \qquad (3.2.14)$$

Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma_{1,}$ $k \le p$и $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_p \,\bar{\in}\, \Gamma_1$, то согласно лемме из (3.2.14) получим

$$L_k\vartheta \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_1\right)^{s_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_2\right)^{s_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_k\right)^{s_k} \vartheta = 0.$$

Последовательно интегрируя это уравнение, воспользуюсь результатами леммы 3.2.2, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda_k\right)^{s_k} \vartheta = \tilde{c}_1 e^{\lambda_1\bar{z}-\bar{\lambda}_1 z} + \tilde{c}_2 e^{\lambda_2\bar{z}-\bar{\lambda}_2 z} + \dots + \tilde{c}_{k-1} e^{\lambda_{k-1}\bar{z}-\bar{\lambda}_{k-1} z}, \quad (3.2.15)$$

где $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_{k-1}$ − некоторые постоянные.

Вышеуказанным способом отыскивая решение последнего уравнения в виде

$$\vartheta(z) = e^{\lambda_k\bar{z}-\bar{\lambda}_k z}\chi(z), \qquad (3.2.16)$$

для $\chi(z)$ получим неоднородное уравнение полианалитической функции

$$\frac{\partial^{s_p}\chi}{\partial \bar{z}^{s_p}} = \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{c}_j e^{\tilde{\lambda}_j\bar{z}-\bar{\tilde{\lambda}}_j z}$$

где $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j - \lambda_k, \quad j = 1,2, \dots, k-1.$

Последовательно интегрируя последнее уравнение и воспользуюсь тем, что

$$\iint\limits_{\Omega} e^{\tilde{\lambda}_j \bar{z} - \bar{\tilde{\lambda}}_j z} d\Omega = 0, \qquad j = 1,2,\dots,k-1,$$

окончательно находим $\chi(z)$

$$\chi(z) = c_\rho + \sum_{j=1}^{k-1} c_j\, e^{(\lambda_j - \lambda_k)\bar{z} - (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_k) z}$$

где через c_j обозначено $c_j = \frac{\tilde{c}_j}{(\lambda_j - \lambda_\rho)^{s_\rho}}$. Подставляя значение $\chi(z)$ в (3.2.16) получим

$$\vartheta(z) = \sum_{j=1}^{k} c_j e^{\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z}$$

$c_j -$ постоянные. Теорема доказана.

Из теорем 3.2.2 и 3.2.3 получим

Теорема 3.2.4. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, $k \le n$ −корни характеристического уравнения, среди них могут быть и кратные. Тогда для существования ненулевого решения уравнения (3.1.0) в классе регулярных двоякопериодических функций необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один корень $\lambda_{j_0} \in \Gamma_1$, $j_0 \in [1,k]$.*

3.3. Двоякопериодические обобщенные решения однородного уравнения (3.1.0)

В этом параграфе исследуем вопросы существования и нахождения двоякопериодических решений уравнения метааналитической функции [5]-[7], [18], [19], [41], [68], [75].

$$\partial_{\bar{z}}^n w + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} w + \dots + a_{n-1} \partial_{\bar{z}} w + a_n w = 0, \qquad (3.3.0)$$

с заданными полюсами, а также с заданными нулями и полюсами, как у эллиптических функций. Класс таких решений уравнения (3.3.0) обозначим через $\tilde{C}_*^n$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ −различные корни характеристического уравнения (3.1.1),

1. Решение (3.3.0) с заданными полюсами.

Пусть обобщенное двоякопериодическое решение уравнения (3.3.0) класса $\tilde{C}_*^n$ допускает полюсы $b_1, b_2, \ldots, b_r$ с кратностями $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$, и лежащие внутри основного параллелограмма Ω решѐтки Γ.

Структура многообразия решений уравнения зависит от свойства корней характеристического уравнения (3.1.1).

Теорема 3.3.1. *Пусть все различные корни уравнения (3.1.1)* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Gamma_1$. *Тогда, если существует эллиптическая функция* $\varphi(z)$ *с полюсами в точках* $b_1, b_2, \ldots, b_r$, *то есть*

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname*{Res}_{z=b_k} \varphi(z) = 0, \qquad (3.3.1)$$

то решение уравнения (3.3.0) класса $\tilde{C}_*^n$ *представляется в виде*

$$w(z) = \varphi(z) \sum_{k=1}^{n} c_k \, exp\big(\lambda_k \bar{z} - \bar{\lambda}_k z\big), \qquad (3.3.2)$$

где c_k *—постоянные,* $\varphi(z)$ *имеет вид*

$$\varphi(z) = c + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\lambda_k} c_k^j \, \zeta^{(j-1)}(z - b_k), \qquad (3.3.3)$$

c, c_n^j *—постоянные, причѐм*

$$\sum_{k=1}^{r} c_k^1 = 0, \ \operatorname*{Res}_{z=b_k} \varphi(z) = c_k^1.$$

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы. Тогда при условии $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Gamma_1$ любое решение уравнения (3.3.0) класса $\tilde{C}_*^n$ представимо в виде

$$w(z) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k e^{\lambda_k \bar{z}}, \qquad (3.3.5)$$

где $\Phi_k(z)$ −двоякопериодические аналитические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_k(z+h_j) = e^{-\lambda_k \bar{h}_j}\Phi_k(z), \ \ j=1,2; \quad k=1,2,\dots,n,$$

имеющие полюсы $b_1, b_2, \dots, b_r$, внутри области Ω.

Пусть существует эллиптическая функция $\varphi(z)$ с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$, то есть [1], [15], [47]

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname*{Res}_{z=b_k} \varphi(z) = 0,$$

$\varphi(z)$ −имеет вид (3.3.3), где $c_k^1 = \mathrm{Res}\varphi(z)$.

Эллиптическую функцию второго рода $\Phi_k(z) -$ можно представить в виде [56]

$$\Phi_k(z) = \varphi(z)e^{d_k z}\gamma_k(z), \tag{3.3.6}$$

здесь d_k, $\gamma_k(z)$ −пока искомые.

Постоянные d_n в силу условия $\lambda_k \in \Gamma_1$ определим из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_k\bar{h}_1 + d_k h_1 = 2\pi i m_1 \\ \lambda_k\bar{h}_2 + d_k h_2 = 2\pi i n_2 \end{array}\right\}$$

где n_1, n_2 −некоторые целые числа, которые в силу условия $Im(h_2/h_1) > 0$ имеют единственное решение

$$\lambda_k = \frac{\pi}{|\Omega|}(n_1h_2 - n_2h_1), d_k = -\frac{\pi}{|\Omega|}\left(n_1\bar{h}_2 - n_2\bar{h}_1\right).$$

Таким образом $d_k = -\bar{\lambda}_k$ и

$$\frac{\Phi_k(z)}{\varphi(z)\exp(d_k z)} = \gamma_k(z)$$

является регулярной двоякопериодической функцией.

Следовательно, в представлении (3.3.6) $\gamma_k(z) \in C_*^1$, является функцией аналитической, ограниченной на всей плоскости $\mathbb{C}$. Поэтому в силу теоремы Лиувилля [23], $\gamma_k(z) \equiv \mathrm{c}_k$, $c_k -$ постоянные.

