Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

ЗАМОНОВ БЕХРУЗ МАЛИКАСРОРОВИЧ

КОРОТКИЕ КУБИЧЕСКИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ С ФУНКЦИЕЙ МЁБИУСА

Специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
профессор Чубариков Владимир Николаевич

Душанбе — 2017

Оглавление

Введение **4**

Общая характеристика работы 4

Содержание диссертации 10

1 Короткие кубические двойные тригонометрические суммы с «длинным» сплошным суммированием **17**

1.1. Постановка задачи и формулировка результатов 17

1.2. Вспомогательные леммы 20

1.3. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием 21

2 Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, имеющие близкие по порядку суммы **38**

2.1. Постановка задачи и формулировка результатов 38

2.2. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм на малых дугах, имеющих близкие по порядку суммы . . 40

3 Короткая кубическая сумма с функцией Мёбиуса **49**

3.1. Формулировка результатов и вспомогательная лемма 49

3.2. Короткая кубическая тригонометрическая сумма с функцией Мёбиуса 53

Заключение 65

Литература 67

Обозначения

$\mathscr{L} = \ln xq$.

$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i\sin 2\pi\alpha$.

ε – положительные сколь угодно малые постоянные.

(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b.

$[x]$ – целая часть числа x.

$\{x\}$ – дробная часть числа x.

$\|x\| = \min\Big(\{x\}, 1 - \{x\}\Big)$ – расстояние до ближайшего целого числа.

$\varphi(q)$ – функция Эйлера.

$\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

$\Lambda(n)$ – функция Мангольдта.

$\tau(n)$ – число делителей числа n.

$\tau_r(n)$ – число решений уравнения $x_1x_2\ldots x_r = n$ в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

$c, c_1, c_2, \cdots$, – положительные постоянные, не всегда одни и те же.

Запись $A \asymp B$ означает, что $c_1A \leq B \leq c_2A$.

При положительном A запись $B = O(A)$ или $B \ll A$ означает, что существует $c > 0$ такое, что $|B| \leq cA$.

При ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются тремя индексами: номер главы, номер параграфа, номер утверждения.

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена задачам аналитической теории чисел. Основным предметом её исследований является оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм и короткой кубической тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса.

Многие задачи аналитической теории чисел сводятся к изучению распределения дробных долей некоторых функций, которое, в свою очередь, зависит от оценок модуля так называемых тригонометрических сумм.

Впервые тригонометрические суммы появились у Гаусса при доказательстве закона взаимности квадратичных вычетов. Он исчерпывающим образом исследовал важнейшие свойства носящей его имя “*суммы Гаусса*”. Тригонометрические суммы в дальнейшем стали мощным средством решения ряда важных проблем теории чисел. При этом, основной в отношении таких сумм стала проблема разыскания их возможно более точной оценки, то есть возможно более точной верхней границы их модуля.

И. М. Виноградов [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Он обнаружил, что суммы по простыми числами могут быть составлены путём сложений и вычитаний только из сравнительно небольшого числа других сумм (решето Виноградова), хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм и средств, не имеющих какого-либо отношения к теории функции $\zeta(s)$ или L-рядов (метод сглаживания двойных сумм). В частности, он доказал теорему о нетривиальной оценке линейных тригонометрических сумм с простыми числами и решил тернарную проблему Гольдбаха.

Согласно теореме Дирихле [8] о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{n \le x} \mu(n) e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$ впервые рассматривал Г. Дэвенпорт [9]. В 1937 году, воспользовавшись методом оценок тригонометрической сумм с простыми числами И. М. Виноградова, он доказал, что для всякого фиксированного $B > 0$ имеет место оценка

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x\mathscr{L}^{-B},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от B. Такую же оценку при $k \ge 2$, k – фиксированное целое число, получил Хуа Ло-кен [10, 11]. Эти безусловные результаты Г. Дэвенпорта и Хуа Ло-кена до сих пор остаются самыми точными.

Наилучший условный результат в случае $k = 1$ принадлежит Бейкеру и Харману [12]. В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) доказали, что

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x^{\frac{3}{4}+\varepsilon},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε. Эту оценку для $k \geq 2$, k – фиксированное целое число, обобщили Т. Жан и Дж. Лю [13].

Т. Жан [14] рассматривая короткую тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$ и $y \geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ получил нетривиальную оценку

$$|S_k(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}. \tag{1}$$

Затем он [15] получил эту оценку уже при $y \geq x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$.

В случае $k = 2$ безусловную нетривиальную оценку вида (1) при $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ получили Т. Жан и Дж. Лю [16].

В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) Г. С. Лу и Х. Х. Лао [17] доказали оценку вида (1) при $k = 2$ и $y \geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

Кумчев А.В. [18] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y \geq x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1 - \frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Отсюда, в частности для $S_3(\alpha; x, y)$ следует нетривиальная оценка при

$$y \geq x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}, \qquad \tau = x^{\frac{25}{9}}P^{-1}.$$

В настоящей диссертации классическим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова получена новая оценка короткой кубической тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса.

Цель работы.

Целью диссертационной работы являются получение нетривиальной оценки для коротких кубических двойных тригонометрических сумм, и ее применения для нахождения нетривиальной оценки короткой кубической тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса.

Методы исследования

Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, в том числе

- метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова;
- метода оценок тригонометрических сумм Г.Вейля.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- получена нетривиальная оценка короткой кубической двойной тригонометрической суммы

$$J_3(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b(n)e(\alpha(mn)^3),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N \le U < 2N$, $x > x_0$, y – вещественные числа, с «длинным» сплошным суммированием в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{8A+791})$, A — абсолютная постоянная, при

$$\tau = y^3\mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \le x\mathscr{L}^{-2A-8};$$

- доказана теорема об оценке короткой двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы, следствием которой является её нетривиальная оценка в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(A+13)})$, при

$$\tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \le N \le y\mathscr{L}^{-8(A+13)};$$

- найдена нетривиальная оценка короткой кубической тригонометрической суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+19)})$, $B \ge 11$ — абсолютная постоянная, при

$$y \ge x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+282}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}.$$

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конфиренсиях и семинарах:

- XIV Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70 летию со дня рождения С.М. Воронина и Г.И. Архипова, Саратов, 12-14 сентября 2016 года;

- Международная научная конференция "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" посвященной 75-летию профессора Т. С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015;

- XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённая восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25-30 мая 2015 года;

- на семинары отдела алгебры, теории чисел и топологии (2013 – 2016 гг.) и на общеинститутском семинаре (2014 – 2016 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- на семинары кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в семи научных работах, список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с З. Х. Рахмоновым, соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы. Общий объём работы 66 страниц. Список цитированной литературы включает 34 наименований.

Содержание диссертации

Во **введении** описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов; обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов; приводятся основные результаты диссертации.

Все безусловные нетривиальные оценки коротких кубических тригонометрических сумм $S_3(\alpha; x, y)$, как и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$f_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

в малых дугах получены методом оценок сумм с простыми числами И. М. Виноградова, основу которого, наряду с «решетом Виноградова», составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b(n)e(\alpha (mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N \leq U < 2N$, $x > x_0$, y – вещественные числа.

Первая глава посвящена коротким двойным тригонометрическим суммам $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием в малых дугах.

Сумму $J_k(\alpha; x, y, M, N)$ назовём *короткой двойной тригонометрической суммой с «длинным» сплошным суммированием*, если $b(n) = 1$ и $N \geq x^{\beta}$, $\beta > \frac{1}{2}$.

Суммы $J_1(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием последовательно были изучены в работах И. М. Виноградова [1], Хейзелгроува [19], В. Статулявычуса [20], Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо [21], Т. Жана [22] при получении нетривиальных оценок коротких сумм $f_1(\alpha; x, y)$ и $S_1(\alpha; x, y)$.

Сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием изучили Jianya Liu и Zhan Tao [23] и получили нетривиальную оценку сумм $S_2(\alpha; x, y)$ и $f_2(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

Основным результатом первой главы является вывод нетривиальной оценки короткой двойной тригонометрической суммы с «длинным» сплошным суммированием $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{8A+791})$ при

$$\tau = y^3 \mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{2A+198} < N \leq x\mathscr{L}^{-2A-8}.$$

Теорема 1.1. *Пусть в сумме $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ выполняются условия $|a_m| \leq \tau_4(m)$, $b_n = 1$, $\sqrt{x} < y < x\mathscr{L}^{-1}$. Тогда при*

$$\mathscr{L}^{8A+791} < q < y^3 \mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{2A+198} < N \leq x\mathscr{L}^{-2A-8},$$

где A — абсолютная постоянная, справедлива оценка

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова в сочетании с методами работ [23, 24, 25, 26].

При сведении коротких кубических тригонометрических сумм $S_3(\alpha; x, y)$ к двойным суммам вида $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ наряду с *короткими двойными тригонометрическими суммами с «длинным» сплошным суммированием*, возникают также двойные суммы, в которых суммы, составляющие двойную сумму, «близки» по порядку, то есть $xy^{-1} \le N \le y$.

Вторая глава посвящена таким суммам, которых назовём *короткими кубическими двойными тригонометрическими суммами, имеющими близкие по порядку суммы.*

Суммы $J_1(\alpha; x, y, M, N)$, имеющие близкие по порядку суммы, также были изучены в работах И. М. Виноградова [1], Хейзелгроува [19], В. Статулявычуса [20], Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо [21], Т. Жана [22] при получения нетривиальных оценок коротких сумм $f_1(\alpha; x, y)$ и $S_1(\alpha; x, y)$.

Сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$, имеющие близкие по порядку суммы, изучили Jianya Liu и Zhan Tao [23] и получили нетривиальную оценку сумм $S_2(\alpha; x, y)$ и $f_2(\alpha; x, y)$ при $y \ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

Основным результатом второй главы является доказательство теоремы 2.1 об оценки короткой двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы.

Теорема 2.1. *Пусть* $xy^{-1} \le N \le y$, $M \le N$, $y < x\mathscr{L}^{-1}$, $|a_m| \le \tau_{5-k}(m)$,

$|b_n| \le \tau_k(n)$, $k=1,2,3,4$. *Тогда справедлива оценка*

$$|J_3(\alpha;x,y,M,N)| \ll \begin{cases} y\left(\dfrac{\mathscr{L}^{24}}{q}+\dfrac{x\mathscr{L}^{25}}{yN}+\dfrac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}}\mathscr{L}^{k^2-4k+12}, & \text{если } 0,5q<\dfrac{y^4}{xN};\\ y\left(\dfrac{x^2q\mathscr{L}^{25}}{y^5}+\dfrac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2}+\dfrac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}}\mathscr{L}^{k^2-4k+12}, & \text{если } 0,5q\ge\dfrac{y^4}{xN}.\end{cases}$$

Доказательство теоремы 2.1 проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работ [23, 24].

Из этой теоремы вытекает нетривиальная оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм, имеющих близкие по порядку суммы в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(A+13)})$ при

$$\tau=\frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)},\qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)}\le N\le y\mathscr{L}^{-8(A+13)}.$$

Следствие 2.1.1. *Пусть* $M \le N$, $y < x\mathscr{L}^{-1}$, $|a_m| \le \tau_{5-k}(m)$, $|b_n| \le \tau_k(n)$, $k=1,2,3$, *тогда при*

$$\mathscr{L}^{32(A+13)}\le q\le\frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)},\qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)}\le N\le y\mathscr{L}^{-8(A+13)},$$

где A — абсолютная постоянная, справедлива оценка

$$|J_3(\alpha;x,y,M,N)|\ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Третья глава посвящена коротким кубическим тригонометрическим суммам с функцией Мёбиуса, то есть при $k=3$ суммам вида

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\mu(n)e(\alpha n^k).$$

Тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{n \le x} \mu(n) e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$ впервые рассматривал Г. Дэвенпорт. В 1937 году [9], воспользовавшись методом оценок тригонометрической сумм с простыми числами И. М. Виноградова, он доказал, что для всякого фиксированного $B > 0$ имеет место оценка

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x\mathscr{L}^{-B},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от B. Такую же оценку при $k \geq 2$, k – фиксированное целое число, получил Хуа Ло-кен [10]. Эти безусловные результаты Г. Дэвенпорта и Хуа Ло-кена до сих пор остаются самыми точными.

Наилучший условный результат в случае $k = 1$ принадлежит Бейкеру и Харману [12]. Они в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) доказали, что

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x^{\frac{3}{4}+\varepsilon},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε. Эту оценку для $k \geq 2$, k – фиксированное целое число обобщили Т. Жан и Дж. Лю [13].

Т. Жан [14] рассматривая короткую тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса $S_1(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ получил нетривиальную оценку

$$|S_1(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}.$$

Затем он [15] получил эту оценку уже при $y \geq x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$.

Первую безусловную нетривиальную оценку короткой квадратичной тригонометрической сумму с функцией Мёбиуса $S_2(\alpha; x, y)$ получили Т. Жан и

Дж. Лю [16]. При $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ они доказали

$$|S_2(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}.$$

В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) Г. С. Лу и Х. Х. Лао [17] доказали эту оценку при $y \geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

Кумчев А.В. [18] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при

$$y \geq x^{\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = 1 - \frac{1}{2k+3}, \qquad \tau = \frac{x^{1+2\theta}}{P}.$$

Отсюда, в частности для коротких кубических тригонометрических сумм с функцией Мёбиуса, $S_3(\alpha; x, y)$ следует нетривиальная оценка при

$$y \geq x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}, \qquad \tau = x^{\frac{25}{9}}P^{-1}.$$

Основным результатом третей главы является доказательство теоремы 3.1 о нетривиальной оценке суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+19)})$, $B \geq 11$ при

$$y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+282}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $B \geq 11$ — абсолютная постоянная $x > x_0 > 0$ и*

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \mu(n)e(\alpha n^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда при $y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+282}$ и $\mathscr{L}^{32(B+18)} \leq q \leq y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$ справедлива оценка

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B}.$$

Теорема 3.1 доказывается методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова, используя результаты предыдущих глав, а именно

- теорему 1.1 об оценке короткой кубической двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием для α, принадлежащих малым дугам;

- теорему 2.1 об оценке короткой кубической двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы, для α принадлежащие малым дугам.

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору В.Н.Чубарикову за научное руководство, за постоянное внимание и помощь в работе.

Глава 1

Короткие кубические двойные тригонометрические суммы с «длинным» сплошным суммированием

1.1 . Постановка задачи и формулировка результатов

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое число α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

И.М.Виноградов [1] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$f_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

при $k=1$, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$ при $\tau=x^{\frac{1}{3}}$ и $y>x^{2/3+\varepsilon}$.

Т. Жан [14], рассматривая короткую тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$ и $y\ge x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ получил нетривиальную оценку

$$|S_k(\alpha;x,y)|\ll\mathscr{L}^{-B}. \qquad (1.1.1)$$

Затем он получил эту оценку уже при $y\ge x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$ [15]. Первую безусловную нетривиальную оценку вида (3.1.1) при $k=2$ и $y\ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ получили Т. Жан и Дж. Лю [16].

Кумчев А.В. [18] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y\ge x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta=1-\frac{1}{2k+3}$ и $\tau=x^{1+2\theta}P^{-1}$. Отсюда, в частности, для $S_3(\alpha;x,y)$ следует нетривиальная оценка при

$$y\ge x^{\frac{8}{9}+\varepsilon},\qquad \tau=x^{\frac{25}{9}}P^{-1}.$$

Все вышеуказанные нетривиальные оценки сумм $S_k(\alpha;x,y)$ как и сумм $f_1(\alpha;x,y)$ в малых дугах, получены метод оценок сумм с простыми числами И. М. Виноградова, основу которого наряду с «решетом Виноградова», составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha;x,y,M,N)=\sum_{M<m\le 2M}a(m)\sum_{\substack{U<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}}b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N\le U<2N$, $x>x_0$, y – вещественные числа.

