На правах рукописи

Замонов Бехруз Маликасрорович

Короткие кубические тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе – 2017

Работа выполнена в Институте математики имени А. Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор, Чубариков Владимир Николаевич
Официальные оппоненты:	Королёв Максим Александрович, доктор физико–математических наук, ФГБУН «Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник отдела теории чисел
	Исматов Сайфулло Неъматович кандидат физико-математических наук, Таджикский национальный университет, доцент кафедры алгебры и теории чисел
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова»

Защита состоится 16 июня в 12 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02 Хайруллоев Ш.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена задачам аналитической теории чисел. Основным предметом её исследований является оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм и короткой кубической тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса.

Многие задачи аналитической теории чисел сводятся к изучению распределения дробных долей некоторых функций, которое, в свою очередь, зависит от оценок модуля, так называемых, тригонометрических сумм.

Впервые тригонометрические суммы появились у Гаусса при доказательстве закона взаимности квадратичных вычетов. Он исчерпывающим образом исследовал важнейшие свойства носящей его имя "*суммы Гаусса*". Тригонометрические суммы в дальнейшем стали мощным средством решения ряда важных проблем теории чисел. При этом, основной в отношении таких сумм стала проблема разыскания их возможно более точной оценки, то есть возможно более точной верхней границы их модуля.

И.М. Виноградов[1] создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Он обнаружил, что суммы по простым числам могут быть составлены путём сложений и вычитаний только из сравнительно небольшого числа других сумм (решето Виноградова), хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм и средств, не имеющих какого-либо отношения к теории функции $\zeta(s)$ или L-рядов (метод сглаживания двойных сумм). В частности, он доказал теорему о нетривиальной оценке линейных тригонометрических сумм с простыми числами и решил тернарную проблему Гольдбаха.

Согласно теореме Дирихле[2] о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

[1] Виноградов И.М. Избранные труды // М.: Изд-во АН СССР. 1952. 436 с.

[2] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел // 2-ое изд, М.: Наука, 1983. 240 с.

Тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{n\le x}\mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$ впервые рассматривал Г. Дэвенпорт[3]. В 1937 году, воспользовавшись методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова, он доказал, что для всякого фиксированного $B>0$ имеет место оценка

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x\mathscr{L}^{-B},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от B. Такую же оценку при $k\ge 2$, k – фиксированное целое число, получил Хуа Ло-кен[4]. Эти безусловные результаты Г. Дэвенпорта и Хуа Ло-кена до сих пор остаются самыми точными.

Наилучший условный результат в случае $k=1$ принадлежит Бейкеру и Харману[5]. В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) доказали, что

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x^{\frac{3}{4}+\varepsilon},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε. Эту оценку для $k\ge 2$, k – фиксированное целое число, обобщили Т. Жан и Дж. Лю[6]

Т. Жан[7], рассматривая короткую тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x}\mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$ и $y\ge x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, получил нетривиальную оценку

$$|S_k(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}. \tag{1}$$

Затем он[8] получил эту оценку уже при $y\ge x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$.

[3]Davenport H. On some infinite series involving arithmetical functions (II) // The Quarterly Journal of Mathematics. 1937. V. 8, No 1 pp. 313 — 320.

[4]Хуа Л.Г. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел // М.: Мир. 1964.

[5]Baker R.C., Harman G. Exponential sums formed with the Mobius function // J. London Math. Soc. 1991. (2)43. pp. 193 – 198.

[6]Liu J.Y., Zhan T. Exponential sums involving the Mobius function // Indag. Math. (N.S.), 7(2):271–278, 1996.

[7]Zhan T. Davenport's theorem in short intervals // Chin. Ann. of Math., 12B(4):421–431, 1991.

[8]Zhan T. On the representation of large odd integer as a sum of three almost equal primes // Acta Mathematica Sinica, 7(3):259–272, 1991.

В случае $k = 2$ безусловную нетривиальную оценку вида (1) при $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ получили Т. Жан и Дж. Лю[9].