Таким образом, эллиптические функции второго рода, $\Phi_k(z)$ представимы в виде

$$\Phi_k(z) = \varphi(z) c_k e^{d_k z}, d_k = -\bar{\lambda}_k.$$

Подставляя эти значения $\Phi_k(z)$ в (3.3.5), получим представление (3.3.2).

Замечание. Условие существования эллиптической функции с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$ является необходимым условием, что следует из представления решений уравнения (3.3.0) при $\lambda_k \in \Gamma_1, k = 1,2 \dots, n$. Если корни уравнения (3.1.1) кратные, то это не так, [40].

Например, решения уравнения (3.3.0) с одним простым полюсом при условии, что все $\lambda_k \in \Gamma_1, k = 1,2, \dots, n,$ не существует, так как порядок эллиптической функции всегда $r > 1$.

Теорема 3.3.2. *Пусть среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ хотя бы одно значение $\lambda_j \overline{\in} \Gamma_{1,} 1 \leq j \leq m$. Тогда уравнение (3.3.0) в классе $\tilde{C}_*^n$ всегда допускает решение с заданными полюсами.*

При этом 1) при $\lambda_k - \lambda_j \overline{\in} \Gamma_1 \quad k \neq j, \ k = 1,2, \dots, m$ имеет решение вида

$$w(z) = \frac{\sigma(z - z_j^0)}{\sigma(z - z_j^1)} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} F(z), \tag{3.3.7}$$

где $z_j^1 - z_j^0 = \frac{|\Omega|}{\pi} \lambda_j$, постоянные величины d_j удовлетворяют системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} d_j h_1 + (z_j^1 - z_j^0)\eta_1 = -\lambda_j \bar{h}_1 \\ d_j h_2 + (z_j^1 - z_j^0)\eta_2 = -\lambda_j \bar{h}_2 \end{aligned} \right\} \tag{3.3.7'}$$

Эллиптическая функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = c + d\zeta(z - z_j^0) + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta(z - b_k) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=2}^{\lambda_k} A_k^{(l-1)} \wp^{(l-2)}(z - b_k), \tag{3.3.8}$$

где постоянные величины $c, d, A_k, A_k^{(l-1)}$ связаны условиями

$$d+\sum_{k=1}^{r} A_k = 0,$$

$$c + d\zeta(z_j^1 - z_j^0) + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta(z_j^1 - b_k) +$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=2}^{\lambda_k} A_k^{(l-1)}\,\wp^{(l-2)}(z_j^1 - b_k) = 0\,, \qquad (3.3.8')$$

причём $z_j^1 - b_k \,\overline{\in}\, \Gamma,\ k = 1,2,\dots,r,$

2) при $\lambda_k - \lambda_j \ \in \Gamma_1 \ \ k \neq j,\ k = 1,2,\dots,m;\ \lambda_k - \lambda_j \in \Gamma_1, k \neq j,\ k = 1,2,\dots,m,$ *имеется решение вида*

$$w(z) = \frac{\sigma(z - z_j^0)}{\sigma(z - z_j^1)} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} F(z) \left(c_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} c_k e^{\tilde{\lambda}_k \bar{z} - \bar{\tilde{\lambda}}_k z} \right),$$

где c_k *—постоянные величины,* $\tilde{\lambda}_k = (\lambda_k - \ \lambda_j)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — различные корни характеристического уравнения (3.3.0). Тогда, как и выше, любое решение (3.3.0) $w(z)$ класса $\tilde{C}_*^n$ представимо в виде (3.3.5), в котором $\Phi_k(z)$ —эллиптические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_k(z + h_i) = e^{-\lambda_k \bar{h}_i} \Phi_k(z), \qquad i = 1,2.$$

Если $\lambda_j \,\overline{\in}\, \Gamma_1$ при $k = j,\ 1 \leq j \leq n$, тогда, как в главе 2, §2 функцию $\Phi_j(z)$ можно представить в виде

$$\Phi_j(z) = \frac{\sigma(z - z_j^0)}{\sigma(z - z_j^1)} e^{d_j z} F(z) \gamma_j(z), \qquad (3.3.10)$$

где $z_j^0, z_j^1 \,\overline{\in}\, \Gamma, z_j^1 - z_j^0$ и d_j находятся из системы уравнений (3.3.7), а $F(z)$ —эллиптическая функция с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$ и z_j^0 и простым нулем в точках $z = z_j^1$, имеющая вид (3.3.8), в котором входящие постоянные связаны условиями (3.3.8'), причем $z_j^1 - b_k \,\overline{\in}\, \Gamma, \quad k = 1,2,\dots,r.$

Тогда в представлении (3.3.10) $\gamma_j(z)$ является двоякопериодической аналитической функцией порядка нуль, в силу теоремы Лиувилля [43], $\gamma_j(z) \equiv c_j$, c_j —постоянные.

Теперь полагаем в (3.3.5)

$$\Phi_k(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z} F(z)\gamma_k(z), \qquad k \neq j, \qquad k = 1,2,\dots,m$$

где $\gamma_k(z)$ —регулярные двоякопериодические аналитические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_k(z + h_i) = e^{-(\lambda_k - \lambda_j)\bar{h}_i}\gamma_k(z), \qquad i = 1,2;\ k \neq j. \tag{3.3.10}$$

Тогда решение уравнения (3.3.0) при $\lambda_j \,\overline{\in}\, \Gamma_1$ с полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$

представляется в виде

$$w(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} F(z)\left(c_j + \psi(z)\right), \tag{3.3.11}$$

где

$$\psi(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \gamma_k e^{(\lambda_k - \lambda_j)\bar{z}}$$

и γ_k — регулярные двоякопериодические аналитические функции второго рода, удовлетворяющие условию (3.3.10).

Тогда в силу результатов второго параграфа, в обозначениях $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k - \lambda_j$ имеем

$$\gamma_k(z) = \begin{cases} c_k e^{-\bar{\tilde{\lambda}}_k z}, & \text{если } \tilde{\lambda}_k \in \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } \tilde{\lambda}_k \,\overline{\in}\, \Gamma_1. \end{cases} \tag{3.3.12}$$

где c_k —произвольная постоянная.

Теперь, подставляя (3.3.12) в (3.3.11) , получаем утверждение теоремы.

1. Решение с заданными нулями и полюсами.

Теорема 3.3.3. *Пусть* N и P *соответственно число нулей и полюсов решения уравнения (3.3.0), лежащих внутри параллелограмма* Ω. *Тогда необходимо, чтобы* $N = P$.