Сумму $J_k(\alpha; x, y, M, N)$ при $b(n) = 1$ и $N \geq x^\beta$, $\beta > \frac{1}{2}$ мы назовём *короткой двойной тригонометрической суммой с «длинным» сплошным суммированием.*

Суммы $J_1(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием последовательно были изучены в работах И. М. Виноградова [1], Хейзелгроува [19], В. Статулявычуса [20], Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо [21], Т. Жана [22] при получении нетривиальных оценок коротких сумм $f_1(\alpha; x, y)$ и $S_1(\alpha; x, y)$.

Сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием изучили Jianya Liu и Zhan Tao [23] и получили нетривиальную оценку сумм $S_2(\alpha; x, y)$ и $f_2(\alpha; x, y)$ при $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

Основным результатом первой главы является вывод нетривиальной оценки короткой двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{8A+791})$ при

$$\tau = y^3\mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \leq x\mathscr{L}^{-2A-8}.$$

Теорема 1.1. *Пусть в сумме $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ выполняются условия $|a_m| \leq \tau_4(m)$, $b_n = 1$, $\sqrt{x} < y < x\mathscr{L}^{-1}$. Тогда при*

$$\mathscr{L}^{8A+791} < q < y^3\mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \leq x\mathscr{L}^{-2A-8},$$

где A — абсолютная постоянная, справедлива оценка

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство теоремы 1.1 проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова в сочетании с методами работ [23, 24, 25, 26].

1.2. Вспомогательные леммы

Лемма 1.1. *Пусть H и y - произвольные целые числа, $H \geq 1$. Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{x=y+1}^{y+H} e(\alpha x) \leq \min\left(H, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right), \quad \|\alpha\| = \min\left(\{\alpha\}, 1-\{\alpha\}\right).$$

Доказательство см. [6].

Лемма 1.2. . *При $x \geq 2$ имеем*

$$\sum_{n\leq x} \tau_r^k(n) \ll x\left(\ln x\right)^{r^k-1}, \qquad k = 1, 2.$$

Доказательство см. [27].

Лемма 1.3. *При вещественном числе α, подчинённом условиям*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq N, \quad |\theta| \leq 1,$$

а) для суммы

$$V_g = \sum_{z=g}^{g+q'} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha z\|}\right), \qquad q' < q, \qquad U > 0,$$

имеем неравенство

$$V_g \ll U + q\ln q,$$

б) а для суммы

$$V = \sum_{0<z\leq 0{,}5q} \frac{1}{\|\alpha z\|}$$

имеем неравенство

$$V \ll q\ln q.$$

Доказательство см. [6], стр. 61.

1.3. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием

Теорема 1.1. *Пусть в сумме* $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ *выполняются условия* $|a_m| \le \tau_4(m)$, $b_n = 1$, $\sqrt{x} < y < x\mathscr{L}^{-1}$. *Тогда при*

$$\mathscr{L}^{8A+791} < q < y^3\mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \le x\mathscr{L}^{-2A-8},$$

где A *— абсолютная постоянная, справедлива оценка*

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство. Для удобства условия

$$xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \le x\mathscr{L}^{-2A-8}$$

в теореме, с учётом неравенства $MN \asymp x$, заменим на

$$\mathscr{L}^{2A+8} \ll M \ll y^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{-2A-198}, \tag{1.3.1}$$

а сумму $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ обозначим через W. Возводя W в квадрат, найдём

$$|W|^2 = \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{M<\mu\le 2M} a_\mu \sum_{\substack{U<u\le 2N \\ x-y<mu\le x}} \sum_{\substack{U<u_1\le 2N \\ x-y<\mu u_1\le x}} e(\alpha((\mu u_1)^3 - (mu)^3)).$$

Разбивая сумму на три части, для которых соответственно выполняются условия $mu < \mu u_1$, $mu = \mu u_1$ и $mu > \mu u_1$, и имея в виду, что

$$\sum_{M<m,\mu\leq 2M} a_m a_\mu \sum_{\substack{U<u,u_1\leq 2N\\ x-y<mu=\mu u_1\leq x}} 1 = \sum_{x-y<r\leq x} \left(\sum_{\substack{m\backslash r, M<m\leq 2M,\\ U<r/m\leq 2N}} a_m \right)^2 \ll$$

$$\ll \sum_{x-y<r\leq x} \left(\sum_{\substack{m\backslash r, M<m\leq 2M,\\ U<r/m\leq 2N}} \tau_4(m) \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{x-y<r\leq x} \left(\sum_{m\backslash r} \tau_4(m) \right)^2 = \sum_{x-y<r\leq x} \tau_5^2(r) \ll y\mathscr{L}^{24},$$

получим

$$W^2 = W_1 + W_2 + O\left(y\mathscr{L}^{24}\right),$$

$$W_1 = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{M<\mu\leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U<u\leq 2N\\ x-y<mu\leq x}} \sum_{\substack{U<u_1\leq 2N\\ mn<\mu u_1\leq x}} e(\alpha((\mu u_1)^3 - (mu)^3)),$$

$$W_2 = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{M<\mu\leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U<u\leq 2N\\ x-y<mu\leq x}} \sum_{\substack{U<u_1\leq 2N\\ x-y<\mu u_1<mu}} e(\alpha((\mu u_1)^3 - (mu)^3)).$$

Имея в виду, что $|W_1| = |W_2|$, оценим только W_1. В сумме по u_1, делая замену переменного, вместо u_1 вводим переменную $r = \mu u_1 - mu$, для которой выполняются условия

$$mu + r \equiv 0(mod\mu), \quad U\mu < mu + r \leq 2N\mu, \quad 0 < r \leq x - mu.$$

Тогда

$$(\mu u_1)^3 - (mu)^3 = (\mu u_1 - mu)((mu)^2 + mu\mu u_1 + (\mu u_1)^2) =$$

$$= r\left((mu)^2 + mu\mu\cdot\frac{mu+r}{\mu} + \left(\mu\cdot\frac{mu+r}{\mu}\right)^2\right) = r(3(mu)^2 + 3mur + r^2),$$

и сумма W_1 принимает вид

$$W_1 = \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{M<\mu\le 2M} a_\mu \sum_{\substack{U<u\le 2N \\ x-y<mu\le x}} \sum_{\substack{U\mu<mu+r\le 2N\mu \\ 0<r\le x-mu \\ mu+r\equiv 0(mod\mu)}} e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2)) =$$

$$= \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{M<\mu\le 2M} a_\mu \sum_{0<r<y} \sum_{\substack{F<u\le G \\ mu\equiv -r(mod\mu)}} e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2)),$$

где

$$F=\max\left(U, \frac{U\mu-r}{m}, \frac{x-y}{m}\right), \qquad G=\min\left(2N, \frac{2N\mu-r}{m}, \frac{x}{m}\right).$$

Разбивая сумму W_1 на слагаемые, с условием $(m,\mu)=d$, $d\le 2M$, имеем

$$W_1 = \sum_{d\le 2M} \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{\substack{M<\mu\le 2M \\ (m,\mu)=d}} a_\mu \sum_{0<r<y} \sum_{\substack{F<u\le G \\ mu\equiv -r(mod\mu)}} e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2)).$$

Условие $(m,\mu)=d$ в сумме W равносильно условиям $m=\hat{m}d$, $\mu=\hat{\mu}d$, $(\hat{m},\hat{\mu})=1$. Следовательно, сравнение $mu\equiv -r(mod\,\mu)$ разрешимо только в случае, если r имеет вид $r=\hat{r}d$. Поэтому, заменив его на сравнение $\hat{m}u\equiv -\hat{r}(mod\,\hat{\mu})$, а переменные суммирования m, μ, r соответственно на $\hat{m}d$, $\hat{\mu}d$, $r=\hat{r}d$, найдём

$$W_1 = \sum_{d\le 2M} \sum_{M<\hat{m}d\le 2M} a_{\hat{m}d} \sum_{\substack{M<\hat{\mu}d\le 2M \\ (\hat{m},\hat{\mu})=1}} a_{\hat{\mu}d} \sum_{0<\hat{r}d<y} \sum_{\substack{F_{\hat{m}\hat{\mu}}<u\le G_{\hat{m}\hat{\mu}} \\ \hat{m}u\equiv -\hat{r}(mod\hat{\mu})}} e(\alpha\hat{r}d^3(3(\hat{m}u)^2+3\hat{m}u\hat{r}+\hat{r}^2)),$$

$$F_{\hat{m}\hat{\mu}}=\max\left(U, \frac{U\hat{\mu}-\hat{r}}{\hat{m}}, \frac{x-y}{\hat{m}d}\right), \qquad G_{\hat{m}\hat{\mu}}=\min\left(2N, \frac{2N\hat{\mu}-\hat{r}}{\hat{m}}, \frac{x}{\hat{m}d}\right).$$

Сравнение $\hat{m}u\equiv -\hat{r}(mod\,\hat{\mu})$ равносильно сравнению $u\equiv -\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}(mod\,\hat{\mu})$, где $\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}$ определяется из сравнения $\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}\equiv 1(mod\,\hat{\mu})$. Поэтому, представляя u

в виде $u = -\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1} + \hat{\mu}\hat{u}$, получим

$$W_1 = \sum_{d\le 2M}\sum_{M<\hat{m}d\le 2M} a_{\hat{m}d} \sum_{\substack{M<\hat{\mu}d\le 2M\\ (\hat{m},\hat{\mu})=1}} a_{\hat{\mu}d} \sum_{0<\hat{r}d<y}\sum_{\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{\mu}}<\hat{u}\le\mathcal{G}_{\hat{m}\hat{\mu}}} e(\alpha\hat{r}d^3(\hat{r}^2+g(\hat{u},\hat{m},\hat{\mu}))),$$

$$\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{\mu}} = \frac{F_{\hat{m}\hat{\mu}}}{\hat{\mu}} + \frac{\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}}{\hat{\mu}}, \qquad \mathcal{G}_{\hat{m}\hat{\mu}} = \frac{G_{\hat{m}\hat{\mu}}}{\hat{\mu}} + \frac{\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}}{\hat{\mu}},$$

$$3(\hat{m}u)^2 + 3\hat{m}u\hat{r} + \hat{r}^2 = 3(\hat{m}(\hat{\mu}\hat{u} - \hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}))^2 + 3\hat{m}(\hat{\mu}\hat{u} - \hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})\hat{r} + \hat{r}^2 =$$

$$= 3(\hat{m}\hat{\mu}\hat{u} - \hat{r}\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})^2 + 3(\hat{m}\hat{\mu}\hat{u} - \hat{r}\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})\hat{r} + \hat{r}^2 = g(\hat{u},\hat{m},\hat{\mu}) + \hat{r}^2.$$

В сумме W_1, ради удобства, обозначая переменные суммирования $\hat{m}$, $\hat{\mu}$, $\hat{r}$ и $\hat{u}$ через m, μ, r и u, получим

$$W_1 = \sum_{d\le 2M}\sum_{0<rd<y} e(\alpha d^3 r^3) W(r,d),$$

$$W(r,d) = \sum_{M<md\le 2M} a_{md} \sum_{\substack{M<\mu d\le 2M\\ (m,\mu)=1}} a_{\mu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}} e(3\alpha r d^3 g(u,m,\mu)),$$

$$\mathcal{F}_{m\mu} = \frac{F_{m\mu} + rm_\mu^{-1}}{\mu}, \qquad F_{m\mu} = \max\left(U, \frac{U\mu - r}{m}, \frac{x-y}{md}\right), \tag{1.3.2}$$

$$\mathcal{G}_{m\mu} = \frac{G_{m\mu} + rm_\mu^{-1}}{\mu}, \qquad G_{m\mu} = \min\left(2N, \frac{2N\mu - r}{m}, \frac{x}{md}\right),$$

$$g(u,m,\mu) = (m\mu u - rmm_\mu^{-1})^2 + (m\mu u - rmm_\mu^{-1})r.$$

Разобьём в W_1 отрезок суммирования по d на не более чем $\mathscr{L}$ интервалов вида $D < d \le 2D$, $D \le M$. Получим не более $\mathscr{L}$ сумм $W(D)$ вида

$$W(D) \le \sum_{D<d\le 2D}\sum_{0<rd<y} |W(r,d)|. \tag{1.3.3}$$

Имея в виду, что $D \le M$ и, согласно (1.3.1), $M \gg \mathscr{L}^{2A+8}$, рассмотрим два случая: $D > \mathscr{L}^{2A+8}$ и $D \le \mathscr{L}^{2A+8}$.

2. *Оценка* $W(D)$, $D > \mathscr{L}^{2A+8}$. В сумме $W(r,d)$ оценим сверху длину интервала суммирования по u, воспользовавшись условием $M \le y^{\frac{1}{4}}$, имеем

$$\mathcal{G}_{m\mu} - \mathcal{F}_{m\mu} + 1 = \frac{G_{m\mu} - F_{m\mu}}{\mu} + 1 \le \frac{y}{m\mu d} + 1 < \frac{yd}{M^2} + 1 \le \frac{2yd}{M^2}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (1.3.3), воспользовавшись соотношением $|a_m| \le \tau_4(m)$, затем леммой 1.2, последовательно получим

$$
\begin{aligned}
W(D) \ll & \sum_{D<d\le 2D} \sum_{0<rd<y} \sum_{M<md\le 2M} \tau_4(md) \sum_{\substack{M<\mu d\le 2M\\ (m,\mu)=1}} \tau_4(\mu d)(\mathcal{G}_{m\mu} - \mathcal{F}_{m\mu} + 1) \ll \\
& \ll \sum_{D<d\le 2D} \frac{y}{d} \sum_{M<md\le 2M} \tau_4(md) \sum_{\substack{M<\mu d\le 2M\\ (m,\mu)=1}} \tau_4(\mu d) \frac{yd}{M^2} \ll \\
& \ll \sum_{D<d\le 2D} \tau_4^2(d)\, \frac{y}{d} \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\ (m,\mu)=1}} \tau_4(m\mu) \frac{yd}{M^2} \ll \\
& \ll \frac{y^2}{M^2} \sum_{D<d\le 2D} \tau_4^2(d) \left(\sum_{Md^{-1}<m\le 4Md^{-1}} \tau_4(m) \right)^2 \ll \\
& \ll \frac{y^2}{M^2} \sum_{D<d\le 2D} \tau_4^2(d) \frac{M^2 \mathscr{L}^6}{d^2} \ll \frac{y^2 \mathscr{L}^6}{D^2} \sum_{D<d\le 2D} \tau_4^2(d) \ll \\
& \ll \frac{y^2 \mathscr{L}^6}{D(\ln D)^{-15}} < \frac{y^2 \mathscr{L}^6}{\mathscr{L}^{2A+8}((2A+8)\ln \mathscr{L})^{-15}} \ll \frac{y^2}{\mathscr{L}^{2A+1}}.
\end{aligned}
$$