В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) Г.С. Лу и Х.Х. Лао[10] доказали оценку вида (1) при $k = 2$ и $y \geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

А.В. Кумчев[11] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y \geq x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1 - \frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Отсюда, в частности для $S_3(\alpha; x, y)$ следует нетривиальная оценка при

$$y \geq x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}, \qquad \tau = x^{\frac{25}{9}}P^{-1}.$$

В настоящей диссертации классическим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова получена новая оценка короткой кубической тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса.

Цель работы.

Целью диссертационной работы являются получение нетривиальной оценки коротких кубических двойных тригонометрических сумм, и её применения для нахождения нетривиальной оценки короткой кубической тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса.

Методы исследования

Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, в том числе

- метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова;
- метода оценок тригонометрических сумм Г. Вейля.

[9] Liu J.Y., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals // I. Monatshefte fur Mathematik. 1999. 127(1). pp. 27 – 41.

[10] Lu G.S., Lao H.X. On exponential sums over primes in short intervals // Monatshefte fur Mathematik. 2007. 151(2). pp. 153 – 164.

[11] Kumchev A.V. On Weyl sums over primes in short intervals // “Arithmetic in Shangrila” — Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. V. 9. Singapore: World Scientific. pp. 116–131.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- получена нетривиальная оценка короткой кубической двойной тригонометрической суммы
$$J_3(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b(n) e(\alpha(mn)^3),$$
где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N \le U < 2N$, $x > x_0$, y – вещественные числа, с «длинным» сплошным суммированием в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{8A+791})$, A — абсолютная постоянная, при
$$\tau = y^3\mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \le x\mathscr{L}^{-2A-8};$$
- доказана теорема об оценке короткой двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы, следствием которой является её нетривиальная оценка в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(A+13)})$, при
$$\tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \le N \le y\mathscr{L}^{-8(A+13)};$$
- найдена нетривиальная оценка короткой кубической тригонометрической суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+19)})$, $B \ge 11$ — абсолютная постоянная, при
$$y \ge x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+282}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}.$$

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конфиренсиях и семинарах:

- XIV Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70 летию со дня рождения С.М. Воронина и Г.И. Архипова, Саратов, 12-14 сентября 2016 года;

- Международная научная конференция "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" посвященная 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015;

- XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённая восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25-30 мая 2015 года;

- семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2013 – 2016 гг.) и на общеинститутском семинаре (2014 – 2016 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- семинары кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в семи научных работах, список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы-72 страницы. Список цитированной литературы включает 34 наименования.

Содержание диссертации

Во **введении** описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов; обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов; приводятся основные результаты диссертации.

Все безусловные нетривиальные оценки коротких кубических тригонометрических сумм $S_3(\alpha; x, y)$, как и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$f_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

в малых дугах получены методом оценок сумм с простыми числами И.М. Виноградова, основу которого, наряду с «решетом Виноградова», составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b(n) e(\alpha (mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N \le U < 2N$, $x > x_0$, y – вещественные числа.

Первая глава посвящена коротким двойным тригонометрическим суммам $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием в малых дугах.

Сумму $J_k(\alpha; x, y, M, N)$ назовём *короткой двойной тригонометрической суммой с «длинным» сплошным суммированием*, если $b(n) = 1$ и $N \ge x^\beta$, $\beta > \frac{1}{2}$.

Суммы $J_1(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием последовательно были изучены в работах И.М. Виноградова[1], Хейзелгроува[12], В. Статулявычуса[13], Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо[14], Т. Жана[15] при получении нетривиальных оценок коротких сумм $f_1(\alpha; x, y)$ и $S_1(\alpha; x, y)$.

Сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием изучали Jianya Liu и Zhan Tao[16] и получили нетривиальную оценку сумм $S_2(\alpha; x, y)$ и $f_2(\alpha; x, y)$ при $y \ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

---

[12]Haselgrove C.B. Some theorems in the analytic theory of number // J.London Math.Soc. 1951. pp. 273 – 277.

[13]Статулявичус В. О представлении нечётных чисел суммою трёх почти равных простых чисел // Вильнюс. Ученые труды университета. сер. мат., физ. и хим. н. 1955. № 2. С. 5 – 23.

[14]Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. Vol. 2. pp. 138 – 147.