Теорема 3.3.4. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n -$ *различные корни характеристического уравнения (3.1.1) и* $b_1, b_2, \dots, b_r -$ *полюсы и* $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r -$*нули решения, лежащие внутри параллелограмма* Ω *решѐтки*

Γ *=*{$m_1 h_1 + m_2 h_2$; m_1, m_2 *−целые*}. *Тогда для существования решения уравнения (3.3.0) необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из условий*

$$\sum_{k=1}^{r} (b_k - a_k) \equiv -\frac{|\Omega|}{\pi} \lambda_j (mod \Gamma), \;\; j = 1,2, \dots, n,$$

$$|\Omega| = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1). \tag{3.3.13}$$

Доказательства теорем 3.3.3 и 3.3.4. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ −корни уравнение (3.1.1). Тогда всякое обобщенное решение уравнения (3.3.0) из класса $\tilde{C}_*^n$ представимо в виде

$$w(z) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(z) e^{\lambda_j \bar{z}}, \tag{3.3.14}$$

где $\Phi_j(z)$ −эллиптические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_j(z + h_k) = e^{-\lambda_j \bar{h}_k} \Phi_j(z), \;\; k = 1,2; \; j = 1,2, \dots, m\,. \tag{3.3.15}$$

Функция $\Phi_j(z)$ имеет все полюсы и нули решения $w(z)$. Отношение

$$\psi_j(z) = \frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)}$$

является эллиптической функцией. Поэтому, в силу теоремы теории эллиптических функций [1], [15] ,число полюсов и нулей для эллиптической функции $\psi_j(z)$ совпадает, то есть $N = P$.

Докажем формулы (3.3.13). Действительно, в силу теоремы Коши [15]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Omega} z\frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)}dz = b_1 + b_2 + \cdots + b_r - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 - \cdots - \tilde{a}_r,$$

где b_j −полюсы, $\tilde{a}_j$ − нули функции $\Phi_j(z)$ внутри параллелограмма Ω. С другой стороны, в силу условия периодичности отношения $\Phi_j'(z)/\Phi_j(z)$ и условия (3.3.15) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Omega} z\frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\left[h_1\int\limits_0^{h_2}\frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)}dz - h_2\int\limits_0^{h_1}\frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)}dz\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left[h_1\int\limits_0^{h_2} d\ln\Phi_j(z) - h_2\int\limits_0^{h_1} d\ln\Phi_j(z)\right] = \frac{h_1}{2\pi i}\left[-\lambda_j\bar{h}_2 + 2\pi k_1 i\right] -$$

$$-\frac{h_2}{2\pi i}\left[-\lambda_j\bar{h}_1 + 2\pi k_2 i\right] = -\frac{\lambda_j}{2\pi i}\left[h_1\bar{h}_2 - h_2\bar{h}_1\right] + k_1h_1 - k_2h_2 =$$

$$= -\frac{|h_1|^2 Im(h_2/h_1)}{\pi}\lambda_j + k_1h_1 - k_2h_2 = -\frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j + k_1h_1 - k_2h_2.$$

где k_1, k_2 −некоторые целые числа. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k - a_k) \equiv -\frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j(mod\Gamma). \qquad (3.3.16)$$

Здесь λ_j −произвольный корень характеристического уравнения. Нужно отметить, что в последнем равенстве при $\frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j \in \Gamma$ или $\lambda_j \in \Gamma_1$ надо считать, что $r > 1$, а при $\lambda_j \,\bar{\in}\, \Gamma_1,\ \ r \geq 2,$ [15], [56].

Теперь проверим следующее утверждение: если последнее равенство (3.3.16) выполняется хотя бы для одного корня λ_j −характеристического уравнения, то уравнение (3.3.0) имеет решение с заданными нулями и полюсами.

В самом деле, при выполнении условия (3.3.16) в силу свойства сигма - функций Вейерштрасса $\sigma(z)$ и соотношений Лежандра функция

$$\psi_j(z)=\prod_{k=1}^{r}\frac{\sigma(z-a_k)}{\sigma(z-b_k)}e^{d_j z}$$

имеет полюсы $b_1, b_2, \dots, b_r$, нули $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ и удовлетворяет условию (3.3.15), постоянные d_j −определяются из условия

$$exp\left(d_j h_k+\eta_k A_0\right)=exp\left(-\lambda_j \bar{h}_k\right) \quad k=1,2,$$

где $A_0=b_1+b_2+\cdots+b_r-\tilde{a}_1-\tilde{a}_2-\cdots-\tilde{a}_r$.

Следовательно, функция

$$\frac{\Phi_j(z)}{\psi_j(z)}$$

является эллиптической функцией нулевого порядка [1]. Поэтому, в силу теоремы Лиувилля [49]

$$\Phi_j(z)=c_j\psi_j(z).$$

Теперь, как при доказательстве теоремы 3.3.2, полагаем в равенстве (3.3.14)

$$\Phi_k(z)=\psi_j(z)e^{-\lambda_j \bar{z}}\gamma_k(z), \qquad k\neq j, k=1,2,\dots,n.$$

Тогда решение уравнения (3.3.0) запишется в виде

$$w(z)=\psi_j(z)e^{\lambda_j \bar{z}}\left[c_j+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\gamma_k(z)e^{(\lambda_k-\lambda_j)\bar{z}}\right], \tag{3.3.17}$$

где функции $\gamma_k(z)$ −регулярные двоякопериодические аналитические функции второго рода (без полюсов), удовлетворяющие условию

$$\gamma_k(z+h_i)=e^{-(\lambda_k-\lambda_j)\bar{h}_i}\gamma_k(z), \ \ i=1,2.$$

Как при доказательстве теоремы (3.3.2), из последнего равенства находим $\gamma_k(z)$:

$$\gamma_k(z)=\begin{cases} \mathrm{c}_k \exp(\overline{\lambda_k-\lambda_j})z & \text{если } \lambda_k-\lambda_j\in\Gamma_1, \\ 0 & \text{если } \lambda_k-\lambda_j\,\overline{\in}\,\Gamma_1, .k\neq j\end{cases}$$

где c_k − постоянная величина.

Подставляя эти значения $\gamma_k(z)$ в зависимости от $\lambda_k - \lambda_j \in \Gamma_1$ или $\lambda_k - \lambda_j \overline{\in} \Gamma_1$, мы получим решение уравнения (3.3.0) в виде (3.3.17). Причем если все $\lambda_k - \lambda_j \overline{\in} \Gamma_1 k \neq j$, то уравнение имеет решение вида

$$w(z) = c_j \psi_j(z) e^{\lambda_j \bar{z}},$$

c_j —произвольные постоянные.

3.4. Решение неоднородного уравнения (3.0.0).

В этом параграфе рассмотрим вопросы существования и нахождения двоякопериодических решений класса $\tilde{C}_*^n$ для неоднородного уравнения [18], [20], [41], [44], [68]

$$Lw \equiv \partial_{\bar{z}}^n w + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} w + \cdots + a_n w = f(z), \qquad (3.4.0)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n -$ постоянные величины, $f(z)$ —заданная двоякопериодическая функция класса $H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

Уравнение (3.4.0) как в случае $n = 2$ имеет одно важное свойство, которое позволяет свести нахождение обобщенных решений класса $\tilde{C}_*^n$ к нахождению регулярных решений класса C_*^n.