3. Далее всюду будем считать, что $D < d \le 2D$ и $D \le \mathscr{L}^{2A+8}$. Возводя неравенство (1.3.3) в квадрат и применяя неравенство Коши, получим

$$
W^2(D) \le y \sum_{D<d\le 2D} \sum_{0<rd<y} |W(r,d)|^2, \tag{1.3.4}
$$

$$
|W(r,d)|^2 = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\ (m,\mu)=1}} a_{md} a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\ (n,\nu)=1}} a_{nd} a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le \mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le \mathcal{G}_{n\nu}} e(3\alpha r d^3 (g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu))),
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{n\nu} &= \frac{F_{n\nu}}{\nu} + \frac{r n_\nu^{-1}}{\nu}, \qquad F_{n\nu} = \max\left(U, \frac{U\nu - r}{n}, \frac{x-y}{nd}\right), \\
\mathcal{G}_{n\nu} &= \frac{G_{n\nu} + r n_\nu^{-1}}{\nu}, \qquad G_{n\nu} = \min\left(2N, \frac{2N\nu - r}{n}, \frac{x}{nd}\right).
\end{aligned} \tag{1.3.5}
$$

Воспользовавшись в $|W(r,d)|^2$ явным видом $g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu)$, то есть соотношением

$$g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu)=$$
$$=(n\nu u_1-rnn_\nu^{-1})^2+(n\nu u_1-rnn_\nu^{-1})r-(m\mu u-rmm_\mu^{-1})^2-(m\mu u-rmm_\mu^{-1})r=$$
$$=(n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}-m\mu u+rmm_\mu^{-1})(n\nu u_1+m\mu u-rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1}+r), \tag{1.3.6}$$

разбивая сумму $|W(r,d)|^2$ на три суммы W_{rd}, W'_{rd} и W''_{rd}, найдём

$$|W(r,d)|^2=W_{rd}+W'_{rd}+W''_{rd}, \tag{1.3.7}$$
$$W_{rd}=\sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}}\sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu}\\n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}>m\mu u-rmm_\mu^{-1}}}e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu))),$$
$$W'_{rd}=\sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}}\sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu}\\n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}<m\mu u-rmm_\mu^{-1}}}e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu))),$$
$$W''_{rd}=\sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}}\sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu}\\n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}=m\mu u-rmm_\mu^{-1}}}1.$$

4. Оценка W''_{rd}. Пользуясь определениями параметров $F_{m\mu}$, $G_{m\mu}$, $F_{n\nu}$ и $G_{n\nu}$, то есть соотношениями (1.3.2) и (1.3.5), легко показать, что условия $\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}$ и $\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu}$ соответственно равносильны условиям

$$\max\left(Um,U\mu-r,\frac{x-y}{d}\right)<m\mu u-rmm_\mu^{-1}\le\min\left(2Nm,2N\mu-r,\frac{x}{d}\right),$$
$$\max\left(Un,U\nu-r,\frac{x-y}{d}\right)<n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}\le\min\left(2Nn,2N\nu-r,\frac{x}{d}\right).$$

Поэтому, вводя обозначение $h=m\mu u-rmm_\mu^{-1}=n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}$, найдём

$$W''_{rd}=\sum_{x-y<hd\le x}\omega^2(h),\qquad \omega(h)=\sum_{\substack{h=m\mu u-rmm_\mu^{-1}\\M<md,\mu d\le 2M,\,(m,\mu)=1\\\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}}}a_{md}a_{\mu d}.$$

Из условий $h=m\mu u-rmm_\mu^{-1}$ и $mm_\mu^{-1}=1+\mu t$, t — целое следует, что

$$h+r=m\mu u-r(mm_\mu^{-1}-1)=\mu(mu-rt),$$

то есть μ является делителем числа $h+r$, следовательно,

$$\omega(h) \le \sum_{\substack{m\backslash h\\ M<md\le 2M}} |a_{md}| \sum_{\substack{\mu\backslash h+r\\ M<\mu d\le 2M\ \ (m,\mu)=1\\ \mathcal{F}_{m\mu}<\frac{h}{m\mu}+\frac{rm_\mu^{-1}}{\mu}\le \mathcal{G}_{m\mu}}} |a_{\mu d}| \ll$$

$$\ll \sum_{m\backslash h} \tau_4(md) \sum_{\mu\backslash h+r} \tau_4(\mu d) \le \tau_4^2(d)\tau_5(h)\tau_5(h+r).$$

Отсюда, воспользовавшись леммой 1.2, найдём

$$|W''_{rd}| \ll \tau_4^4(d) \sum_{x-y<hd\le x} \tau_5^2(h)\tau_5^2(h+r) \ll$$

$$\ll \tau_5^4(d) \left(\sum_{x-y<hd\le x} \tau_5^4(h) \sum_{x-y<hd\le x} \tau_5^4(h+r) \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \tau_4^4(d) \left(\frac{y^2}{d^2} \mathscr{L}^{2\cdot 5^4-2} \right)^{\frac{1}{2}} = y\mathscr{L}^{5^4-1}\, \frac{\tau_4^4(d)}{d}.$$

Отсюда с учётом (1.3.7) и (1.3.4), имея в виду, что $|W_{rd}| = |W'_{rd}|$, получим

$$W^2(D) \ll y \sum_{D<d\le 2D} \sum_{0<rd<y} \left(|W_{rd}| + y\mathscr{L}^{5^4-1} \cdot \frac{\tau_5^4(d)}{d} \right) \ll$$

$$\ll y \sum_{D<d\le 2D} \sum_{0<rd<y} |W_{rd}| + y^3\mathscr{L}^{5^4-1}. \qquad (1.3.8)$$

5. *Преобразуем W_{rd} так, чтобы сумма по u стала линейной.* Для этого, делая замену переменных, вместо u_1 вводим $\sigma = n\nu u_1 - m\mu u$, область изменения которой имеет вид

$$\Omega = \left\{ \sigma :\ m\mu u + \sigma \equiv 0 (mod\, n\nu),\ \mathcal{F}_{n\nu} < \frac{m\mu u + \sigma}{n\nu} \le \mathcal{G}_{n\nu},\ \sigma > rnn_\nu^{-1} - rmm_\mu^{-1} \right\}.$$

При этом, воспользовавшись соотношением (1.3.6), представим разность

$g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu)$ как функцию σ, то есть

$$\begin{aligned}
&g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu)=\\
&\quad=(n\nu u_1-m\mu u+rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1})(n\nu u_1+m\mu u-rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1}+r)=\\
&\quad=(\sigma+rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1})(\sigma+2m\mu u-rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1}+r)=\\
&\quad=g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu),
\end{aligned}$$

и сумма W_{rd} принимает вид

$$W_{rd}=\sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}}\sum_{\sigma\in\Omega}e\left(3\alpha rd^3g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right).$$

Воспользовавшись определениями области Ω и параметров $\mathcal{F}_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{n\nu}$, найдём возможно допустимую верхнюю границу изменения переменной суммирования σ. Имеем

$$\begin{aligned}
&\sigma\le n\nu\mathcal{G}_{n\nu}-m\mu u\le n\nu\mathcal{G}_{n\nu}-m\mu\mathcal{F}_{m\mu}=n\nu\frac{G_{n\nu}+rn_\nu^{-1}}{\nu}-m\mu\frac{F_{m\mu}+rm_\mu^{-1}}{\mu}=\\
&\quad=nG_{n\nu}-mF_{m\mu}+rnn_\nu^{-1}-rmm_\mu^{-1}=n\min\left(2N,\frac{2N\nu-r}{n},\frac{x}{nd}\right)-\\
&\quad-m\max\left(U,\frac{U\mu-r}{m},\frac{x-y}{md}\right)+rnn_\nu^{-1}-rmm_\mu^{-1}\le\frac{y}{d}-rmm_\mu^{-1}+rnn_\nu^{-1}.
\end{aligned}$$

С учётом найденной границы в W_{rd}, сделав сумму по u внутренней, найдём

$$W_{rd}=\sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\sigma\in\Omega_1}\sum_{u\in\mathcal{U}}e\left(3\alpha rd^3g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right),$$

$$\Omega_1=\left\{\sigma:\ 0<\sigma+rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1}\le\frac{y}{d}\right\},$$

$$\mathcal{U}=\left\{u:\ m\mu u+\sigma\equiv 0(mod\, n\nu),\ \frac{\mathcal{F}_{n\nu}n\nu-\sigma}{m\mu}<u\le\frac{\mathcal{G}_{n\nu}n\nu-\sigma}{m\mu},\ \mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}\right\},$$

то есть в W_{rd} внутренняя сумма стала линейной, переменная суммирования u пробегает те значения из своего сплошного интервала изменения, которые являются решением линейного сравнения.

6. Разбивая сумму W_{rd} на слагаемые с условием $(m\mu, n\nu) = \delta$, $\delta \le 4M^2d^{-2}$, имеем

$$W_{rd} = \sum_{\delta \le 4M^2d^{-2}} \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M \\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=\delta}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\sigma\in\Omega_1}\sum_{u\in\mathcal{U}} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right).$$

Условия $(m\mu, n\nu) = \delta$ с учётом условий $(m,\mu) = 1$ и $(n,\nu) = 1$ в сумме W_{rd} равносильны условиям

$$m\mu = \hat{m}\hat{\mu}\delta, \quad (\hat{m},\hat{\mu}) = 1, \quad n\nu = \hat{n}\hat{\nu}\delta, \quad (\hat{n},\hat{\nu}) = 1, \quad (\hat{m}\hat{\mu},\hat{n}\hat{\mu}) = 1,$$
$$m = \hat{m}\eta, \;\; \eta\backslash\delta, \;\; \mu = \hat{\mu}\delta/\eta, \;\; (\eta,\delta/\eta) = 1, \;\; n = \hat{n}\lambda, \;\; \lambda\backslash\delta, \;\; \nu = \hat{\nu}\delta/\lambda, \;\; (\lambda,\delta/\lambda) = 1.$$

Следовательно, в области $\mathcal{U}$ сравнение

$$m\mu u + \sigma \equiv 0 (mod\, n\nu)$$

разрешимо только в случае, если σ имеет вид $\sigma = \hat{\sigma}\delta$. Поэтому, заменим её на сравнение

$$\hat{m}\hat{\mu}u \equiv -\hat{\sigma} (mod\, \hat{n}\hat{\nu}),$$

а переменные суммирования m, μ, n, ν, σ соответственно на $\hat{m}\eta$, $\hat{\mu}\delta/\eta$, $\hat{n}\lambda$, $\hat{\nu}\delta/\lambda$, $\hat{\sigma}\delta$. Тогда параметры $\mathcal{F}_{m\mu}$, $F_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{m\mu}$, $G_{m\mu}$, $\mathcal{F}_{n\nu}$, $F_{n\nu}$, $\mathcal{G}_{n\nu}$, $G_{n\nu}$ и функция $g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)$ соответственно превращаются в $\mathcal{F}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $F_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $\mathcal{G}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $G_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, $F_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, $\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, $G_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$ и в функцию

$g_1(u) = g_1(u, \hat\sigma\delta, \hat m\eta, \hat\mu\delta/\eta, \hat n\lambda, \hat\nu\delta/\lambda)$, которые имеют вид

$$\mathcal{F}_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta} = \frac{F_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta}}{\hat\mu\delta/\eta} + \frac{r(\hat m\eta)^{-1}_{\hat\mu\delta/\eta}}{\hat\mu\delta/\eta}, \qquad F_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta} = \max\left(U, \frac{U\hat\mu\delta/\eta - r}{\hat m\eta}, \frac{x-y}{\hat m\eta d}\right),$$

$$\mathcal{G}_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta} = \frac{G_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta}}{\hat\mu\delta/\eta} + \frac{r(\hat m\eta)^{-1}_{\hat\mu\delta/\eta}}{\hat\mu\delta/\eta}, \qquad G_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta} = \min\left(2N, \frac{2N\hat\mu\delta/\eta - r}{\hat m\eta}, \frac{x}{\hat m\eta d}\right),$$

$$\mathcal{F}_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda} = \frac{F_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}}{\hat\nu\delta/\lambda} + \frac{r(\hat n\lambda)^{-1}_{\hat\nu\delta/\lambda}}{\hat\nu\delta/\lambda}, \qquad F_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda} = \max\left(U, \frac{U\hat\nu\delta/\lambda - r}{\hat n\lambda}, \frac{x-y}{\hat n\lambda d}\right),$$

$$\mathcal{G}_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda} = \frac{G_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}}{\hat\nu\delta/\lambda} + \frac{r(\hat n\lambda)^{-1}_{\hat\nu\delta/\lambda}}{\hat\nu\delta/\lambda}, \qquad G_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda} = \min\left(2N, \frac{2N\hat\nu\delta/\lambda - r}{\hat n\lambda}, \frac{x-y}{\hat n\lambda d}\right),$$

$$g_1(u, \hat\sigma\delta, \hat m\eta, \hat\mu\delta/\eta, \hat n\lambda, \hat\nu\delta/\lambda) = \left(\hat\sigma\delta + r\hat m\eta\,(\hat m\eta)^{-1}_{\hat\mu\delta/\eta} - r\hat n\lambda\,(\hat n\lambda)^{-1}_{\hat\nu\delta/\lambda}\right)(\hat\sigma\delta +$$
$$+ 2\hat m\hat\mu\delta u - r\hat m\eta\,(\hat m\eta)^{-1}_{\hat\mu\delta/\eta} - r\hat n\lambda\,(\hat n\lambda)^{-1}_{\hat\nu\delta/\lambda} + r\Big),$$

и сумма W_{rd} представится в виде

$$W_{rd} = \sum_{\delta\le 4M^2d^{-2}} \sum_{\substack{\eta\backslash\delta \\ (\eta,\delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda\backslash\delta \\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} W_{rd}(\delta,\eta,\lambda), \tag{1.3.9}$$

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) = \sum_{\substack{M<d\hat m\eta,\, d\hat\mu\delta/\eta\le 2M \\ (\hat m,\hat\mu)=1}} a_{d\hat m\eta} a_{d\hat\mu\delta/\eta} \sum_{\substack{M<d\hat n\lambda,\, d\hat\nu\delta/\lambda\le 2M \\ (\hat n,\hat\nu)=1,\, (\hat m\hat\mu,\hat n\hat\nu)=1}} a_{d\hat n\lambda} a_{d\hat\nu\delta/\lambda} \sum_{\hat\sigma} \sum_{u} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u)\right),$$

где суммирование ведётся по тем $\hat\sigma$ и u, для которых соответственно выполняются условия

- $0 < \hat\sigma\delta + r\hat m\eta(\hat m\eta)^{-1}_{\hat\mu\delta/\eta} - r\hat n\lambda(\hat n\lambda)^{-1}_{\hat\nu\delta/\lambda} \le \dfrac{y}{d}$;
- $\hat m\hat\mu u + \hat\sigma \equiv 0 (mod\, \hat n\hat\nu)$, $\dfrac{\mathcal{F}_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}\hat n\hat\nu}{\hat m\hat\mu} < u + \dfrac{\hat\sigma}{\hat m\hat\mu} \le \dfrac{\mathcal{G}_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}\hat n\hat\nu}{\hat m\hat\mu}$, $\mathcal{F}_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta} < u \le \mathcal{G}_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta}$.