[15]Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica, new ser. 1991. Vol. 7, no. 3. pp. 135 – 170.

[16]Liu J.Y., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I //Mh Math. 1999. Vol. 127. pp. 27 – 41.

Основным результатом первой главы является вывод нетривиальной оценки короткой двойной тригонометрической суммы с «длинным» сплошным суммированием $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{8A+791})$ при

$$\tau = y^3\mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \le x\mathscr{L}^{-2A-8}.$$

Теорема 1.1. *Пусть в сумме* $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ *выполняются условия* $|a_m| \le \tau_4(m)$, $b_n = 1$, $\sqrt{x} < y < x\mathscr{L}^{-1}$. *Тогда при*

$$\mathscr{L}^{8A+791} < q < y^3\mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \le x\mathscr{L}^{-2A-8},$$

где A *— абсолютная постоянная, справедлива оценка*

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами работ[17, 18, 19].

При сведении коротких кубических тригонометрических сумм $S_3(\alpha; x, y)$ к двойным суммам вида $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ наряду с *короткими двойными тригонометрическими суммами с «длинным» сплошным суммированием*, возникают также двойные суммы, в которых суммы, составляющие двойную сумму, «близки» по порядку, то есть $xy^{-1} \le N \le y$.

Вторая глава посвящена таким суммам, которые назовём *короткими кубическими двойными тригонометрическими суммами, имеющими близкие по порядку суммы.*

Суммы $J_1(\alpha; x, y, M, N)$, имеющие близкие по порядку суммы, также были изучены в работах И.М. Виноградова[1], Хейзелгроува[12], В. Статулявычуса[13], Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо[14], Т. Жана[15] при получения нетривиальных оценок коротких сумм $f_1(\alpha; x, y)$ и $S_1(\alpha; x, y)$.

Сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$, имеющую близкие по порядку суммы, изучили Jianya Liu и Zhan Tao[16] и получили нетривиальную оценку сумм $S_2(\alpha; x, y)$ и $f_2(\alpha; x, y)$ при $y \ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

---

[17] Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459, №2. С. 156 – 157.

[18] Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и её приложения // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57. № 4. С. 55 – 71.

[19] Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. №3. С. 56 – 60.

Основным результатом второй главы является доказательство теоремы 2.1 об оценке короткой двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы.

Теорема 2.1. *Пусть* $xy^{-1} \le N \le y$, $M \le N$, $y < x\mathscr{L}^{-1}$, $|a_m| \le \tau_{5-k}(m)$, $|b_n| \le \tau_k(n)$, $k = 1, 2, 3, 4$. *Тогда справедлива оценка*

$$|J_3| \ll \begin{cases} y\left(\dfrac{\mathscr{L}^{24}}{q} + \dfrac{x\mathscr{L}^{25}}{yN} + \dfrac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}} \mathscr{L}^{k^2-4k+12}, & \text{если } 0,5q < \dfrac{y^4}{xN}; \\ y\left(\dfrac{x^2q\mathscr{L}^{25}}{y^5} + \dfrac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \dfrac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}} \mathscr{L}^{k^2-4k+12}, & \text{если } 0,5q \ge \dfrac{y^4}{xN}. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2.1 проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами работ[17, 18].

Из этой теоремы вытекает нетривиальная оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм, имеющих близкие по порядку суммы в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(A+13)})$ при

$$\tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \le N \le y\mathscr{L}^{-8(A+13)}.$$

Следствие 2.1.1. *Пусть* $M \le N$, $y < x\mathscr{L}^{-1}$, $|a_m| \le \tau_{5-k}(m)$, $|b_n| \le \tau_k(n)$, $k = 1, 2, 3$, *тогда при*

$$\mathscr{L}^{32(A+13)} \le q \le \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \le N \le y\mathscr{L}^{-8(A+13)},$$

где A *— абсолютная постоянная, справедлива оценка*

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Третья глава посвящена коротким кубическим тригонометрическим суммам с функцией Мёбиуса, то есть при $k = 3$ суммам вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \mu(n)e(\alpha n^k).$$

Тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{n\le x} \mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$ впервые рассматривал Г. Дэвенпорт. В 1937 году[3], воспользовавшись методом оценок тригонометрической сумм с простыми числами И.М. Виноградова, он доказал, что для всякого фиксированного $B>0$ имеет место оценка

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x\mathscr{L}^{-B},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от B. Такую же оценку при $k\geq 2$, k – фиксированное целое число, получил Хуа Ло-кен[4]. Эти безусловные результаты Г. Дэвенпорта и Хуа Ло-кена до сих пор остаются самыми точными.