Лемма 3.4.1. *Пусть $\varphi(z)$ —эллиптическая функция с периодами h_1, h_2, $Im(h_2/h_1) > 0$, имеющая полюсы решения уравнения (3.4.0). Тогда формула*

$$w(z) = \varphi(z)\,\vartheta(z) \qquad (3.4.1)$$

даёт обобщённое решение уравнения (3.4.0) из класса $\tilde{C}_*^n$, если $\vartheta(z)$ является регулярным решением из класса C_*^n уравнения

$$\partial_{\bar{z}}^n \vartheta + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} \vartheta + \cdots + a_{n-1} \vartheta = \frac{1}{\varphi(z)} f(z). \qquad (3.4.2)$$

В самом деле, если $\varphi(z)$ —эллиптическая функция, то отыскивая решение (3.4.0) в виде (3.4.1), где $\vartheta(z)$ —искомая функция класса C_*^n, будем иметь

$$\partial_{\bar{z}}^{(j)} w = \partial_{\bar{z}}^{(j)} (\varphi \vartheta) = \varphi \partial_{\bar{z}}^{(j)} \vartheta \qquad j = 1,2, \dots, n$$

$$\varphi(\partial_{\bar{z}}^n \vartheta + a_1 \partial_{\bar{z}}^{n-1} \vartheta + \cdots + a_{n-1} \vartheta) = f(z).$$

Отсюда, разделив обе части последнего уравнения на $\varphi(z)$, получим уравнение вида (3.4.2), то есть $\vartheta(z)$ должна удовлетворять этому уравнению, причем $\frac{1}{\varphi}f \in H_*^\alpha$. Это означает, что $\vartheta(z)$ –регулярное решение уравнения (3.4.2). Справедливо обратное утверждение: если $\vartheta(z)$ –регулярное решение класса C_*^n уравнения (3.4.2), при некоторой эллиптической функции $\varphi(z)$, то функция (3.4.1) дает обобщенное решение (3.1.0) с заданными полюсами.

Такой подход для неоднородного уравнения Коши-Римана был указан И.Н. Векуа [12].

3. Регулярные решения неоднородного уравнения из класса C_*^n.

Будем искать регулярные решение уравнения (3.4.0) методом вариации постоянных величин. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ все простые собственные значения характеристического однородного уравнения (3.4.0) . Тогда имеет место

Теорема 3.4.1. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Gamma_1$. $k \leq n$. *Тогда однородное уравнение (3.4.0) в классе* C_*^n *имеет* k *–линейно независимых решений*

$$exp\left(\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z\right), \;\; j = 1,2, \ldots, k$$

Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)\, exp\left(-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z\right) d\Omega = 0, \quad j = 1,2, \ldots, k \tag{3.4.3}$$

При этом все решения уравнения (3.4.0) выражаются формулой

$$w(z) = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z} \left(c_j + A_j T_\zeta^j \left(f e^{-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{n} e^{\lambda_j \bar{z} + d_j z} A_j T_\sigma^j \left(f e^{-\lambda_j \bar{z} - d_j z}\right) \tag{3.4.4}$$

где c_j *–произвольные постоянные величины, а постоянные* d_j *соответственно удовлетворяют уравнениям*

$$exp\left(d_j h_1 + \Delta_j \eta_1 + \lambda_j \bar{h}_1\right) = exp\left(d_j h_2 + \Delta_j \eta_2 + \lambda_j \bar{h}_2\right) = 1, j = k+1, \ldots, n\,, \tag{3.4.5}$$

здесь $\Delta_1 \equiv -\frac{\lambda_j}{\pi}|\Omega|$, $|\Omega| = mes\Omega$; $T_\zeta f, T_\sigma f$ *интегральные операторы, (как в главе 2)*

$$T_\zeta^j f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(t)e^{-\lambda_j\bar{z}+\bar{\lambda}_j z}\zeta(t-z)d\Omega, \quad j = 1,2,\dots,k$$

$$T_\sigma^j f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(t)e^{-\lambda_j\bar{z}-d_j z}\frac{\sigma(t-z-\Delta_j)}{\sigma(-\Delta_j)\sigma(t-z)}d\Omega, j = k+1, k+2, \dots, n,$$

A_j *—постоянные, зависящие от* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — простые корни характеристического полинома однородного уравнения (3.4.0). Методом вариации постоянных величин, решение уравнения (3.4.0) будем искать в виде

$$w(z) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(z)\, e^{\lambda_k\bar{z}}, \tag{3.4.6}$$

где $\varphi_k(z)$ —искомые двоякопериодические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_k(z+h_j) = e^{-\lambda_k\bar{h}_j}\varphi_k(z), \quad j = 1,2, \tag{3.4.7}$$

и

$$\varphi_k(z) \in C^n(\bar{\Omega}).$$

Подставляя (3.4.5) в (3.4.0), относительно неизвестных $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ получим неоднородные уравнения Коши-Римана

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial\bar{z}} = A_j e^{-\lambda_j} f(z), \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{3.4.8}$$

где A_j —постоянные, зависящие от $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Уже отмечалось во второй главе, что все решения уравнения (3.4.8) в классе двоякопериодических функций второго рода найдены в [56]. Согласно этим результатам приходим к следующем выводом.

1) Если $\lambda_j \in \Gamma_1, j = 1,2, \dots, k$, то для разрешимости уравнений (3.4.8) в классе регулярных (без полюсов) функций второго рода, удовлетворяющих условию (3.4.7), необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} f(z) e^{-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z} \, d\Omega = 0, \;\; j = 1,2, \dots k,$$

и все его решения представимы в виде

$$\varphi_j(z) = e^{-\bar{\lambda}_j z} \left(c_j - \frac{A_j}{\pi} \iint\limits_{\Omega} f(t) e^{-\lambda_j \bar{t} + \bar{\lambda}_j t} \zeta(t - z) d\Omega \right) = e^{-\bar{\lambda}_j z} \left(c_j + A_j T_\zeta^j f \right), \tag{3.4.9}$$

где c_j −произвольные постоянные.

2) При $\lambda_j \,\bar{\in}\, \Gamma_1$ уравнение (3.4.8) при любой правой части имеет, притом единственное, решение вида [56]

$$\varphi_j(z) = -A_j e^{d_j z} \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} f(t) e^{-\lambda_j \bar{t} - d_j t} \frac{\sigma(t - z - \Delta_j)}{\sigma(-\Delta_j) \sigma(t - z)} d\Omega = e^{d_j z} A_j T_\sigma^j f, \tag{3.4.10}$$

$\Delta_j \,\bar{\in}\, \Gamma, \;\; j = k+1, k+2, \dots, n,$

где постоянные d_j и Δ_j находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} d_j h_1 + \Delta_j \eta_1 = -\lambda_j \bar{h}_1 + 2\pi i n, \\ d_j h_2 + \Delta_j \eta_2 = -\lambda_j \bar{h}_2 + 2\pi i m. \end{aligned} \right\}$$

n, m −некоторые целые числа, η_1, η_2 −циклические постоянные, которые вместе с h_1, h_2 удовлетворяют соотношению Лежандра $\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i$.