Подставляя правую часть (1.3.9) в соотношение (1.3.8), получим

$$W^2(D) \ll y \sum_{D<d\le 2D} \sum_{0<rd<y} \sum_{\delta\le 4M^2d^{-2}} \sum_{\substack{\eta\backslash\delta \\ (\eta,\delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda\backslash\delta \\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)| + y^3\mathscr{L}^{5^4-1}. \tag{1.3.10}$$

Разбивая отрезок суммирования по δ на не более чем $\mathscr{L}$ интервалов вида $B < \delta \le 2B$, $B \le 2M^2 d^{-2}$, получим не более $\mathscr{L}$ сумм $W_B(D)$ вида

$$W_B(D) \ll y \sum_{D<d\le 2D} \sum_{0<rd<y} \sum_{B<\delta\le 2B} \sum_{\substack{\eta\backslash\delta \\ (\eta,\delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda\backslash\delta \\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)|. \qquad (1.3.11)$$

В сумме $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$, ради удобства обозначая переменные суммирования $\hat{m}$, $\hat{n}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ и $\hat{\sigma}$ соответственно через m, n, μ, ν и σ, получим

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) = \sum_{\substack{M<dm\eta, d\mu\delta/\eta\le 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{dm\eta} a_{d\mu\delta/\eta} \sum_{\substack{M<dn\lambda, d\nu\delta/\lambda\le 2M \\ (n,\nu)=1,\, (m\mu,n\nu)=1}} a_{dn\lambda} a_{d\nu\delta/\lambda} \sum_{\sigma} \sum_{u} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u)\right),$$

здесь $g_1(u) = g_1(u, \sigma\delta, m\eta, \mu\delta/\eta, n\lambda, \nu\delta/\lambda)$, и суммирование ведётся по тем σ и u, для которых соответственно выполняются условия

$$0 < \sigma\delta + rm\eta(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda} \le \frac{y}{d},\ m\mu u + \sigma \equiv 0 (mod\, n\nu), \qquad (1.3.12)$$
$$\frac{\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} n\nu}{m\mu} < u + \frac{\sigma}{m\mu} \le \frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} n\nu}{m\mu},\ \mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} < u \le \mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta},$$

где

$$\mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \frac{F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta}, \quad F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \max\left(U, \frac{U\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x-y}{m\eta d}\right),$$
$$\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \frac{G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta}, \quad G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \min\left(2N, \frac{2N\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x}{m\eta d}\right),$$
$$\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \frac{F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}, \quad F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \max\left(U, \frac{U\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right),$$
$$\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}, \quad G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \min\left(2N, \frac{2N\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right),$$
$$g_1(u,\sigma\delta,m\eta,\mu\delta/\eta,n\lambda,\nu\delta/\lambda) = \left(\sigma\delta + rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}\right)(\sigma\delta +$$
$$+ 2m\mu\delta u - rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda} + r\Big). \qquad (1.3.13)$$

Сравнение $m\mu u + \sigma \equiv 0(mod\, n\nu)$ равносильно сравнению

$$u \equiv -\sigma m^{-1}_{n\nu}\,\mu^{-1}_{n\nu} (mod\, n\nu),$$

где числа $m_{n\nu}^{-1}$ и $\mu_{n\nu}^{-1}$ соответственно определяются из сравнений

$$mm_{n\nu}^{-1} \equiv 1(mod\, n\nu), \qquad \mu\mu_{n\nu}^{-1} \equiv 1(mod\, n\nu).$$

Поэтому, представляя u в виде $u = n\nu\hat{u} - \sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}$, получим

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) =$$
$$= \sum_{\substack{M<dm\eta, d\mu\delta/\eta\le 2M\\ (m,\mu)=1}} a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta} \sum_{\substack{M<dn\lambda, d\nu\delta/\lambda\le 2M\\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}} a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda} \sum_{\sigma}\sum_{\hat{u}} e\left(3\alpha r d^3 g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)\right),$$

где

$$\begin{aligned} g_2(\hat{u},&\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda) = g_1(n\nu\hat{u} - \sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}, \sigma\delta, m\eta, \mu\delta/\eta, n\lambda, \nu\delta/\lambda) = \\ &= \left(\sigma\delta + rm\eta\,(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda\,(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}\right)\left(\sigma\delta + 2m\mu\delta\left(n\nu\hat{u} - \sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}\right) - \right.\\ &\qquad \left. - rm\eta\,(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda\,(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1} + r\right) = \\ &= 2m\mu n\nu\delta\hat{u}\left(\sigma\delta + rm\eta\,(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda\,(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}\right) + g_3, \end{aligned}$$

g_3 - часть $g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)$, не зависящая от $\hat{u}$ и имеющая вид

$$\begin{aligned} g_3 = \left(\sigma\delta + rm\eta\,(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda\,(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}\right)\left(\sigma\delta - 2\sigma\delta m m_{n\nu}^{-1}\,\mu\mu_{n\nu}^{-1} - \right.\\ \left. - rm\eta\,(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda\,(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1} + r\right), \end{aligned}$$

область суммирования по $\hat{u}$ определяется неравенствами, которые получаются из (1.3.12) и имеют вид

$$\begin{gathered} \frac{\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu} - \frac{\sigma}{m\mu n\nu} + \frac{\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu} < \hat{u} \le \frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu} - \frac{\sigma}{m\mu n\nu} + \frac{\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}, \\ \frac{\mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} + \sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu} < \hat{u} \le \frac{\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} + \sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}. \end{gathered} \tag{1.3.14}$$

Переходя к оценкам, получим

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) \le \sum_{\substack{M<dm\eta, d\mu\delta/\eta\le 2M\\ (m,\mu)=1}} |a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta}| \sum_{\substack{M<dn\lambda, d\nu\delta/\lambda\le 2M\\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}} |a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda}| \sum_{\substack{\sigma\le y/d\\ \sigma\equiv\kappa(mod\,\delta)}} \left|\sum_{\hat{u}} e\left(6\alpha r d^3\delta m\mu n\nu\sigma\hat{u}\right)\right|,$$

$$\kappa = rm\eta\,(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1} - rn\lambda\,(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}.$$

Оценим сверху величину $\mathscr{U}$ – длину интервала суммирования по $\hat{u}$ в $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$. Воспользовавшись отдельно каждым из неравенств (1.3.14) и определениями параметров $\mathcal{F}_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{m\mu}$, $\mathcal{F}_{n\nu}$ и $\mathcal{G}_{n\nu}$, из (1.3.13) имеем

$$\mathscr{U} \le \frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}-\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu} = \frac{1}{m\mu}\left(\frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}+\frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}-\frac{F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}-\frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}\right)=$$
$$=\frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}-F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu\cdot\nu\delta/\lambda}=\frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda}\left(\min\left(2N,\frac{2N\nu\delta/\lambda-r}{n\lambda},\frac{x}{n\lambda d}\right)-\right.$$
$$\left.-\max\left(U,\frac{U\nu\delta/\lambda-r}{n\lambda},\frac{x-y}{n\lambda d}\right)\right)\le\frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda}\cdot\frac{y}{n\lambda d}\le\frac{y\delta d^3}{M^4},$$
$$\mathscr{U} \le \frac{\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}-\mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{n\nu}=\frac{G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}-F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{n\nu\cdot\mu\,\delta/\eta}\le\frac{1}{\mu n\nu\,\delta/\eta}\cdot\frac{y}{m\eta d}\le\frac{y\delta d^3}{M^4}.$$

Отсюда, а также из условия $M\le y^{\frac{1}{4}}$ найдём, что количество слагаемых в сумме по $\hat{u}$ в $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$ не превосходит величину

$$\mathscr{U}+1\le\frac{y\delta d^3}{M^4}+1\ll\frac{y\delta d^3}{M^4}.$$

С учётом последнего неравенства, суммируя по $\hat{u}$, затем воспользовавшись условием $a_m\ll\tau_4(m)$ и известным неравенством $\tau_4(kl)\le\tau_4(k)\tau_4(l)$, найдём

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)\le$$
$$\le\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\le 2M\\(m,\mu)=1}}|a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta}|\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\le 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}|a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda}|\sum_{\substack{\sigma\le y/d\\\sigma\equiv\kappa(mod\,\delta)}}\min\left(\frac{y\delta d^3}{M^4},\frac{1}{\|6\alpha rd^3\delta m\mu n\nu\sigma\|}\right)\ll$$
$$\ll\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\le 2M\\(m,\mu)=1}}\tau_4(dm\eta)\tau_4(d\mu\delta/\eta)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\le 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\mu)=1}}\tau_4(dn\lambda)\tau_4(d\nu\delta/\lambda)\sum_{\substack{\sigma\le y/d\\\sigma\equiv\kappa(mod\,\delta)}}\min\left(\frac{y\delta d^3}{M^4},\frac{1}{\|6\alpha rd^3\delta m\mu n\nu\sigma\|}\right)\ll$$
$$\ll\tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\le 2M\\(m,\mu)=1}}\tau_4(m\mu)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\le 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}\tau_4(n\nu)\sum_{\substack{\sigma\le y/d\\\sigma\equiv\kappa(mod\,\delta)}}\min\left(\frac{y\delta d^3}{M^4},\frac{1}{\|6\alpha rd^3\delta m\mu n\nu\sigma\|}\right).\tag{1.3.15}$$

Рассмотрим отдельно два случая: $B>\mathscr{L}^{4A+22}$ и $B\le\mathscr{L}^{4A+22}$.

7. *Оценка* $W_B(D)$ **при** $B > \mathscr{L}^{4A+22}$. Пользуясь соотношениями $\delta \leq 4M^2d^{-2}$ и $M \leq y^{\frac{1}{4}}$ оценим сверху число слагаемых в сумме по σ:

$$\frac{y}{\delta d}+1=\frac{y+\delta d}{\delta d}\leq\frac{y+4M^2d^{-1}}{\delta d}\ll\frac{y}{\delta d}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, оценивая в (1.3.15) сумму по σ тривиально числом слагаемых, найдём

$$\begin{aligned}W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) &\ll \tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\leq 2M\\(m,\mu)=1}}\tau_4(m\mu)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leq 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\mu)=1}}\tau_4(n\nu)\cdot\frac{y\delta d^3}{M^4}\cdot\frac{y}{\delta d}\ll\\
&\ll \frac{y^2d^2}{M^4}\tau_4^4(d)\,\tau_4^2(\delta)\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\leq 2M\\(m,\mu)=1}}\tau_4(m\mu)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leq 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\mu)=1}}\tau_4(n\nu)\ll\\
&\ll \frac{y^2d^2}{M^4}\tau_4^4(d)\,\tau_4^2(\delta)\left(\sum_{M^2<\delta d^2t\leq 4M^2}\tau_4(t)\tau(t)\right)^2\ll\\
&\ll \frac{y^2d^2}{M^4}\cdot\tau_4^4(d)\,\tau_4^2(\delta)\cdot\frac{M^4}{\delta^2d^4}\mathscr{L}^{18}\ll\frac{y^2}{\delta^2d^2}\mathscr{L}^{18}\,\tau_4^4(d)\,\tau_4^2(\delta).\end{aligned}$$

Подставляя найденную оценку в (1.3.11), применяя лемму 1.2, а затем воспользовавшись условием $B \geq \mathscr{L}^{4A+22}$, получим

$$\begin{aligned}W_B(D) &\ll y\sum_{D<d\leq 2D}\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\leq 2B}\sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\(\eta,\delta/\eta)=1}}\sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\(\lambda,\delta/\lambda)=1}}|W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)|\ll\\
&\ll y^3\mathscr{L}^{18}\sum_{D<d\leq 2D}\frac{\tau_4^4(d)}{d^2}\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\leq 2B}\frac{\tau_4^2(\delta)}{\delta^2}\sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\(\eta,\delta/\eta)=1}}\sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\(\lambda,\delta/\lambda)=1}}1\ll\\
&\ll y^4\mathscr{L}^{18}\sum_{D<d\leq 2D}\frac{\tau_4^4(d)}{d^3}\sum_{B<\delta\leq 2B}\frac{\tau_4^2(\delta)\tau^2(\delta)}{\delta^2}\ll y^4\mathscr{L}^{18}\sum_{B<\delta\leq 2B}\frac{\tau_4^4(\delta)}{\delta^2}\ll\\
&\ll y^4\mathscr{L}^{18}\frac{(\ln B)^{4^4-1}}{B}=\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}\frac{\mathscr{L}^{4A+21}}{B(\ln B)^{-4^4+1}}\ll\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}.\end{aligned}$$

8. *Оценка* $W_B(D)$ при $B \le \mathscr{L}^{4A+22}$. Представляя оценку (1.3.15) в виде

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) \ll$$
$$\ll \tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\le 2M\\(m,\mu)=1}}\tau_4(m\mu)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\le 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}\tau_4(n\nu)\sum_{\sigma\le y/d}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|6\alpha rd^3\delta m\mu n\nu\sigma\|}\right).$$

затем подставляя её в (1.3.11), получим

$$W_B(D) \ll y\sum_{D<d\le 2D}\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\le 2B}\sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\(\eta,\delta/\eta)=1}}\sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\(\lambda,\delta/\lambda)=1}}|W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)| \ll$$
$$\ll y\sum_{\substack{0<rd<y\\D<d\le 2D}}\tau_4^4(d)\sum_{B<\delta\le 2B}\tau_4^2(\delta)\sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\(\eta,\delta/\eta)=1}}\sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\(\lambda,\delta/\lambda)=1}}\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\le 2M\\(m,\mu)=1}}\tau_4(m\mu)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\le 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}\tau_4(n\nu)\sum_{\sigma\le y/d}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\right.$$
$$\left.\frac{1}{\|6\alpha rd^3\delta m\mu n\nu\sigma\|}\right) \ll$$
$$\ll y\sum_{\substack{0<rd<y\\D<d\le 2D}}\tau_4^4(d)\sum_{B<\delta\le 2B}\tau_4^4(\delta)\sum_{M^2<m\mu d^2\delta\le 4M^2}\tau_4(m\mu)\sum_{\substack{M^2<n\nu d^2\delta\le 4M^2\\(m\mu,n\nu)=1}}\tau_4(n\nu)\sum_{\sigma\le y/d}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\right.$$
$$\left.\frac{1}{\|6\alpha rd^3\delta m\mu n\nu\sigma\|}\right) \le$$
$$\le y\sum_{\substack{0<rd<y\\D<d\le 2D}}\tau_4^4(d)\sum_{B<\delta\le 2B}\tau_4^4(\delta)\sum_{\substack{M^2<m\mu d^2\delta,n\nu d^2\delta\le 4M^2\\(m\mu,n\nu)=1}}\tau_4(m\mu n\nu)\sum_{\sigma\le y/d}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|6\alpha rd^3\delta m\mu n\nu\sigma\|}\right) \ll$$
$$\ll y\sum_{\frac{3M^4}{2BD}<h\le\frac{96y^2M^4}{BD^3}}\text{æ}(h)\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|\alpha h\|}\right),$$
$$\text{æ}(h) = {\sum_{h=6rd^3\delta m\mu n\nu\sigma}}'' \tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta)\tau_4(m\mu n\nu),$$

где символ $''$ — означает, что

$$D<d\le 2D,\quad B<\delta\le 2B,\quad r\le\frac{y}{d},$$
$$\frac{M^2}{d^2\delta} < m\mu,\quad n\nu\le\frac{4M^2}{d^2\delta},\quad (m\mu,n\nu)=1,\quad \sigma\le\frac{y}{d}.$$

Далее, пользуясь условиями $D<\mathscr{L}^{2A+8}$, $B<\mathscr{L}^{4A+22}$, $h/tr\sigma = d^3\delta \asymp D^3B$