Наилучший условный результат в случае $k=1$ принадлежит Бейкеру и Харману[5]. Они в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) доказали, что

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x^{\frac{3}{4}+\varepsilon},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε. Эту оценку для $k\geq 2$, k – фиксированное целое число обобщили Т. Жан и Дж. Лю[6].

Т. Жан[7], рассматривая короткую тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса $S_1(\alpha; x, y)$ при $y\geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, получил нетривиальную оценку

$$|S_1(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}.$$

Затем он[8] получил эту оценку уже при $y\geq x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$.

Первую безусловную нетривиальную оценку короткой квадратичной тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса $S_2(\alpha; x, y)$ получили Т. Жан и Дж. Лю[9]. При $y\geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ они доказали

$$|S_2(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}.$$

В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) Г.С. Лу и Х.Х. Лао[10] доказали эту оценку при $y\geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

А.В. Кумчев[11] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при

$$y\geq x^{\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = 1-\frac{1}{2k+3}, \qquad \tau=\frac{x^{1+2\theta}}{P}.$$

Отсюда, в частности для коротких кубических тригонометрических сумм с функцией Мёбиуса, $S_3(\alpha; x, y)$ следует нетривиальная оценка при

$$y\geq x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}, \qquad \tau = x^{\frac{25}{9}}P^{-1}.$$

Основным результатом третьей главы является доказательство теоремы 3.1 о нетривиальной оценке суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+19)})$, $B \geq 11$ при

$$y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+282}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2} \mathscr{L}^{-32(B+18)}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $B \geq 11$ — абсолютная постоянная $x > x_0 > 0$ и*

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \mu(n) e(\alpha n^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда при $y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+282}$ и $\mathscr{L}^{32(B+18)} \leq q \leq y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-32(B+18)}$ справедлива оценка

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B}.$$

Теорема 3.1 доказывается методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова, используя результаты предыдущих глав, а именно

- теорему 1.1 об оценке короткой кубической двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием для α, принадлежащей малым дугам;

- теорему 2.1 об оценке короткой кубической двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы, для α, принадлежащей малым дугам.

Благодарности

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору В.Н. Чубарикову за научное руководство, за постоянное внимание и помощь в работе.

Публикации по теме диссертации

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

1. Замонов, Б.М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием [Текст] /Б.М. Замонов, З.Х. Рахмонов, Ф.З. Рахмонов // Чебышевский сборник. 2016.- Т. 17.- № 1.- С. 217 – 231.

2. Замонов, Б.М. Об оценке коротких кубических двойных тригонометрических сумм на малых дугах [Текст] /Б.М. Замонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015.- Т. 58.- № 6.- С. 483 – 486.

3. Замонов, Б.М. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, с «длинным» сплошным суммированием [Текст] /Б.М. Замонов, З.Х. Рахмонов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014.- № 4(157).- С. 7 – 23.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

4. Замонов, Б.М. Об оценке коротких кубических тригонометрических сумм с функцией Мёбиуса на малых дугах [Текст] /Б.М. Замонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2016.- Т. 59.- № 7 – 8.- С. 278 – 281.

5. Замонов, Б.М. Короткие двойные тригонометрические суммы на малых дугах [Текст] /Б.М. Замонов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анлизу и смежным вопросам. 2016.- № 8.- С. 32 – 34.

6. Замонов, Б.М. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы с «длинным» сплошным суммированием [Текст] /Б.М. Замонов, З.Х. Рахмонов // XIII Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения", посвящённая 80-летию со дня рождения С.С. Рышкова, Тула, 25-30 мая 2015 г.- С. 47 – 49.

7. Замонов, Б.М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием [Текст]

/Б.М. Замонов // Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел", посвящённой 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015.- С. 11 – 12.