Условие $\lambda_j \,\bar{\in}\, \Gamma_1$ означает, что $\Delta_j \bar{\in}\, \Gamma$.

Теперь при выполнении условии (3.4.3), подставляя (3.4.9) и (3.4.10) в (3.4.6), получим (3.4.4). Из этой теоремы как следствие получается

Теорема 3.4.2. *Пусть все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \,\bar{\in}\, \Gamma_1$. Тогда однородное уравнение (3.4.0) имеет лишь нулевое решение, а неоднородное уравнение, при любой правой части $f(z) \in H_*^\alpha$, в классе C_*^n, имеет, притом единственное, решение вида*

$$w(z) = \sum_{j=1}^{n} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} A_j T_\sigma^j f, \qquad (3.4.11)$$

где постоянные d_j *— как в теореме 3.4.1 при* $\lambda_j \,\overline{\in}\, \Gamma_1$.

Из теорем 3.4.1 и 3.4.2 следует

Теорема 3.4.3. *Для однозначной обратимости оператора* $L: C_*^n \to H_*^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, *необходимо и достаточно, чтобы все различные собственные значения характеристического полинома однородного уравнения (3.4.0)* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \,\overline{\in}\, \Gamma_1$.

4. Обобщенные решения неоднородного уравнения класса $\tilde{C}_*^n$.

Будем искать обобщенные решения уравнения (3.4.0) из класса $\tilde{C}_*^n$, с заданными полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$, лежащими внутри основного параллелограмма Ω решѐтки Γ, соответственно с кратностями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$.

Теорема 3.4.4. *Пусть все простые собственные значения характеристического полинома однородного уравнения (3.4.0)* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Gamma_1$. *Пусть* $\varphi(z)$ *—эллиптическая функция, имеющая все полюсы решения, с их кратностями и имеющая периоды* h_1, h_2 *и*

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=b_k}{Res}\, \varphi(z) = 0, \qquad (3.4.12)$$

Тогда для разрешимости уравнения (3.4.0) в классе $\tilde{C}_*^n$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint_\Omega \frac{1}{\varphi(z)} f(z)\, exp\big(-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z\big) d\Omega = 0, \quad j = 1,2, \dots, n\,. \qquad (3.4.13)$$

При этом решение уравнения (3.4.0) представляется формулой

$$w(z) = \varphi(z) \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z} \big(c_j + A_j T_\zeta f_j\big), \qquad (3.4.14)$$

где c_j *—произвольные постоянные,*

$$f_j(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} exp\left(-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z\right),$$

Доказательство этой теоремы следует из леммы 3.4.1 и теоремы 3.4.1.

Теорема 3.4.5. *Пусть все собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Gamma_1$ *и полюсы решения (3.4.0) соответствуют хотя бы одному корню* $\lambda_j, 1 \le j \le n$.

Пусть $\psi_j(z)$ *−квазиэллиптическая функция с полюсами* $b_1, b_2, \dots,, b_r$, *такая, что*

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{z=b_k}{Res}\, \psi_j(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z)\, exp\left(-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z\right) d\Omega. \qquad (3.4.15)$$

Тогда при выполнении условий

$$\iint_{\Omega} f(z)\, exp\left(-\lambda_k \bar{z} + \bar{\lambda}_k z\right) d\Omega = 0, k \ne j, k = 1,2, \dots, n, \quad (3.4.16)$$

решения уравнения (3.4.0) выражаются формулой

$$w(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} e^{\lambda_k \bar{z} - \bar{\lambda}_k z} \left(c_k + A_k T_\zeta f_k\right) + e^{\lambda_j \bar{z} - \bar{\lambda}_j z} \left(\psi_j(z) + A_j T_\zeta f_j\right). \quad (3.4.17)$$

где c_k *−постоянные величины, и функция* $\psi_j(z)$ *содержит* $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r$ *постоянных.*

Действительно, отыскивая обобщенное решение (3.4.0) в виде (3.4.6) для искомых эллиптических функций второго рода $\varphi_k(z)$, удовлетворяющих условию (3.4.7), получим неоднородные уравнения Коши-Римана (3.4.8).

На этот раз по условию теоремы $\varphi_j(z)$ является эллиптической функцией второго рода с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$, а $\varphi_k(z), k \ne j,\ k = 1,2, \dots, n$ является регулярным решением (3.4.8) в классе функций, удовлетворяющих условию (3.4.7).

Согласно результатам работы [56], для существования $\varphi_j(z)$, при $\lambda_j \in \Gamma_1$, необходимо и достаточно, чтобы существовала квазиэллиптическая функция $\psi_j(z)$ с полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$, такая что

$$\psi_j(z+h_k) = \psi_j(z) + \eta_k \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} f(z)\, e^{-\lambda_j \bar{t} + \bar{\lambda}_j t} d\Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname*{Res}_{z=b_k} \psi_j(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} f(t)\, e^{-\lambda_j \bar{t} + \bar{\lambda}_j t} d\Omega.$$

При этом

$$\varphi_j(z) = e^{-\bar{\lambda}_j z}\left(\psi_j + A_j T_\zeta f_j\right), \qquad (3.4.18)$$

$$\psi_j(z) = c + \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{\lambda_k} c_{ki}\, \zeta^{(i-1)}(z - b_k),$$

причѐм

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname*{Res}_{z=b_k} \psi_j(z) = \sum_{k=1}^{r} c_{k1} = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} f(z)\, e^{-\lambda_j \bar{z} + \bar{\lambda}_j z} d\Omega.$$

При $k \neq j$ и выполнении условий (3.4.15) из (3.4.8) получим

$$\varphi_k(z) = e^{-\bar{\lambda}_k z}\left(c_k + A_k T_\zeta f_k\right). \qquad (3.4.19)$$

Подставляя (3.4.18) и (3.4.19) в (3.4.6) получим решение уравнения (3.4.0) в виде формулы (3.4.17).

Теорема 3.4.6. *Пусть среди собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ хотя бы одно $\lambda_j \,\overline{\in}\, \Gamma_1$, тогда однородное уравнение (3.4.0) всегда имеет решение с заданными полюсами.*

При этом:

3) *если все $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \,\overline{\in}\, \Gamma_1$, то однородное уравнение имеет решение, а неоднородное уравнение всегда разрешимо;*
4) *если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \Gamma_1$, $k \neq j, k < n$, то однородное уравнение имеет $k+1$ решений, а для разрешимости неоднородного уравнения, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)\, e^{-\lambda_k \bar{z} + \bar{\lambda}_k z} d\Omega = 0, \qquad i = 1,2,\dots,k,$$

Доказательство. Пусть $\lambda_j \overline{\in} \Gamma_1$, j −фиксировано, тогда можно построить эллиптическую функцию второго рода $\psi_j(z)$, удовлетворяющую условию

$$\psi_j(z+h_k) = e^{-\lambda_j \bar{h}_k}\psi_j(z), \qquad k = 1,2$$

и имеющую полюсы $b_1, b_2, \dots, b_r$. Тогда разность

$$w(z) - \psi_j(z)e^{\lambda_j \bar{z}} = \vartheta_j(z)$$

является регулярным решением уравнения (3.4.0).