и соотношением $\tau(r) \ll r^{\varepsilon}$, находим

$$\begin{aligned}
æ(h) &= \sum_{m\mu n\nu \backslash h}{}'' \tau_4(m\mu n\nu) \sum_{\frac{h}{m\mu n\nu}=6d^3\delta r\sigma} \tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta) = \\
&= \sum_{m\mu n\nu \backslash h}{}'' \tau_4(m\mu n\nu) \sum_{r\backslash \frac{h}{m\mu n\nu}} \sum_{\frac{h}{m\mu n\nu r}=6d^3\delta\sigma} \tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta) = \\
&= \sum_{m\mu n\nu \backslash h}{}'' \tau_4(m\mu n\nu) \sum_{r\backslash \frac{h}{m\mu n\nu}} \sum_{\sigma\backslash \frac{h}{m\mu n\nu r}} \sum_{\frac{h}{m\mu n\nu r\sigma}=6d^3\delta} \tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta).
\end{aligned}$$

Из соотношения $\frac{h}{m\mu n\nu r\sigma} = 6d^3\delta \ll \mathscr{L}^{10A+46}$ следует, что

$$\sum_{\frac{h}{m\mu n\nu r\sigma}=6d^3\delta} \tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta) \ll \mathscr{L}^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
æ(h) &\ll \mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{m\mu n\nu \backslash h}{}'' \tau_4(m\mu n\nu) \sum_{r\backslash \frac{h}{m\mu n\nu}} \sum_{\sigma\backslash \frac{h}{m\mu n\nu r}} 1 \ll \mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{m\mu n\nu \backslash h}{}'' \tau_4(m\mu n\nu)\tau_3\left(\frac{h}{m\mu n\nu}\right) \ll \\
&\ll \mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{t\backslash h} \tau_4^2(t)\tau_3\left(\frac{h}{t}\right) \le \mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\tau_4(h)\tau_7(h).
\end{aligned}$$

Тогда

$$W_B(D) \ll y\mathscr{L}^{\frac{1}{2}} \sum_{h\le \frac{y^2M^4}{BD^3}} \tau_4(h)\tau_7(h) \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 1.2, найдём

$$\begin{aligned}
W_B^2(D) &\ll y^2\mathscr{L} \cdot \sum_{h\le \frac{y^2M^4}{BD^3}} \tau_4^2(h)\tau_7^2(h) \cdot \frac{yBD^3}{M^4} \sum_{h\le \frac{y^2M^4}{BD^3}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right) \ll \\
&\ll \frac{y^3BD^3\mathscr{L}}{M^4} \sum_{h\le \frac{y^2M^4}{BD^3}} \tau_4^2(h)\tau_7^2(h) \sum_{h\le \frac{y^2M^4}{BD^3}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right) \ll \\
&\ll y^5\mathscr{L}^{784} \sum_{h\le \frac{y^2M^4}{BD^3}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} > 0.5q$ и $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} \le 0.5q$.

При $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} > 0.5q$, разбивая интервал изменения h на $\ll \dfrac{y^2M^4}{qBD^3}$ интервалов вида $g \le h \le g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 1.3, найдём

$$\begin{aligned} W_B^2(D) &\ll y^5\mathscr{L}^{784}\cdot\frac{y^2M^4}{qBD^3}\sum_{h=g}^{g+q'}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|\alpha h\|}\right)\ll \\ &\ll \frac{y^7M^4}{qBD^3}\left(\frac{yBD^3}{M^4}+q\ln q\right)\mathscr{L}^{784}\ll \\ &\ll \left(\frac{y^8}{q}+\frac{y^7M^4}{BD^3}\right)\mathscr{L}^{785}\ll y^8\left(\frac{1}{q}+\frac{M^4}{y}\right)\mathscr{L}^{785} = \\ &\ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}\left(\frac{\mathscr{L}^{8A+791}}{q}+\frac{M^4}{y\mathscr{L}^{-8A-791}}\right)\ll\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}. \end{aligned}$$

При $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} \le 0.5q$, воспользовавшись утверждением б) леммы 1.3, получим

$$W_B^2(D)\ll y^5\mathscr{L}^{784}\sum_{h\le 0.5q}\frac{1}{\|\alpha h\|}\ll y^5q\mathscr{L}^{785}=\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}\cdot\frac{q}{y^3\mathscr{L}^{-8A-791}}\ll\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}.$$

Подставляя полученные оценки для $W_B(D)$ в (1.3.10) при $D \le \mathscr{L}^{2A+8}$, найдём

$$W^2(D)\ll\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+2}}+y^3\mathscr{L}^{5^4-1}.$$

Отсюда и из оценки $W(D)$ при $D > \mathscr{L}^{2A+8}$ полученной в пункте 2, получим

$$W(D)\ll\frac{y^2}{\mathscr{L}^{2A+1}},\qquad\qquad W_1\ll\frac{y^2}{\mathscr{L}^{2A}}.$$

Из оценки W_1 с учётом соотношения $W^2 = W_1+W_2+O(y\mathscr{L}^{24})$, $|W_1| = |W_2|$, получим утверждение теоремы 1.1.

Глава 2

Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, имеющие близкие по порядку суммы

2.1 . Постановка задачи и формулировка результатов

Как мы уже отметили в начале первой главы, все нетривиальные оценки сумм $f_1(\alpha;x,y)$ и $S_1(\alpha;x,y)$ в малых дугах получены методом оценок сумм с простыми числами И. М. Виноградова, основу которого, наряду с «решетом Виноградова», составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha;x,y,M,N)=\sum_{M<m\le 2M}a(m)\sum_{\substack{U<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}}b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N\le U<2N$, $x>x_0$, y – вещественные числа.

В первой главе для суммы $J_3(\alpha;x,y,M,N)$ была получена нетривиальная оценка в случае, если она является *двойной тригонометрической суммой с «длинным» сплошным суммированием.*

При сведении суммы $S_3(\alpha;x,y)$ к двойным суммам $J_3(\alpha;x,y,M,N)$, кроме *двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием*, возникает также задача получения нетривиальной оценки двойных сумм $J_3(\alpha;x,y,M,N)$, в которых суммы, составляющие двойную сумму, «близки» по порядку, то есть $xy^{-1}\le N\le y$. Такие суммы назовём *короткими кубическими двойными тригонометрическими суммами, имеющие близкие по порядку суммы.*

Суммы $J_1(\alpha;x,y,M,N)$, имеющие близкие по порядку суммы, также были изучены в работах И. М. Виноградова [1], Хейзелгроува [19], В. Статулявычуса [20], Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо [21], Т. Жана [22] при получения нетривиальных оценок коротких сумм $f_1(\alpha;x,y)$ и $S_1(\alpha;x,y)$.

Суммы $J_2(\alpha;x,y,M,N)$, имеющие близкие по порядку суммы, изучили Jianya Liu и Zhan Tao [23] и получили нетривиальную оценку сумм $S_2(\alpha;x,y)$ и $f_2(\alpha;x,y)$ при $y\ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

Основным результатом второй главы является доказательство теоремы 2.1 об оценке короткой двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha;x,y,M,N)$, имеющей близкие по порядку суммы.

Теорема 2.1. *Пусть* $xy^{-1}\le N\le y$, $M\le N$, $y<x\mathscr{L}^{-1}$, $|a_m|\le\tau_{5-k}(m)$, $|b_n|\le\tau_k(n)$, $k=1,2,3,4$. *Тогда справедлива оценка*

$$|J_3(\alpha;x,y,M,N)|\ll\begin{cases} y\left(\dfrac{\mathscr{L}^{24}}{q}+\dfrac{x\mathscr{L}^{25}}{yN}+\dfrac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}}\mathscr{L}^{k^2-4k+12}, & \text{если } 0,5q<\dfrac{y^4}{xN};\\[3ex] y\left(\dfrac{x^2q\mathscr{L}^{25}}{y^5}+\dfrac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2}+\dfrac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}}\mathscr{L}^{k^2-4k+12}, & \text{если } 0,5q\ge\dfrac{y^4}{xN}.\end{cases}$$

Доказательство теоремы 2.1 проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работ [23, 24].

Из этой теоремы вытекает нетривиальная оценка суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(A+13)})$, A — абсолютная постоянная, при

$$\tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \le N \le y\mathscr{L}^{-8(A+13)}.$$

Следствие 2.1.1. *Пусть* $M \le N$, $y < x\mathscr{L}^{-1}$, $|a_m| \le \tau_{5-k}(m)$, $|b_n| \le \tau_k(n)$, $k = 1, 2, 3$, *тогда при*

$$\mathscr{L}^{32(A+13)} \le q \le \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \le N \le y\mathscr{L}^{-8(A+13)},$$

где A *— абсолютная постоянная, справедлива оценка*

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

2.2. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм на малых дугах, имеющих близкие по порядку суммы

В этом параграфе для удобства короткую кубическую двойную тригонометрическую сумму $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющие близкие по порядку суммы, обозначим через J_3 то есть

$$J_3 = \sum_{M<m\le 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b(n)e(\alpha(mn)^3).$$

Теорема 2.1. *Пусть* $xy^{-1} \le N \le y$, $M \le N$, $y < x\mathscr{L}^{-1}$, $|a_m| \le \tau_{5-k}(m)$, $|b_n| \le \tau_k(n)$, $k = 1,2,3,4$. *Тогда справедлива оценка*

$$|J_3| \ll \begin{cases} y\left(\dfrac{\mathscr{L}^{24}}{q} + \dfrac{x\mathscr{L}^{25}}{yN} + \dfrac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}} \mathscr{L}^{k^2-4k+12}, & \text{если } 0,5q < \dfrac{y^4}{xN}; \\ y\left(\dfrac{x^2q\mathscr{L}^{25}}{y^5} + \dfrac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \dfrac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}} \mathscr{L}^{k^2-4k+12}, & \text{если } 0,5q \ge \dfrac{y^4}{xN}. \end{cases}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $MN \asymp x$ и $N \ge \sqrt{x}$. Возводя сумму J_3 в квадрат, применяя неравенство Коши и лемму 1.2, получим

$$|J_3|^2 \ll \sum_{M<m\le 2M} |a_m|^2 \sum_{M<m\le 2M} \left| \sum_{\substack{N<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b_n e(\alpha (mn)^3) \right|^2 \ll$$
$$\ll \sum_{M<m\le 2M} \tau_{5-k}^2(m) \sum_{M<m\le 2M} \sum_{\substack{N<n\le 2N \\ x-y<mn_1,mn_2\le x}} \overline{b(n_1)} b(n_2) e(\alpha m^3(n_2^3 - n_1^3)) \ll$$
$$\ll M\mathscr{L}^{(5-k)^2-1} \sum_{M<m\le 2M} \sum_{\substack{N<n_1,n_2\le 2N \\ x-y<mn_1,mn_2\le x}} \overline{b(n_1)} b(n_2) e(\alpha m^3(n_2^3 - n_1^3)).$$

Разбивая двойную сумму по n_1 и n_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $n_1 < n_2$, $n_1 = n_2$, $n_1 > n_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{M<m\le 2M} \sum_{\substack{N<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} |b_n|^2 \ll \sum_{x-y<t\le x} \sum_{\substack{mn=t \\ M<m\le 2M \\ N<n\le 2N}} \tau_k^2(n) \le \sum_{x-y<t\le x} \tau_{k+1}^2(t) \ll y\mathscr{L}^{k(k+2)},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $n_1 < n_2$ и $n_1 > n_2$ равны, получим

$$|J_3|^2 \ll M\mathscr{L}^{(5-k)^2-1} \sum_{N<n_1\le 2N} \tau_k(n_1) \sum_{0<n_2-n_1\le 2N-n_1} \tau_k(n_2) \left| \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ x-y<mn_1, mn_2\le x}} e(\alpha m^3(n_2^3-n_1^3)) \right| + \\ +yM\mathscr{L}^{2k^2-8k+24}.$$

Положим $r = n_2 - n_1$ и $n_1 = n$, тогда правая часть последнего неравенства принимает вид

$$\begin{aligned} |J_3|^2 &\ll M\mathscr{L}^{(5-k)^2-1} \sum_{N<n\le 2N} \tau_k(n) \sum_{0<r\le 2N-n} \tau_k(n+r) \left| \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ x-y<mn, m(n+r)\le x}} e(\alpha m^3((n+r)^3-n^3)) \right| + \\ &+ yM\mathscr{L}^{2k^2-8k+24} = M(J_{31}\mathscr{L}^{(5-k)^2-1} + y\mathscr{L}^{2k^2-8k+24}) \ll \\ &\ll \frac{x}{N}\left(J_{31}\mathscr{L}^{(5-k)^2-1} + y\mathscr{L}^{2k^2-8k+24}\right), \qquad (2.2.1) \\ J_{31} &= \sum_{N<n\le 2N} \tau_k(n) \sum_{0<r\le 2N-n} \tau_k(n+r) \left| \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ \frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+r}}} e(\alpha r m^3(3nr+3n^2+r^2)) \right|. \end{aligned}$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m \le \frac{x}{n+r}$ находим

$$r \le \frac{x}{m} - n < \frac{x}{m} - \frac{x-y}{m} = \frac{y}{m} < \frac{y}{M}.$$

Возводя J_{31} в квадрат, дважды применяя неравенство Коши и воспользовавшись леммой 1.2, имеем

$$|J_{31}|^2 \ll N\mathscr{L}^{k^2-1}\sum_{N<n\le 2N}\left(\sum_{\substack{0<r\le 2N-n\\ r<\frac{y}{M}}}\tau_k(n+r)\left|\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ \frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+r}}}e(\alpha rm^3(3nr+3n^2+r^2)\right|\right)^2 \ll$$

$$\ll \frac{yN\mathscr{L}^{2k^2-2}}{M}\sum_{N<n\le 2N}\sum_{\substack{0<r\le 2N-n\\ r<\frac{y}{M}}}\left|\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ \frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+r}}}e(\alpha rm^3(3nr+3n^2+r^2)\right|^2 =$$

$$= \frac{yN\mathscr{L}^{2k^2-2}}{M}\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m_1,m_2\le 2M\\ \frac{x-y}{n}<m_1,m_2\le\frac{x}{n+r}}}e(\alpha r(m_2^3-m_1^3)(3nr+3n^2+r^2).$$

Разбивая двойную сумму по m_1 и m_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $m_1<m_2$, $m_1=m_2$, $m_1>m_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ \frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+r}}}1=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{\substack{M<m\le 2M,\ N<n\le 2N-r\\ x-y<mn\le x-mr}}1\le\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{x-y<t\le x}\tau(t)\ll\frac{y^2\mathscr{L}}{M},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $m_1<m_2$ и $m_1>m_2$ равны, получим

$$|J_{31}|^2 \ll \frac{yN}{M}\left(|J_{32}|+\frac{y^2\mathscr{L}}{M}\right)\mathscr{L}^{2k^2-2} \ll \left(\frac{yN^2}{x}|J_{32}|+\frac{y^3N^3\mathscr{L}}{x^2}\right)\mathscr{L}^{2k^2-2}, \tag{2.2.2}$$

$$J_{32}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m_1<m_2\le 2M\\ \frac{x-y}{n}<m_1<m_2\le\frac{x}{n+r}}}e(\alpha r(m_2^3-m_1^3)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Положим $k=m_2-m_1$ и $m_1=m$, тогда J_{32} принимает вид

$$J_{32}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m<m+k\le 2M\\ \frac{x-y}{n}<m<m+k\le\frac{x}{n+r}}}e(\alpha kr(3mk+3m^2+k^2)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m < m+k \le \frac{x}{n+r}$ находим

$$k \le \frac{x}{n+r} - m < \frac{x}{n+r} - \frac{x-y}{n} < \frac{x}{n} - \frac{x-y}{n} = \frac{y}{n} < \frac{y}{N}.$$