Поэтому первое и второе утверждение теоремы следуют соответственно из теорем 3.4.2 и 3.4.1.

Теперь находим решение уравнения (3.4.0) с заданными нулями и полюсами.

Теорема 3.4.7. *Пусть нули* $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ *и полюсы* $b_1, b_2, \dots, b_r$ *решения (3.4.0) связаны с собственными значениями* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *хотя бы одним условием*

$$\sum_{k=1}^{r}(b_k - \tilde{a}_k) \equiv \frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j (mod \Gamma),$$

j *−фиксировано.*

Пусть $\psi(z)$ *−эллиптическая функция второго рода, имеющая нули и полюсы решения уравнения (3.4.0) и удовлетворяющая условию*

$$\psi(z+h_k) = e^{-\lambda_j \bar{h}_k}\psi(z), \qquad k = 1,2. \tag{3.4.20}$$

Тогда при $\lambda_k - \lambda_j \in \Gamma_1$, $k \neq j$, $k = 1,2,\dots,l$, $l < n$, *однородное уравнение (3.4.0) имеет* $l+1$ *−решений, а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнение* $l+1$ *условий*

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\psi(z)} f(z)\, e^{-\lambda_j \bar{z}} d\Omega = 0\,, \tag{3.4.21}$$

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\psi(z)} f(z)\, e^{-\lambda_k \bar{z} + \bar{\lambda}_k z} d\Omega = 0, \qquad k = 1,2,\dots,l, \qquad k \neq j$$

При этом уравнение (3.4.0) имеет решение вида

$$w(z)=\psi(z)\left[\left(c_j e^{\lambda_j\bar{z}}+A_j e^{\lambda_j\bar{z}}T_\zeta f_j\right)+\sum_{\substack{i=1\\ l\neq j}}^{l} e^{\lambda_j\bar{z}-\bar{\lambda}_i z}\left(c_i+A_i T_\zeta^j f_i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{i=l+1\\ l\neq j}}^{n} A_i\, e^{d_i z}T_\sigma^j f_i\right], \qquad (3.4.22)$$

где c_k –постоянные величины, A_k –постоянные, зависящие от $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, а $T_\zeta f_i$, $T_\sigma f_i$- как в теоремах 3.4.1 и 3.4,

$f_j(z)=\frac{1}{\psi(z)}f(z)e^{-\lambda_j\bar{z}}$ *при* $i\neq j$,

$$f_k(z)=\frac{1}{\psi(z)}f(z)e^{-\lambda_k\bar{z}+\bar{\lambda}_k\bar{z}},\ \ k=1,2,\dots,n,\ \ k\neq j.$$

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, и $\psi(z)$ –эллиптическая функция, построенная на нулях $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_r$ и полюсах $b_1,b_2,\dots,b_r$ и удовлетворяющая условию (3.4.20). Тогда, отыскивая решение (3.4.0) в виде

$$w(z)=\psi(z)\vartheta(z), \qquad (3.4.23)$$

получим, что искомая функция $\vartheta(z)$- двоякопериодическая функция второго рода, удовлетворяющая условию

$$\vartheta(z+h_k)=e^{\lambda_j\bar{h}_k}\vartheta(z),\ k=1,2, \qquad (3.4.24)$$

и в области Ω является регулярным решением уравнения

$$\partial_{\bar{z}}^n\vartheta+a_1\partial_{\bar{z}}^{n-1}\vartheta+\dots+a_n\vartheta=\frac{1}{\psi(z)}f(z). \qquad (3.4.25)$$

Тогда, как при доказательстве теоремы (3.4.1) и (3.4.5), представляя решение (3.4.25) в виде

$$\vartheta(z)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k e^{\lambda_k\bar{z}}, \qquad (3.4.26)$$

получим, что искомые функции $\varphi_k(z)$ удовлетворяют условию

$$\varphi_k(z+h_i) = e^{-(\lambda_k-\lambda_j)\bar{h}_i}\varphi_k(z) i = 1{,}2 \quad k \neq j, \tag{3.4.27}$$

при $k = j$ функция $\varphi_j(z)$ −двоякопериодическая с периодом h_1, h_2 и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} = \frac{A_k}{\psi(z)} f(z) e^{-\lambda_k \bar{z}}. \tag{3.4.28}$$

Таким образом, в представлении решений (3.4.0) в виде (3.4.23), (3.4.26) надо искать регулярные двоякопериодические решения второго рода уравнений (3.4.28), удовлетворяющие условиям (3.4.27), и при $k = j$ $\varphi_j(z) -$ двоякопериодическая функция.

Теперь для завершения доказательства теоремы надо повторить дословно доказательство теоремы (3.4.1) относительно разрешимости уравнений (3.4.28).

Заключение

В работе исследованы задачи существования и нахождения двоякопериодических решений для линейного дифференциального уравнения в частных производных порядка n на комплексной плоскости с оператором Коши-Римана, с периодами h_1, h_2, $Im(h_2/h_1) \neq 0$. Решение уравнения находится в классе $\tilde{C}_*^n$ —обобщѐнных (с полюсами) и C_*^n —регулярных (без полюсов) функций.

Основные результаты работы заключается в следующем:

1. В случае постоянных коэффициентов в зависимости от свойства корней характеристического уравнения найдены многообразия двоякопериодических решений однородного уравнения через эллиптические функции второго рода и двоякопериодические полианалитические функции.
2. Найдены условия, при выполнении которых однородное уравнение в классе C_*^n имеет лишь нулевое решение или ненулевое решение. При этом вычислена размерность пространства решений однородного уравнения.
3. Дано описание многообразия решений однородного уравнения в классе $\tilde{C}_*^n$ (с заданными полюсами), а также с заданными нулями и полюсами в случае простых корней характеристического уравнения.
4. Построены картины разрешимости задачи нахождения двоякопериодических решений линейной эллиптической системы высокого порядка, в классе C_*^n и $\tilde{C}_*^n$ а также найдены условия, при которых задача является фредгольмовой и нѐтеровой.
5. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения в классе C_*^n, и установлено, что в этом классе задача является фредгольмовой.
6. Показано, что поставленная задача для неоднородного уравнения в классе $\tilde{C}_*^n$ в зависимости от расположения корней характеристического однородного уравнения может быть фредгольмовой или нѐтеровой.
7. В случае, когда $n = 2$ и коэффициенты уравнения переменные, найдено многообразие решений однородного уравнения в классах C_*^2 и $\tilde{C}_*^2$. Также даны описания ядра и коядра задачи.

Работа носит теоретической характер, в который даны алгоритмы нахождения двоякопериодических решений уравнения (1) с помощью аппарата теории эллиптических функций Вейерштрасса, с постоянными и переменными (случай $n = 2$) коэффициентами.

С точки зрения автора для дальнейшего исследования наибольший интерес представляет следующие вопросы:

1. Дать описание ядро и коядро задачи в классе $\tilde{C}_*^n$, когда характеристическое уравнение допускает кратные корни.
2. Изучение поставленной задачи в классе однопериодических функций (как регулярных, так и обобщенных с заданными полюсами и точки ограниченной неопределенности)

Список литературы

[1] Ахиезер И.И. Элементы теории эллиптических функций [Текст] / И.И. Ахиезер. М.: Наука, 1970. – 304 с.

[2] Алекшинков В.В. Трехэлементная краевая задача типа Римана для метааналитических функций в круге [Текст] / В.В. Алекшинков, К.М. Расулов. Изд. Сарат. ун–та, Нов. сер. Математика, Механика, Информатика, 2008, т. 08, вып. 1, С. 3 – 9.

[3] Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости [Текст] / С. Байзаев. Новосибирск: Препринт, 1999г. –74 с.

[4] Байзаев С. Исследования по теории ограниченных решений эллиптических уравнений на плоскости [Текст]/ С. Байзаев. Новосибирск: 1999, Автореферат. дис. д.ф.м.н.

[5] Балк М.Б. О полианалитических функциях [Текст] / М.Б. Балк, М.Ф.Зуев. // Успехи математических наук.– 1970. –т. XXV, вып. 5 (155). – С. 203 – 226.

[6] Балк М.Б. Полианалитические функции [Текст] / М.Б. Балк. //KOMPLEXE ANALYSIS UND IHRE ANWENDUNG AUF PARTIELLE DIFFRENTIAL, TEIL 1, MARTIN – LUTHER – UNIVERSITAT HALLE – WITTENBERG WISSENSCHAFTLICHE BELTRAGE 1980/41 (M 18), Halle (Saale) 1980, p. 11 – 45.

[7] Балк М.Б. О метааналитических функциях [Текст] / М.Б. Балк, М.Ф.Зуев. Учен. зап. СГПИ вып. 25 (1970).

[8] Берс Л. Уравнения с частными производными [Текст] / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шахтер. М.: Мир, 1966. –351с.

[9] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций [Текст] / Б.В. Боярский. М.: МИ им. В.А. Стеклова АН СССР. – Автореферат. дис. д.н. – 1960.

[10] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе А.В. М.: Наука,1981.– 448 с.

[11] Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений [Текст] / И.Н. Векуа М.:, 1948. –296 с.

[12] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. М.: Физматгиз, 1959г.– 628 с.

[13] Виноградов В.С. Исследование граничных задач для эллиптических систем первого порядка [Текст] /В.С. Виноградов // Москва: МИ им. В.А. Стеклова АН СССР. – Автореферат. дис. д.н. – 1972.

[14] Гахов Ф.Д. Краевые задачи [Текст] / Ф.Д. Гахов. М.: Наука, 1977.– 640 с.

[15] Гурвиц А. Теория функций [Текст] /А.Гурвиц, Р. Курант. М.: Наука, 1968.–648 с.

[16] Джураев А.Д. Системы уравнений составного типа [Текст] /А.Д. Джураев. М.: Наука, 1972, 227 с.

[17] Жегалов В.И. Об одном обобщении полианалитических функций [Текст] / В.И. Жегалов. // Тр. семинара по краевым задачам.– Казань: Изд-во КГУ, 1975.– вып. 12.– С. 50-57.

[18] Жегалов В.И. Некоторые краевые задачи для полианалитических функций [Текст] /В.И. Жегалов. //Тр. Семенара по краевым задачам. – Казанск. ун–т. – 1976. Вып. 13 – с. 80 – 85.

[19] Закарян А.А. Корректные граничные задачи для уравнения Бицадзе [Текст] / А.А. Закарян. Ереван, 1988. 34 с. Дап. в Арм. НИИНТИ 24.08.88, № 66 – Ар 88.

[20] Зуев М.Ф. К теоремам единственности для метааналитических функций [Текст] / М.Ф. Зуев //Смоленский матем. сб. – 1969.–вып. 2.–С. 54 – 59.

[21] Зуев М.Ф. Принцип компактности для метааналитических функций и некоторые его приложения [Текст] / М.Ф. Зуев. Смоленский Матем. сб. 2(1969), 33-46.

[22] Зуев М.Ф. О метааналитических функциях постоянного модуля [Текст] /М.Ф. Зуев Смоленский матем. сб. 1969, - вып. С. 54 – 59.

[23] Колосов Г.В. Приложение теории комплексного переменного к плоской задаче теории упругости [Текст] / Г.В. Колосов. Юрьев, 1909.

[24] Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости [Текст] / Г.В. Колосов М. – Л – ОНТИ, 1935. – 224 с.

[25] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. М.: 1973.– 736 с.

[26] Лаврентьев М.А. О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй [Текст] / М.А. Лаврентьев // Матем. сб., 4(46), вып. 3, 1938. – С. 391 – 458.

[27] Лаврентьев М.А. Конформные отображения с приложениями к некоторыми вопросам механики [Текст] / М.А. Лаврентьев. Гостехиздат, 1947.

[28] Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа [Текст] / П.И.Лизоркин. М.: Наука, 1981.–384 с.

[29] Малеин Ю.С. Некоторые вопросы теории полианалитических функций и их обобщений [Текст] / Ю.С. Малеин //Дис. канд. физ. – мат. Наук: 01.01.01. 1972. – 100 с.
[30] Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях [Текст] / Д.Мамфорд. М.: Мир, 1988.–446 с.
[31] Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г.Михайлов. Душанбе: Дониш, 1963.–184 с.
[32] Мухамадиев Э.М. Об обратимости дифференциальных операторов в частных производных эллиптического типа [Текст] / Э.М. Мухамадиев // Докл. АН СССР– 1972. –т.205– С.1292-1295.
[33] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мусхелишвили // Изд-во АН СССР, Изд. 4 – е, 1954.
[34] Натанзон В.Я. О напряжениях в растягиваемой пластине, ослабленной отверстиями, расположенными в шахматном порядке [Текст] / В.Я. Натанзон //Матем. сборник, 1935.– 42, вып. 5. – С. 617-636
[35] Петровский Г.И. Лекции об уравнениях в частными производными [Текст] / Г.И. Петровский. Физматгиз, 1961.
[36] Показеев В.И. Об одном представлении обобщенных аналитических функций [Текст] / В.И. Показеев //ДАН СССР–1963.–155, №3.–С.528-531.
[37] Показеев В.И. Нерегулярные полианалитические функции [Текст] / В.И. Показеев //Изв. вузов, Математика, 1975, № 6, С. 103 – 113.
[38] Показеев В.И. Аналитические функции Аппеля в случае двоякопериодической группы [Текст] / В.И. Показеев // Деп. в ВИНИТИ 18.07.1983, №4025-83.
[39] Показеев В.И. Простые обобщѐнные аналитические функции, автоморфные относительно элементарных групп. 1. Двоякопериодические решения [Текст] /В.И. Показеев, Д.С. Сафаров // Изв. АН РТ, отд. физ. мат и хим. н.– 1992.– т 4(4).– С.15-21.
[40] Показеев В.В. Полианалитические двоякопериодические функции [Текст] / В.В. Показеев. // Тр. сем. по краев. задачам. Из-во Казанского ун-та. –1982.–вып. 18–с.155 – 167.
[41] Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений высшего порядка