Поэтому

$$J_{32} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m\le 2M-k \\ \frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+r}-k}} e(\alpha kr(3mk+3m^2+k^2)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Возводя J_{32} в квадрат, трижды применяя неравенство Коши, имеем

$$|J_{32}|^2 \le \frac{y^2}{M} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m_1,m_2\le 2M-k \\ \frac{x-y}{n}<m_1,m_2\le\frac{x}{n+r}-k}} e(3\alpha kr(m_2-m_1)(k+m_2+$$

$$+m_1)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Разбивая двойную сумму по m_1 и m_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $m_1 < m_2$, $m_1 = m_2$, $m_1 > m_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m\le 2M-k \\ \frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+r}-k}} 1 \le \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{x-y<t\le x} \tau(t) \ll \frac{y^3\mathscr{L}}{MN} \ll \frac{y^3\mathscr{L}}{x},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $m_1 < m_2$ и $m_1 > m_2$ равны, получим

$$|J_{32}|^2 \ll \frac{y^2}{M}\left(|J_{33}| + \frac{y^3\mathscr{L}}{x}\right) \ll \left(\frac{y^2N}{x}|J_{33}| + \frac{y^5N\mathscr{L}}{x^2}\right), \tag{2.2.3}$$

$$J_{33} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m_1<m_2\le 2M-k \\ \frac{x-y}{n}<m_1<m_2\le\frac{x}{n+r}-k}} e(3\alpha kr(m_2-m_1)(k+m_2+m_1)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Положим $h = m_2 - m_1$ и $m_1 = m$, тогда W_3 принимает вид

$$J_{33} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m<m+h\le 2M-k \\ \frac{x-y}{n}<m<m+h\le\frac{x}{n+r}-k}} e(3\alpha khr(2m+k+h)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m < m+h \le \frac{x}{n+r} - k$ находим

$$h \le \frac{x}{n+r} - m - k < \frac{x}{n+r} - \frac{x-y}{n} - k < \frac{x}{n} - \frac{x-y}{n} - 1 = \frac{y}{n} - 1 < \frac{y}{N}.$$

Поэтому

$$J_{33} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\le 2M-k-h} \sum_{\substack{N<n\le 2N-r \\ \frac{x-y}{m}<n\le\frac{x}{m+k+h}-r}} e(3\alpha khr(2m+k+h)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Возводя $|J_{33}|$ в квадрат, четырежды применяя неравенство Коши, имеем

$$|J_{33}|^2 \le \frac{y^3}{N^2} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\le 2M-k-h} \sum_{\substack{N<n_1,n_2\le 2N-r \\ \frac{x-y}{m}<n_1,n_2\le\frac{x}{m+k+h}-r}} e(9\alpha khr(n_2-n_1)(2m+k+$$

$$+h)(r+n_2+n_1)).$$

Разбивая двойную сумму по n_1 и n_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $n_1 < n_2$, $n_1 = n_2$, $n_1 > n_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\le 2M-k-h} \sum_{\substack{N<n\le 2N-r \\ \frac{x-y}{m}<n\le\frac{x}{m+k+h}-r}} 1 \le \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{x-y<t\le x} \tau(t) \ll$$

$$\ll \frac{y^4\mathscr{L}}{MN^2} \ll \frac{y^4\mathscr{L}}{xN}.$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $n_1 < n_2$ и $n_1 > n_2$ равны, получим

$$|J_{33}|^2 \ll \frac{y^3}{N^2}\left(|J_{34}| + \frac{y^4\mathscr{L}}{xN}\right) \ll \left(\frac{y^3}{N^2}|J_{34}| + \frac{y^7\mathscr{L}}{xN^3}\right), \tag{2.2.4}$$

$$J_{34} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\le 2M-k-h} \sum_{\substack{N<n_1<n_2\le 2N-r \\ \frac{x-y}{m}<n_1<n_2\le\frac{x}{m+k+h}-r}} e(9\alpha khr(n_2-n_1)(2m+k+h)(r+n_2+n_1)).$$

Положим $l = n_2 - n_1$ и $n_1 = n$, тогда J_{34} принимает вид

$$J_{34} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\le 2M-k-h} \sum_{\substack{N<n<n+l\le 2N-r \\ \frac{x-y}{m}<n<n+l\le\frac{x}{m+k+h}-r}} e(9\alpha klhr(2m+k+h)(2n+r+l)).$$

Переходя к оценкам, найдём

$$|J_{34}| \leq \sum_{l<\frac{y}{M}} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leq 2M-k-h} \left| \sum_{\substack{N<n\leq 2N-r-l \\ \frac{x-y}{m}<n\leq\frac{x}{m+k+h}-r-l}} e(18\alpha klhr(2m+k+h)n) \right|.$$

Оценим сверху длину интервала суммирования по n. Имеем

$$\frac{x}{m+k+h} - r - l - \frac{x-y}{m} \leq \frac{y}{M}.$$

С учётом последнего неравенства, суммируя по n, найдём

$$|J_{34}| \leq \sum_{l,r<\frac{y}{M}} \sum_{k,h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leq 2M-k-h} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|18\alpha klhr(2m+k+h)\|}\right) \ll$$
$$\ll \sum_{t\leq\frac{y^4}{MN^2}} \tau_5(t) \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 1.2 и соотношения $MN \asymp x$, найдём

$$|J_{34}|^2 \ll \sum_{t\leq\frac{y^4}{xN}} \tau_5^2(t) \sum_{t\leq\frac{y^4}{xN}} \min\left(\frac{yN}{x}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right)^2 \ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2} \sum_{t\ll\frac{y^4}{xN}} \min\left(\frac{yN}{x}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right). \tag{2.2.5}$$

Теперь, представляя соотношения (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) и (2.2.4) в виде

$$|J_3|^{32} \ll \left(\frac{x^{16}\mathscr{L}^{16(5-k)^2-16}}{N^{16}}|J_{31}|^{16} + \frac{x^{16}y^{16}\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}}{N^{16}}\right),$$
$$|J_{31}|^{16} \ll \left(\frac{y^8N^{16}}{x^8}|J_{32}|^8 + \frac{y^{24}N^{24}\mathscr{L}^8}{x^{16}}\right)\mathscr{L}^{16k^2-16},$$
$$|J_{32}|^8 \ll \left(\frac{y^8N^4}{x^4}|J_{33}|^4 + \frac{y^{20}N^4\mathscr{L}^4}{x^8}\right),$$
$$|J_{33}|^4 \ll \left(\frac{y^6}{N^4}|J_{34}|^2 + \frac{y^{14}\mathscr{L}^2}{x^2N^6}\right),$$

и последовательно воспользовавшись ими, представим $|J_3|^{32}$ через $|J_{34}|^2$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&|J_3|^{32} \ll \\
&\ll\left(\frac{x^{16}\mathscr{L}^{16(5-k)^2-16}}{N^{16}}\left(\frac{y^8N^{16}}{x^8}|J_{32}|^8+\frac{y^{24}N^{24}\mathscr{L}^8}{x^{16}}\right)\mathscr{L}^{16k^2-16}+\frac{x^{16}y^{16}\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}}{N^{16}}\right)=\\
&=\left(\left(y^8x^8|J_{32}|^8+y^{24}N^8\mathscr{L}^8\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-10k+23)}+\frac{x^{16}y^{16}\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}}{N^{16}}\right)\ll\\
&\ll\left(\left(y^8x^8\left(\frac{y^8N^4}{x^4}|J_{33}|^4+\frac{y^{20}N^4\mathscr{L}^4}{x^8}\right)+y^{24}N^8\mathscr{L}^8\right)+\frac{x^{16}y^{16}}{N^{16}}\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}=\\
&=y^{16}\left(\left(x^4N^4|J_{33}|^4+y^{12}N^4\mathscr{L}^4+y^8N^8\mathscr{L}^8\right)+\frac{x^{16}}{N^{16}}\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}\ll\\
&\ll y^{16}\left(\left(x^4N^4\left(\frac{y^6}{N^4}|J_{34}|^2+\frac{y^{14}\mathscr{L}^2}{x^2N^6}\right)+y^{12}N^4\mathscr{L}^4+y^8N^8\mathscr{L}^8\right)+\frac{x^{16}}{N^{16}}\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}=\\
&=y^{32}\left(\left(\frac{x^4}{y^{10}}|J_{34}|^2+\frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2}+\frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}+\frac{N^8\mathscr{L}^8}{y^8}\right)+\frac{x^{16}}{y^{16}N^{16}}\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}.
\end{aligned}
$$

Из условия $xy^{-1}\le N\le y$ следует, что

$$
|J_3|^{32}\ll y^{32}\left(\frac{x^4}{y^{10}}|J_{34}|^2+\frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2}+\frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}. \tag{2.2.6}
$$

Для оценки суммы $|J_{34}|^2$, которую мы представили в виде (2.2.5), рассмотрим случаи $\dfrac{y^4}{xN}>0.5q$ и $\dfrac{y^4}{xN}\le 0.5q$.

Оценка $|J_{34}|$ ***при*** $\dfrac{y^4}{xN}>0.5q$. Разбивая интервал изменения t на $\ll\dfrac{y^4}{qxN}$ интервалов вида $g\le h\le g+q'$, $q'<q$, применяя утверждение а) леммы 1.3, найдём

$$
\begin{aligned}
|J_{34}|^2 &\ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}\cdot\frac{y^4}{qxN}\sum_{t=g}^{g+q'}\min\left(\frac{yN}{x},\frac{1}{\|\alpha t\|}\right)\ll\\
&\ll\frac{y^9\mathscr{L}^{24}}{qx^3N}\left(\frac{yN}{x}+q\ln q\right)\ll\left(\frac{y^{10}}{qx^4}+\frac{y^9\mathscr{L}}{x^3N}\right)\mathscr{L}^{24}.
\end{aligned}
$$

Подставляя эту оценку в (2.2.6), получим

$$|J_3|^{32} \ll y^{32}\left(\frac{x^4}{y^{10}}\left(\frac{y^{10}}{qx^4}+\frac{y^9\mathscr{L}}{x^3N}\right)\mathscr{L}^{24}+\frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2}+\frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)} \ll$$
$$\ll y^{32}\left(\frac{\mathscr{L}^{24}}{q}+\frac{x\mathscr{L}^{25}}{yN}+\frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}.$$

Оценка $|J_{34}|$ ***при*** $\dfrac{y^4}{xN} \le 0.5q$. Применяя утверждение б) леммы 1.3, найдём

$$|J_{34}|^2 \ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}\sum_{t\le 0,5q}\min\left(\frac{yN}{x},\frac{1}{\|\alpha t\|}\right) \ll$$
$$\ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}\sum_{t\le 0,5q}\frac{1}{\|\alpha t\|} \ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}q\ln q \ll \frac{y^5q\mathscr{L}^{25}}{x^2}.$$

Подставляя найденную оценку в (2.2.6), получим

$$|J_3|^{32} \ll y^{32}\left(\frac{x^4}{y^{10}}\cdot\frac{y^5q\mathscr{L}^{25}}{x^2}+\frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2}+\frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)} \ll$$
$$\ll y^{32}\left(\frac{x^2q\mathscr{L}^{25}}{y^5}+\frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2}+\frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-8k+24)}.$$

Глава 3

Короткая кубическая сумма с функцией Мёбиуса

3.1 . Формулировка результатов и вспомогательная лемма

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое число α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{n \le x} \mu(n) e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$ впервые рассматривал Г. Дэвенпорт. В 1937 году [9], воспользовавшись методом оценок тригонометрической сумм с простыми числами И. М. Виноградова, он доказал, что для всякого фиксированного $B > 0$

имеет место оценка

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x\mathscr{L}^{-B},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от B. Такую же оценку при $k \geq 2$, k – фиксированное целое число, получил Хуа Ло-кен [10]. Эти безусловные результаты Г. Дэвенпорта и Хуа Ло-кена до сих пор остаются самыми точными.

Наилучший условный результат в случае $k = 1$ принадлежит Бейкеру и Харману. [12] Они в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) доказали, что

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x^{\frac{3}{4}+\varepsilon},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε. Эту оценку для $k \geq 2$, k – фиксированное целое число обобщили Т. Жан и Дж. Лю [13].

Т. Жан [14], рассматривая короткую тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$ и $y \geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ получил нетривиальную оценку

$$|S_k(\alpha; x, y)| \ll \mathscr{L}^{-B}. \tag{3.1.1}$$

Затем он получил эту оценку уже при $y \geq x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$ [15]. Первую безусловную нетривиальную оценку вида (3.1.1) при $k = 2$ и $y \geq x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ получили Т. Жан и Дж. Лю [16].

В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) Г. С. Лу и Х. Х. Лао [17] доказали оценку вида (3.1.1) при $k = 2$ и $y \geq x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

Кумчев А.В. [18] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y \geq x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1 - \frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Отсюда, в частности, для $S_3(\alpha; x, y)$ следует нетривиальная оценка при

$$y \geq x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}, \qquad \tau = x^{\frac{25}{9}}P^{-1}.$$

Основным результатом третьей главы является доказательство теоремы 3.1 о нетривиальной оценки вида (3.1.1) суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+19)})$, $B \geq 11$ при

$$y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+282}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $B \geq 11$ *— абсолютная постоянная* $x > x_0 > 0$ *и*

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \mu(n)e(\alpha n^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда при $y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+282}$ *и* $\mathscr{L}^{32(B+18)} \leq q \leq y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$ *справедлива оценка*

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B}.$$

Теорема 3.1 доказывается методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова, используя результаты предыдущих глав, а именно

- теорему 1.1 об оценке короткой двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием для чисел α, принадлежащих малым дугам;

- теорему 2.1 об оценке короткой двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы, для чисел α принадлежащих малым дугам, а также следующую лемму, которая доказывается аналогично лемме 6 работы [25].

Лемма 3.1. *Пусть* $f(n)$ — *произвольная комплекснозначная функция,* $u \le x$, $r \ge 1$,

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \qquad \lambda(n) = \sum_{d\backslash n,\, d\le u_1} \mu(n).$$

Тогда имеет место тождество

$$\sum_{n\le x}\mu(n)f(n) = (-1)^r \sum_{n_1>u}\lambda(n_1)\cdots \sum_{\substack{n_r>u\\ mn_1\cdots n_r\le x}}\lambda(n_r)\sum_m \mu(m)f(mn_1\cdots n_r)+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\cdots\sum_{m_k\le u}\mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{\substack{n_{k-1}\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_{k-1}\le x}} f(m_1\cdots m_k n_1\cdots n_{k-1}).$$

Доказательство. Пусть $s=\sigma+it$, $\sigma>1$,

$$M(u,s)=\sum_{n\le u}\frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

По формуле бинома Ньютона

$$(1-\zeta(s)M(u,s))^r = 1+\sum_{k=1}^{r}(-1)^k C_r^k\zeta^k(s)M^k(u,s).$$

Следовательно,

$$1=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\zeta^k(s)M^k(u,s)+(1-\zeta(s)M(u,s))^r.$$

Умножая обе части этого равенства на функцию, являвшуюся обратной к дзета-функции Римана, получим

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\zeta^{k-1}(s)M^k(u,s)+\frac{1}{\zeta(s)}\left(1-\zeta(s)M(u,s)\right)^r. \qquad (3.1.2)$$

В силу того, что

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}.$$

$$1-\zeta(s)M(u,s)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{m\le u}\frac{\mu(m)}{m^s}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{d\backslash n\\ d\le u}}\mu(d)=$$

$$=\sum_{n>u}\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{d\backslash n\\ d\le u}}\mu(d)=\sum_{n>u}\frac{\lambda(n)}{n^s}.$$

соотношение (3.1.2) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\left(\sum_{k=1}^{r}(-1)^k C_k^r\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\ldots\sum_{m_k\le u}\mu(m_k)\sum_{n_1}\ldots\sum_{\substack{n_{k-1}\\ m_1\ldots m_k n_1\ldots n_{k-1}=n}}1-\right.$$

$$\left.-(-1)^k\sum_{m}\mu(m)\sum_{n_1>u}\lambda(n_1)\ldots\sum_{\substack{n_k>u\\ mn_1\ldots n_k=n}}\lambda(n_k)\right).$$

Согласно теореме о единственности рядов Дирихле, получим

$$\mu(n)=\sum_{k=1}^{r}(-1)^k C_k^r\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\ldots\sum_{m_k\le u}\mu(m_k)\sum_{n_1}\ldots\sum_{\substack{n_{k-1}\\ m_1\ldots m_k n_1\ldots n_{k-1}=n}}1-$$

$$-(-1)^k\sum_{m}\mu(m)\sum_{n_1>u}\lambda(n_1)\ldots\sum_{\substack{n_k>u\\ mn_1\ldots n_k=n}}\lambda(n_k).$$

Умножая это равенство на $f(n)$ и суммируя по всем $n, n\le x$, получим утверждение леммы.

3.2 . Короткая кубическая тригонометрическая сумма с функцией Мёбиуса

Теорема 3.1. *Пусть $B\ge 11$ — абсолютная постоянная $x>x_0>0$ и*

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\mu(n)e(\alpha n^3),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1.$$

Тогда при $y\ge x^{\frac45}\mathscr{L}^{8B+282}$ и $\mathscr{L}^{32(B+18)}\le q\le y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$ справедлива оценка

$$S_3(\alpha;x,y)\ll\frac{y}{\mathscr{L}^B}.$$

Доказательство. Имеем

$$S_3(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\mu(n)e(\alpha n^3)=\sum_{n\le x}\mu(n)e(\alpha n^3)-\sum_{n\le x-y}\mu(n)e(\alpha n^3).$$

Применяя к последним двум суммам лемму 3.1, полагая $r=3$, $u=x^{\frac{1}{3}}$ и $f(n)=e(\alpha n^3)$, имеем

$$S_3(\alpha;x,y)=-3S_{31}(\alpha;x,y)+3S_{32}(\alpha;x,y)-S_{33}(\alpha;x,y), \tag{3.2.1}$$

$$S_{31}(\alpha;x,y)=\sum_{\substack{m_1\le u\\ x-y<m_1\le x}}\mu(m_1)e(\alpha m_1^3)=0,$$

$$S_{32}(\alpha;x,y)=\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\sum_{m_2\le u}\mu(m_2)\sum_{\substack{n_1\\ x-y<m_1m_2n_1\le x}}e(\alpha(m_1m_2n_1)^3),$$

$$S_{33}(\alpha;x,y)=\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\sum_{m_2\le u}\mu(m_2)\sum_{m_3\le u}\mu(m_3)\sum_{n_1}\sum_{\substack{n_2\\ x-y<m_1m_2m_3n_1n_2\le x}}e(\alpha(m_1m_2m_3n_1n_2)^3).$$

Оценка $S_{32}(\alpha;x,y)$**.** Представляя сумму $S_{32}(\alpha;x,y)$ в виде

$$S_{32}(\alpha;x,y)=\sum_{m\le u^2}a(m)\sum_{\substack{n_1\\ x-y<mn\le x}}e(\alpha(mn)^3),$$

$$a(m)=\sum_{\substack{m=m_1m_2\\ m_1,m_2\le u}}\mu(m_1)\mu(m_2)\le\tau(m),$$

и области изменения m и n_1 на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $M<m\le 2M$, $N<n\le 2N$, получим не более $\ll\mathscr{L}^2$ сумм вида

$$J_3(\alpha;x,y,M,N)=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}}e(\alpha(mn)^3),$$

$$M\le u^2=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2},\qquad \frac{x}{4}\le MN<x-y. \tag{3.2.2}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N:

1. $N>x\mathscr{L}^{-2B-18}$;

2. $xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+208} < N \le x\mathscr{L}^{-2B-18}$;

3. $N \le xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+208}$.

Случай 1. $N > x\mathscr{L}^{-2B-18}$**.** В этом случае в $S_{32}(\alpha; x, y)$ внутренняя сумма по n очень длинная, и её оценим как короткую кубическую сумму Г. Вейля, представляя в виде

$$\begin{aligned}
&J_3(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{x_1-y_1<n\le x_1} e(\alpha(mn)^3),\\
&x_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N\right), \quad y_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N\right) - \max\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{m}, N\right) \le \frac{y}{m},\\
&M < m \le \min\left(2M, \frac{x}{n}\right) \le \frac{x}{N} \le \mathscr{L}^{2B+18}. \qquad (3.2.3)
\end{aligned}$$

Дважды применяя неравенство Коши и лемму 1.2, получим

$$\begin{aligned}
|J_3(\alpha; x, y, M, N)|^4 &\le \left(\sum_{M<m\le 2M} |a_m|^2\right)^2 \left(\sum_{M<m\le 2M} \left|\sum_{x_1-y_1<n\le x_1} e(\alpha(mn)^3)\right|^2\right)^2 \ll\\
&\ll M \left(\sum_{M<m\le 2M} \tau^2(m)\right)^2 \sum_{M<m\le 2M} \left|\sum_{x_1-y_1<n\le x_1} e(\alpha(mn)^3)\right|^4 \ll\\
&\ll M^3 \ln^6 M \sum_{M<m\le 2M} \left|\sum_{x_1-y_1<n\le x_1} e(\alpha(mn)^3)\right|^4. \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись методом Г. Вейля, затем суммируя по h, найдём

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{x_1-y_1<n\le x_1} e(\alpha(mn)^3)\right|^4 &\le 16y_1 \sum_{0<k\le y_1} \sum_{0<l\le y_1-k} \left|\sum_{0<h\le y_1-k-l} e(6\alpha mklh)\right| + 24y_1^3 + 2(y_1+1)^2 \ll\\
&\ll \frac{y}{m} \sum_{0<k\le \frac{y}{m}} \sum_{0<l\le \frac{y}{m}} \left|\sum_{0<h\le y_1-k-l} e(6\alpha mklh)\right| + \frac{y^3}{m^3} + \frac{y^2}{m^2} \ll\\
&\ll \frac{y}{M} \sum_{0<k\le \frac{y}{M}} \sum_{0<l\le \frac{y}{M}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|6\alpha mkl\|}\right) + \frac{y^3}{M^3}.
\end{aligned}$$

Подставляя это неравенство в (3.2.4) и воспользовавшись условием (3.2.3), найдём

$$
\begin{aligned}
&|J_2(\alpha; x, y, M, N)|^4 \ll \\
&\qquad \ll M^3 \ln^6 M \sum_{M<m\le 2M} \left(\frac{y}{M} \sum_{0<k\le \frac{y}{M}} \sum_{0<l\le \frac{y}{M}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|6\alpha mkl\|} \right) + \frac{y^3}{M^3} \right) \ll \\
&\qquad \ll yM^2\mathscr{L} \sum_{M<n\le 12y^2M^{-1}} \tau_3(n) \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|} \right) + y^3 M\mathscr{L}.
\end{aligned}
$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 1.2, найдём

$$
\begin{aligned}
|J_3(\alpha; x, y, M, N)|^8 &\ll y^2M^4\mathscr{L}^2 \sum_{n\le y^2M^{-1}} \tau_3^2(n) \sum_{n\le y^2M^{-1}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|} \right)^2 + y^6M^2\mathscr{L}^2 \ll \\
&\ll y^5M^2\mathscr{L}^{10} \sum_{n\le y^2M^{-1}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|} \right) + y^6M^2\mathscr{L}^2.
\end{aligned}
$$

Для оценки последней суммы по n рассмотрим отдельно случаи:

i. $\mathscr{L}^{8B+50} < 0.5q \le y^2M^{-1}$;

ii. $y^2M^{-1} < 0.5q \le y^3\mathscr{L}^{-12B-87}$.

i. Разбивая интервал изменения n на $\ll y^2(Mq)^{-1}$ интервалов вида $g \le h \le g + q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 1.3, затем воспользовавшись условием $M \le \mathscr{L}^{2B+18}$, найдём

$$
\begin{aligned}
|J_3(\alpha; x, y, M, N)|^8 &\ll y^5M^2\mathscr{L}^{10} \cdot \frac{y^2}{qM} \sum_{t=g}^{g+q'} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|} \right) + y^6M^2\mathscr{L}^2 \ll \\
&\ll \frac{y^7M\mathscr{L}^{10}}{q} \left(\frac{y}{M} + q\ln q \right) + y^6M^2\mathscr{L}^2 \ll \frac{y^8\mathscr{L}^{10}}{q} + y^7M\mathscr{L}^{11} \ll \\
&\ll y^8 \left(\frac{\mathscr{L}^{10}}{q} + \frac{\mathscr{L}^{2B+29}}{y} \right) \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+16}}.
\end{aligned}
$$

ii. Применяя утверждение б) леммы 1.3, затем воспользовавшись условием $M \leq \mathscr{L}^{2B+18}$, найдём

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)|^8 \ll y^5 M^2 \mathscr{L}^{10} \sum_{n \leq 0,5q} \frac{1}{\|\alpha n\|} + y^6 M^2 \mathscr{L}^2 \ll$$
$$\ll y^5 M^2 \mathscr{L}^{10} \cdot q \ln q + y^6 M^2 \mathscr{L}^2 \ll y^5 q \mathscr{L}^{4B+47} + y^6 \mathscr{L}^{4B+38} =$$
$$= y^8 \left(\frac{q \mathscr{L}^{4B+47}}{y^3} + \frac{\mathscr{L}^{4B+38}}{y^2} \right) \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+40}}.$$

Случай 2. $xy^{-\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{2B+208} < N_1 \leq x \mathscr{L}^{-2B-18}$**.** В этом случае $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ является короткой двойной кубической тригонометрической суммой с "длинной" сплошной суммой. Поэтому для оценки $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ применяем теорему 1.1, полагая $A = B + 5$, и при $B \geq 11$ из выполнения условии этой теоремы

$$\mathscr{L}^{8B+831} < q < y^3 \mathscr{L}^{-8B-831}$$

следует условие, доказуемой теоремы, то есть неравенство

$$\mathscr{L}^{32(B+18)} \leq q \leq y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-32(B+18)}.$$

Таким образом, все условия теоремы 1.1 выполняются, поэтому

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^{B+5}}.$$

Случай 3. $N \leq xy^{-\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{2B+208}$**.** Из соотношения (3.2.2), условия $y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+282}$ и условия рассматриваемого случая найдём

$$N \geq \frac{x}{4M} \geq \frac{x}{4 \cdot 0,5 x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{x}{y} \mathscr{L}^{32(B+18)} \cdot \frac{y}{2x^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{32(B+18)}} \geq$$
$$\geq \frac{x}{y} \mathscr{L}^{32(B+18)} \cdot \frac{x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+282}}{2x^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{32(B+18)}} = \frac{x}{y} \mathscr{L}^{32(B+18)} \cdot \frac{1}{2x^{\frac{2}{15}} \mathscr{L}^{24B+294}} \geq \frac{x}{y} \mathscr{L}^{32(B+18)}.$$

Применяя для оценки суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ следствие 2.1.1, полагая $A = B + 5$, также воспользовавшись эквивалентностью следующих двух неравенств

$$y \geq x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+281.6}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{2B+208} \leq y \mathscr{L}^{-8(B+18)},$$

имеем

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^{B+5}}.$$

Отсюда и из оценок, полученных в предыдущих случаях, найдём

$$|S_{32}(\alpha; x, y)| \ll y \mathscr{L}^{-B-3}.$$

Оценим сумму $S_{33}(\alpha; x, y)$. Разобьём в $S_{33}(\alpha; x, y)$ области изменения каждого m_1, m_2, m_3, n_1 и n_2 на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $M_j < m_j \leq 2M_j$, $N_j < n_j \leq 2N_j$. Получим не более $\ll \mathscr{L}^5$ сумм вида

$$S_{33}(\alpha; x, y, M, N) = \\ = \sum_{M_1 < m_1 \leq 2M_1} \mu(m_1) \sum_{M_2 < m_2 \leq 2M_2} \mu(m_2) \sum_{M_3 < m_3 \leq 2M_3} \mu(m_3) \sum_{N_1 < n_1 \leq 2N_1} \sum_{\substack{N_2 < n_2 \leq N_2 \\ x - y < m_1 m_2 m_3 n_1 n_2 \leq x}} e(\alpha (m_1 m_2 m_3 n_1 n_2)^3).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что выполняются условия

$$x^{\frac{1}{3}} > M_1 \geq M_2 \geq M_3, \quad N_1 \geq N_2, \quad 2^{-5} x \leq M_1 M_2 M_3 N_1 N_2 < x. \qquad (3.2.5)$$

Рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N_1:

1. $N_1 > x \mathscr{L}^{-2B-18}$;
2. $xy^{-\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{2B+208} < N_1 \leq x \mathscr{L}^{-2B-18}$;
3. $xy^{-1} \mathscr{L}^{32(B+18)} < N_1 \leq xy^{-\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{2B+208}$;
4. $N_1 \leq xy^{-1} \mathscr{L}^{32(B+18)}$, $N_1 N_2 > xy^{-1} \mathscr{L}^{32(B+18)}$;
5. $N_1 N_2 \leq xy^{-1} \mathscr{L}^{32(B+18)}$.