[Текст] / Н.Р. Раджабов, А. Расулов // ДАН СССР.– 1985.–т.282, N4.– С. 795-799.
[42] Расулов К.М. О решении некоторых краевых задач типа Римана для полианалитических функций [Текст] / К.М. Расулов // Докл. АН СССР, 1980. – т. 252, № 5. – С.1059 – 1063.
[43] Расулов К.М. О решении основным краевых задач типа Гильберта для бианалитических функций [Текст] / К.М. Расулов // Докл. АН СССР, 1991. – т. 320, № 2. – С. 284 – 288.
[44] Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических и некоторые их обобщений [Текст] / К.М. Расулов //Дис. докт. физ. – мат. наук: 01.01.01. – Минск, 1995, 241 с.
[45] Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций [Текст] / К.М. Расулов //Смол.ун-т, Из – во СГПУ- 1998 г -344 с.
[46] Расулов А.Б. В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения [Текст] / А.Б. Расулов, Н. Раджабов. Душанбе.– 1980.– вып.3– С.72-76.
[47] Уитекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа [Текст] /Е.Т.Уитекер, Г.Н. Ватсон. Пер. с английского. т. 2.– Ленинград-Москва: Гос. технико-теорет. изд-во, 1934.
[48] Фѐдоров Ф.С. О полиномах комплексного переменного [Текст] / Ф.С. Федоров //ДАН 20(1938), 643-644.
[49] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции нескольких переменных [Текст] / Б.В. Шабат. М.: Наука, 1976.– 400 с.
[50] Сафаров Д.С. Периодические решения эллиптических систем первого порядка [Текст] / Д.С. Сафаров //Дифферен. уравнения. –1981.– т.17, №8 –С.1468-1477.
[51] Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции [Текст] / Д.С. Сафаров // ДАН ТаджССР.– 1981.– т.24, №9 –С. 535-538.
[52] Сафаров Д.С. О двоякопериодических обобщенных голоморфных векторах [Текст] / Д.С. Сафаров // ДАН ТаджССР.– 1982. – т.25, №3– С.141-144.
[53] Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции [Текст] / Д.С. Сафаров // Дифференц. уравнения. –1991.– т.27, №4– С.656-664.
[54] Сафаров Д.С. Двоякопериодические решения для одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] / Д.С. Сафаров //Материалы международной конференции «Дифференциальные и

интегральные уравнения и смежные вопросы анализа». Душанбе. – 2005.–С.174-175.
[55] Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения [Текст] / Д.С. Сафаров //Душанбе, 2010.– Автореф. дис.д.ф.-м.-н.
[56] Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщѐнные аналитические функции и их приложения [Текст] / Д.С. Сафаров. Душанбе, Дониш, 2012, 190 стр.
[57] Сенгилов В.В. Краевые задачи типа Неймана и типа Рике для метааналитических функций в круге [Текст] / В.В. Сенгилов // дис. – канд. физ. – мат. наук. Смоленск, 2006. – 101 с.
[58] Соколов И.А. О краевых задачах типа Римана для полианалитических функций [Текст] / И.А. Соколов // дис. канд. физ. – мат. наук. – Минск, 1970.
[59] Хрисанфов В.И. Краевые задачи типа Гилберта в классах обобщенных метааналитических функций в круге [Текст] / В.И. Хрисанфов //Автореф. Канд. дисс. – Екатеренбург, 2012.
[60] Bers L. Theory of pseudo analytic functions [Текст] / L.Bers. New York. 1958, pp.
[61] Bers L. On a representation for linear elliptic systems with disc on to on nous coefficients and its appiliantoons [Текст] / L.Bers, L.Nirenberg //In: Confegnointernar equarionili nearialle derivate partiali. Roma: 1954-1955/ pp.111-140.
[62] Burgatti P. Sulla funzioni analitiche d'ordinip [Текст] / P. Burgatti. Bolletino della Unione Matem. Italiana, Anno 1, 1(1922).
[63] Erwe F. Ubergewisse Klasson doppelt periodischer Funktionen / F. Erwe //Acta Math. 97 (1957), 145 – 187.
[64] Safarov D.S. On Double-Periodic Solutions of First Order elliptic Systems [Текст] / D.S. Safarov // Complex Variables. 1994, Vol.26, pp.177-187.
[65] Teodorescu N. La derivee areolaire et ses applications la physique mathematique. Paris, 1931.
[66] Wang Vu – Pend. Hilbert boundary value problems on a class of metaanalitic functions on the unit circumference [Текст] /Vu.Wang. 5 ISAAC. Congress, Catania, July 25 – 30, 2005: Conferences Abstracts Catania: Unai. Catania. Dep/ Math. And Inf. 2005. – p. 158.

Публикации автора по теме диссертации

В рецензируемых журналах:

[67] Саидназаров Р.С. Обобщенные двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] /Д.С. Сафаров, Р.С.Саидназаров // ДАН РТ– 2013.– т. 56, №10.–С. 779-788.

[68] Саидназаров Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем высокого порядка [Текст] / Д.С. Сафаров, Р.С. Саидназаров // ДАН РТ.– 2014– т. 57, №5.–С. 363-370.

[69] Саидназаров Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] / Р.С. Саидназаров // Вестник ТНУ, 2015 . –1/1(156).–С. 8-16.

[70] Саидназаров Р.С. О многообразии двоякопериодических решений одной эллиптической системы второго порядка [Текст] / Р.С.Саидназаров // Вестник ТНУ, 2015.–1/1(156) –С. 47-53.

В тезисах конференций:

[71] Саидназаров Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] / Д.С.Сафаров, Р.С. Саидназаров //Материалы международной конференции посвященной 20-й годовщине независимости Республики Таджикистан «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения». Душанбе, 23-24 июня 2011 г. –С. 113-117.

[72] Саидназаров Р.С. Эллиптические функции второго рода и их приложения [Текст] / Р.С. Саидназаров, А.Т. Гаюров // Материалы международной научно методической конференции посвященной 35-летию университета и 20-летию кафедры алгебра и геометрии «Современные проблемы математики и ее преподавания»–Курган-Тюбе 10-11 май 2013 стр. 81-84.

[73] Саидназаров Р.С. О двоякопериодических решениях уравнения Бицадзе [Текст] / Р.С.Саидназаров // Материалы международной научно практической конференции, посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 75-летию профессора Шарипова Дж.Ш. «Современные проблемы точных наук и их преподавания», Курган-Тюбе.– 2014.–С. 78-82.

[74] Саидназаров Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] / Р.С. Саидназаров, Д.С. Сафаров //Materialy VIII Międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji «Nauk owaprzestrzeń Europy – 2012» Volume 37. Matematyka. Technicznenauki.: Przemysl. Naukaistudia – 104 s.
[75] Саидназаров Р.С. Двоякопериодические метааналитические функции [Текст] / Д.С. Сафаров, Р.С. Саидназаров //«Материалы международной научной конференции посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Сабирова Темура Сафаровича», Душанбе 29-30 октября 2015 г.