Для рассмотрения случаев 1, 2 и 3 сумму $S_{33}(\alpha; x, y, M, N)$ несколько преобразуем. Для этого, введя обозначения

$$a_m = \sum_{M_1 < m_1 \le 2M_1} \mu(m_1) \sum_{M_2 < m_2 \le 2M_2} \mu(m_2) \sum_{\substack{M_3 < m_3 \le 2M_3 \\ m_1 m_2 m_3 n_2 = m}} \mu(m_3) \sum_{N_2 < n_1 \le 2N_2} 1, \quad |a_m| \le \tau_4(m),$$

разбивая интервал суммирования $M_1 M_2 M_3 N_2 < m \le 2^4 M_1 M_2 M_3 N_2$ на интервалы вида $M < m \le 2M$, получим не более четырёх сумм вида

$$J_3(\alpha; x, y, M, N_1) = \sum_{M < m \le 2M} a_m \sum_{\substack{U_1 < n \le 2N_1 \\ x - y < mn \le x}} e(\alpha (mn)^3).$$

Случай 1. $N_1 > x\mathscr{L}^{-2B-18}$**.** В этом случае сумма по n_1 - очень длинная, и её оценим как короткую кубическую сумму Г. Вейля, представляя в виде

$$\begin{aligned}
&J_3(\alpha; x, y, M, N_1) = \sum_{M < m \le 2M} a_m \sum_{x_1 - y_1 < n \le x_1} e(\alpha (mn)^3),\\
&x_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right), \quad y_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right) - \max\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{m}, U_1\right) \le \frac{y}{m},\\
&M < m \le \min\left(2M, \frac{x}{n}\right) \le \frac{x}{N_1} \le \mathscr{L}^{2B+18}. \qquad (3.2.6)
\end{aligned}$$

Дважды применяя неравенство Коши и лемму 1.2, получим

$$\begin{aligned}
|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)|^4 &\le \left(\sum_{M < m \le 2M} |a_m|^2\right)^2 \left(\sum_{M < m \le 2M} \left|\sum_{x_1 - y_1 < n \le x_1} e(\alpha (mn)^3)\right|^2\right)^2 \ll \\
&\ll M \left(\sum_{M < m \le 2M} \tau_4^2(m)\right)^2 \sum_{M < m \le 2M} \left|\sum_{x_1 - y_1 < n \le x_1} e(\alpha (mn)^3)\right|^4 \ll \\
&\ll M^3 \ln^{30} M \sum_{M < m \le 2M} \left|\sum_{x_1 - y_1 < n \le x_1} e(\alpha (mn)^3)\right|^4. \qquad (3.2.7)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись методом Г. Вейля, затем суммируя по h, найдём

$$\begin{aligned}\left|\sum_{x_1-y_1<n\le x_1} e(\alpha(mn)^3)\right|^4 &\le 16y_1 \sum_{0<k\le y_1}\sum_{0<l\le y_1-k}\left|\sum_{0<h\le y_1-k-l} e(6\alpha mklh)\right| + 24y_1^3 + 2(y_1+1)^2 \ll \\ &\ll \frac{y}{m}\sum_{0<k\le \frac{y}{m}}\sum_{0<l\le \frac{y}{m}}\left|\sum_{0<h\le y_1-k-l} e(6\alpha mklh)\right| + \frac{y^3}{m^3} + \frac{y^2}{m^2} \ll \\ &\ll \frac{y}{M}\sum_{0<k\le \frac{y}{M}}\sum_{0<l\le \frac{y}{M}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|6\alpha mkl\|}\right) + \frac{y^3}{M^3}.\end{aligned}$$

Подставляя это неравенство в (3.2.7) и воспользовавшись условием (3.2.6), найдём

$$\begin{aligned}&|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)|^4 \ll \\ &\ll M^3 \ln^{30} M \sum_{M<m\le 2M}\left(\frac{y}{M}\sum_{0<k\le \frac{y}{M}}\sum_{0<l\le \frac{y}{M}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|6\alpha mkl\|}\right) + \frac{y^3}{M^3}\right) \ll \\ &\ll yM^2\mathscr{L} \sum_{M<n\le 12y^2M^{-1}} \tau_3(n) \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^3 M\mathscr{L}.\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 1.2, найдём

$$\begin{aligned}|J_3(\alpha; x, y, M, N)|^8 &\ll y^2M^4\mathscr{L}^2 \sum_{n\le y^2M^{-1}} \tau_3^2(n) \sum_{n\le y^2M^{-1}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right)^2 + y^6M^2\mathscr{L}^2 \ll \\ &\ll y^5M^2\mathscr{L}^{10} \sum_{n\le y^2M^{-1}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^6M^2\mathscr{L}^2.\end{aligned}$$

Для оценки последней суммы по n, рассмотрим отдельно случаи:

i. $\mathscr{L}^{8B+50} < 0.5q \le y^2M^{-1}$;

ii. $y^2M^{-1} < 0.5q \le y^3\mathscr{L}^{-12B-87}$.

i. Разбивая интервал изменения n на $\ll y^2(Mq)^{-1}$ интервалов вида

$g \le h \le g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 1.3, затем воспользовавшись условием $M \le \mathscr{L}^{2B+18}$, найдём

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)|^8 \ll y^5 M^2 \mathscr{L}^{10} \cdot \frac{y^2}{qM} \sum_{t=g}^{g+q'} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^6 M^2 \mathscr{L}^2 \ll$$
$$\ll \frac{y^7 M \mathscr{L}^{10}}{q}\left(\frac{y}{M} + q\ln q\right) + y^6 M^2 \mathscr{L}^2 \ll \frac{y^8 \mathscr{L}^{10}}{q} + y^7 M \mathscr{L}^{11} \ll$$
$$\ll y^8 \left(\frac{\mathscr{L}^{10}}{q} + \frac{\mathscr{L}^{2B+29}}{y}\right) \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+40}}.$$

ii. Применяя утверждение б) леммы 1.3, затем воспользовавшись условием $M \le \mathscr{L}^{2B+18}$, найдём

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)|^8 \ll y^5 M^2 \mathscr{L}^{10} \sum_{n \le 0{,}5q} \frac{1}{\|\alpha n\|} + y^6 M^2 \mathscr{L}^2 \ll$$
$$\ll y^5 M^2 \mathscr{L}^{10} \cdot q \ln q + y^6 M^2 \mathscr{L}^2 \ll y^5 q \mathscr{L}^{4B+47} + y^6 \mathscr{L}^{4B+38} =$$
$$= y^8 \left(\frac{q \mathscr{L}^{4B+47}}{y^3} + \frac{\mathscr{L}^{4B+38}}{y^2}\right) \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+40}}.$$

Случай 2. $xy^{-\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{2B+208} < N_1 \le x\mathscr{L}^{-2B-18}$**.** В этом случае $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ является короткой двойной кубической тригонометрической суммой с "длинной" сплошной суммой. Поэтому для оценки $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ применяем теорему 1.1, полагая $A = B+5$, и при $B \ge 11$ из выполнения условия этой теоремы

$$\mathscr{L}^{8B+831} < q < y^3 \mathscr{L}^{-8B-831}$$

следует условия, доказуемой теоремы то есть неравенство

$$\mathscr{L}^{32(B+18)} \le q \le y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-32(B+18)}.$$

Таким образом все условия теоремы 1.1 выполняются, поэтому

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^{B+5}}.$$

Случай 3. $xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)} < N_1 \le xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+208}$. Применяя для оценки суммы $|J_3(\alpha;x,y,M,N_1)$ следствие 2.1.1, полагая $A = B+5$, также воспользовавшись эквивалентностью следующих двух неравенств

$$y \ge x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+281.6}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+208} \le y\mathscr{L}^{-8(B+18)},$$

имеем

$$|J_3(\alpha;x,y,M,N_1)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^{B+5}}.$$

Случай 4. $N_1 \le xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$, $N_1N_2 > xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$. Сумму $T_3(M,N)$ преобразуем, для этого, вводя обозначения

$$a_m = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\le 2M_2}\mu(m_2)\sum_{\substack{M_3<m_3\le 2M_3\\ m_1m_2m_3=m}}\mu(m_3), \quad |a_m| \le \tau_3(h),$$

$$b_n = \sum_{N_1<n_1\le 2N_1}\sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2\\ n_1n_2=n}} 1, \quad |b_n| \le \tau(n),$$

и разбивая интервалы суммирования $M_1M_2M_3 < m \le 8M_1M_2M_3$ и $N_1N_2 < n \le 4N_1N_2$ соответственно на интервалы вида $M < m \le 2M$ и $N < n \le 2N$, получим не более шести сумм вида

$$J_3(\alpha;x,y,M,N) = \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}} b_n e(\alpha(mn)^3),$$

Из соотношения (3.2.5) и условия рассматриваемого случая найдём

$$xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)} < N_1N_2 \le N,$$

$$N \le 4N_1N_2 \le 4N_1^2 \le 4\left(xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}\right)^2 = y\mathscr{L}^{-8(B+18)}\cdot\frac{4x^2}{y^3}\mathscr{L}^{72(B+18)} \le$$

$$\le y\mathscr{L}^{-8(B+18)}\cdot\frac{4x^2\mathscr{L}^{72(B+18)}}{(x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+282})^3} < y\mathscr{L}^{-8(B+18)}.$$

Отсюда и из условия рассматриваемого случая следует, что при $A = B+5$ все условия следствия 2.1.1, в том числе

$$\mathscr{L}^{32(A+18)} \le q \le \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+18)},$$

выполняются. Поэтому согласно утверждению этого следствия, имеем

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-B-5}.$$

Случай 5. $N_1N_2 \le xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$**.** В сумме $T_3(M,N)$, вводя обозначение

$$a_m = \sum_{M_2<m_2\le 2M_2}\mu(m_2)\sum_{M_3<m_3\le 2M_3}\mu(m_3)\sum_{N_1<n_1\le 2N_1}\sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2\\ m_2m_3n_1n_2=m}}1, \qquad |a_m| \le \tau_4(m),$$

разбивая интервал суммирования $M_2M_3N_1N_2 < m \le 16M_2M_3N_1N_2$ на интервалы вида $M < m \le 2M$, а также обозначая M_1 через N, получим на не более четырёх сумм вида

$$J_3(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\le 2N\\ x-y<mn\le x}}\mu(n)e(\alpha(mn)^3),$$

Из соотношения (3.2.5) и условия рассматриваемого случая найдём

$$\begin{aligned}
N = M_1 &\ge (M_1M_2M_3)^{\frac13} = \left(\frac{M_1M_2M_3N_1N_2}{N_1N_2}\right)^{\frac13} \ge \\
&\ge \left(\frac{2^{-5}x}{xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}}\right)^{\frac13} = xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}\cdot\frac{2^{-\frac53}y^{\frac43}}{x\mathscr{L}^{\frac{128}{3}(B+18)}} = \\
&= xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}\left(\frac{2^{-\frac54}y}{x^{\frac34}\mathscr{L}^{32(B+18)}}\right)^{\frac43} \ge xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}.
\end{aligned}$$

Отсюда с учётом соотношения $N = M_1 < x^{\frac13} \le y\mathscr{L}^{-8(B+18)}$ и из условия рассматриваемого случая следует, что при $A = B+5$ все условия следствия 2.1.1, в том числе

$$\mathscr{L}^{32(A+18)} \le q \le \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+18)},$$

выполняются, поэтому согласно утверждению этого следствия, имеем

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-B-5}.$$

Отсюда и из всех оценок, полученных в предыдущих случаях, найдём

$$|S_{33}(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-B-5}, \qquad |S_{33}(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}.$$

Из полученных оценок $S_{32}(\alpha; x, y)$ и $S_{33}(\alpha; x, y)$ с учётом неравенства (3.2.1) получим утверждение теоремы.

Заключение

Основные результаты диссертации являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- получена нетривиальная оценка короткой кубической двойной тригонометрической суммы

$$J_3(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b(n)e(\alpha(mn)^3),$$

  где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N \le U < 2N$, $x > x_0$, y – вещественные числа, с «длинным» сплошным суммированием в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{8A+791})$, A — абсолютная постоянная, при

$$\tau = y^3\mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \le x\mathscr{L}^{-2A-8};$$

- доказана теорема об оценке короткой двойной тригонометрической суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы, следствием которой является её нетривиальная оценка в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(A+13)})$, при

$$\tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \le N \le y\mathscr{L}^{-8(A+13)};$$

- найдена нетривиальная оценка короткой кубической тригонометрической суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+19)})$, $B \ge 11$ — абсолютная постоянная, при

$$y \ge x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+282}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}.$$

Результаты полученные в диссертации носят теоретический характер, её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел.

Литература

[1] Виноградов И.М. Избранные труды /И. М. Виноградов // М.: Изд-во АН СССР. 1952. 436 с.

[2] Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел /И. М. Виноградов // М.: Наука. 1980. 144 с.

[3] Виноградов И.М. Основы теории чисел /И. М. Виноградов // М.: Наука, 1981. С. 393 – 400.

[4] Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга /И. М. Виноградов // Доклады Академии наук СССР. 1934. № 2. С. 337 – 341.

[5] Виноградов И.М. Новый метод в аналитической теории чисел /И. М. Виноградов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1937. Т. 10. С. 5 – 122.

[6] Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм /И. М. Виноградов // М.: Наука, 1976. 120 с.

[7] Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел /И. М. Виноградов, А. А. Карацуба // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1984. Т. 168. С. 4 – 30.

[8] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел /А. А. Карацуба // 2-ое изд, М.: Наука, 1983. 240 с.

[9] Davenport H. On some infinite series involving arithmetical functions (II) /H. Davenport // The Quarterly Journal of Mathematics. 1937. V. 8, No 1 pp. 313 — 320.

[10] Hua L. K. Additive theory of prime numbers /L. K. Hua // American Mathematical Soc. 1965. 190 pp.

[11] Хуа Ло-ген Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел /Л. Г. Хуа // М.: Мир. 1964. 190 с.

[12] Baker R. C., Harman G. Exponential sums formed with the Mobius function /R. C. Baker, G. Harman // J. London Math. Soc. 1991. (2)43. pp. 193 – 198.

[13] Liu J. Y., Zhan T. Exponential sums involving the Mobius function /J. Y. Liu, T. Zhan // Indag. Math. (N.S.), 7(2):271–278, 1996.

[14] Zhan T. Davenport's theorem in short intervals /T. Zhan // Chin. Ann. of Math., 12B(4):421–431, 1991.

[15] Zhan T. On the representation of large odd integer as a sum of three almost equal primes /T. Zhan // Acta Mathematica Sinica, 7(3):259–272, 1991.

[16] Liu J. Y., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals /J. Y. Liu, T. Zhan // I. Monatshefte fur Mathematik. 1999. 127(1). pp. 27 – 41.

[17] sc Lu G. S., Lao H. X. On exponential sums over primes in short intervals /G. S. Lu, H. X. Lao // Monatshefte fur Mathematik. 2007. 151(2). pp. 153 – 164.

[18] Kumchev A V. On Weyl sums over primes in short intervals /A. V. Kumchev // “Arithmetic in Shangrila” — Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. V. 9. Singapore: World Scientific. pp. 116–131.

[19] Haselgrove C.B. Some theorems in the analytic theory of number /C. B. Haselgrove // J.London Math.Soc. 1951. pp. 273 – 277.

[20] Статулявичус В. О представлении нечётных чисел суммою трёх почти равных простых чисел /В. Статулявичус // Вильнюс. Ученые труды университета. сер. мат., физ. и хим. н. 1955. № 2. С. 5 – 23.

[21] Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric

sums over primes in short intervals (III) /Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao // Chinese Ann. of Math. 1990. Vol. 2. pp. 138 – 147.

[22] Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes /T. Zhan // Acta Math Sinica, new ser. 1991. Vol. 7, no. 3. pp. 135 – 170.

[23] Liu J.Y., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I /J. Y. Liu, T. Zhan // Mh Math. 1999. Vol. 127. pp. 27 – 41.

[24] Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами /З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459, №2. С. 156 – 157.

[25] Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и её приложения /З. Х. Рахмонов // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57. № 4. С. 55 – 71.

[26] Рахмонов Ф З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами /Ф. З. Рахмонов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. №3. С. 56 – 60.

[27] Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы /К. К. Марджанишвили // Доклады Академии наук СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391 – 393.

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

[28] Замонов Б. М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием /Б. М. Замонов, З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 1. С. 217 – 231.

[29] Замонов Б. М. Об оценке коротких кубических двойных тригонометрических сумм на малых дугах /Б. М. Замонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. № 6. С. 483 – 486.

[30] Замонов Б. М. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, с «длинным» сплошным суммированием /Б. М. Замонов, З. Х. Рахмонов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 4(157). С. 7 – 23.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

[31] Замонов Б. М. Об оценке коротких кубических тригонометрических сумм с функцией Мёбиуса на малых дугах /Б. М. Замонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2016. Т. 59. № 7 – 8. С. 278 – 281.

[32] Замонов Б. М. Короткие двойные тригонометрические суммы на малых дугах /Б. М. Замонов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анлизу и смежным вопросам. 2016. № 8. С. 32 – 34.

[33] Замонов Б. М. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы с «длинным» сплошным суммированием /Б. М. Замонов, З. Х. Рахмонов // XIII Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения", посвящённая 80-летию со дня рождения С.С. Рышкова, Тула, 25-30 мая 2015 г. С. 47 – 49.

[34] Замонов Б. М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием / Б. М. Замонов // Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел", посвящённой 75-летию профессора Т.С. Сабирова, Душанбе, 29-30 октября 2015. С. 11 – 12.