ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

ЗАМОНОВА БЕХРУЗА МАЛИКАСРОРОВИЧА

«Короткие кубические тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса»,

представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация посвящена нахождению нетривиальной оценки тригонометрической суммы вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \mu(n)e(\alpha n^k), \qquad (1)$$

где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса, $e(u) = e^{2\pi iu}$, $1 \leqslant y < x$ – растущие параметры, α – вещественное число, а $k = 3$. Суммы такого типа при различных предположениях относительно параметров α, $k \geqslant 1$, x и y исследовались ранее в работах Г. Дэвенпорта, Л.-К. Хуа, Р. Бейкера, Г. Хармана, Т. Жана, Ж. Лю, Г.С. Лу, Х.Х. Лао и А. Кумчева, где для них был получен целый ряд оценок (как безусловных, так и условных, опирающихся на т.н. расширенную гипотезу Римана). Такие суммы играют важную роль в аналитической теории чисел.

В случае, когда длина y промежутка суммирования очень мала по сравнению с x, суммы $S_k(\alpha; x, y)$ называются короткими. Нетривиальные оценки таких (и им подобных) сумм играют важную роль при решении аддитивных задач, в которых на слагаемые накладываются дополнительные ограничения (скажем, требуется, чтобы слагаемые были “почти равны” и т.д.).

Сложность задачи оценки короткой суммы $S_k(\alpha; x, y)$ возрастает с уменьшением длины y промежутка суммирования. Например, в случаях $k = 1$ и $k = 2$ наилучшие на сегодняшний день результаты отвечают промежуткам с длинами $y \geqslant x^{5/8+\varepsilon}$ и $y \geqslant x^{11/16+\varepsilon}$ соответственно. В случае $k \geqslant 3$ известны оценки суммы “по простым числам”

$$F_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

($\Lambda(n)$ – функция Мангольдта), нетривиальные при $y \geqslant x^{c+\varepsilon}$, где $c = 1 - 1/(2k+3)$. Сумма $F_k(\alpha; x, y)$ подобна сумме (1) в том смысле, что методы оценки F_k без существенных изменений переносятся на случай оценки (1). Таким образом, можно считать, что наиболее короткая до настоящего времени кубическая сумма (1) с весовой функцией Мёбиуса отвечала промежутку длины $y \geqslant x^{8/9+\varepsilon}$.

Автор диссертации поставил задачей нахождение нетривиальной оценки $S_3(\alpha; x, y)$ при еще меньших y, а именно при $y \geqslant x^{4/5}(\log x)^C$, $C > 1$ – постоянная. Указанная задача была успешно решена, причём её решение было получено в несколько этапов.

На первом этапе автору понадобился аналог тождества Виноградова, который позволяет сводить оценки однократных сумм с определёнными весами, такими, как функции Мангольдта и Мёбиуса, к оценкам двойных сумм. Доказательство такого тождества составляет содержание леммы 3.1.

Второй этап исследования – оценки двойных сумм, возникающих при применении леммы 3.1 к исходной кубической сумме – составил содержание глав 1 и 2.

Именно, в первой главе автор оценивает двойные кубические суммы вида

$$J(\alpha; x, y; M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N \\ x-y<mn\leqslant x}} e(\alpha(mn)^3)$$

с условием $xy^{-1/4+\varepsilon} \ll N \ll x$, названные им "суммами с длинным сплошным суммированием". Соответственно, вторая глава посвящена оценке сумм того же вида, но с условиями $xy^{-1} \ll N \ll y$, которые названы (на мой взгляд, не вполне удачно) в работе "короткими двойными суммами, имеющими близкие по порядку суммы". Наконец, результаты глав 1 и 2 применяются в последней, третьей, главе к оценке суммы (1). Это явилось третьим, завершающим этапом работы.

Все результаты, полученные автором в работе, являются новыми, их доказательства – верными. Тема исследования является, без сомнения, актуальной. Следует отметить, что при решении поставленных задач автору пришлось преодолеть ряд трудностей, в частности, технического характера. Например, при оценке двойной суммы из главы 1 (теорема 1.1) автор придерживается следующей схемы рассуждений, отличной от применяемой в большинстве подобных случаев. Именно, при оценке суммы

$$W = \sum_m a(m) \sum_n e(\alpha(mn)^3)$$

автор вместо неравенства Коши вида

$$|W|^2 \leqslant \sum_m |a(m)|^2 \sum_m \sum_{n,n_1} e(\alpha m^3(n_1^3 - n^3))$$

и последующего "сдвига переменной" вида $n_1 = n + h$, использует точное равенство

$$|W|^2 = \sum_{m,\mu} a(m)\overline{a}(\mu) \sum_{n,\nu} e(\alpha((m\mu)^3 - (n\nu)^3))$$

и только после этого осуществляет аналог сдвига для разности $(m\mu)^3 - (n\nu)^3$. Соответственно, переменные, отвечающие за сдвиг, оказываются подчинены более сложным ограничениям, формулы для границ областей изменения переменных принимают достаточно громоздкий вид. Тем не менее, и в этой ситуации автор реализует классическую идею К. Гаусса – Г. Вейля последовательно понижения степени многочлена в показателе экспоненты, что и приводит в итоге к успеху.

К тексту диссертации имеется ряд замечаний, не умаляющих, однако, степени важности полученных результатов.

1. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что в диссертации (в частности, во введении) ничего не говорится о приложениях оценок сумм (1) и им подобных к задачам теории чисел. Соответственно, у неискушенного читателя может сложиться впечатление, что исследуемые суммы – "вещь в себе", не имеющая никакой связи с задачами теории чисел. К счастью, это не так, и поэтому отсутствие упоминаний о приложениях полученных результатов вызывает недоумение.

2. История исследования сумм $S_k(\alpha; x, y)$ пересказывается автором (с небольшими видоизменениями) трижды – во Введении (стр. 5-6), вновь во Введении (стр.

14-15) и, наконец, в главе 1 (стр. 17-18). Одного рассказа об истории задачи было бы вполне достаточно.

3. Целый ряд параграфов написан небрежно и пестрит неточностями и опечатками:

– на стр. 6 утверждается, что А.В. Кумчев "...получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$...", хотя в действительности его работа посвящена оценке суммы $F_k(\alpha; x, y)$ по простым числам;

– фамилии исследователей, упоминаемых в тексте, написаны местами латиницей (стр. 11), местами – на русском языке (напр., стр. 5, 6); автору следовало бы придерживаться единого образца;

– в доказательстве теоремы 1.1 (стр. 21 и далее) автор использует обозначение a_m, в то время как в определении суммы J_k а стр. 18-19 используется обозначение $a(m)$; то же относится к обозначениям на стр. 54, 55;

– в нижней выносной формуле на стр. 21 над a_m не поставлен знак комплексного сопряжения, хотя a_m предполагаются произвольными комплексными числами (стр. 18).

– оценка диагональных слагаемых на стр. 22 (первая выносная формула) верна, но не получает должного обоснования; вместе с тем, чтобы не обременять себя и читателей поиском наиболее точной оценки остаточного члена в асимптотике суммы величин $\tau_5^2(n)$ по $n \leqslant x$, достаточно сослаться на результат из работы: P. Shiu, *A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions.* J. reine angew. Math., 1980, v. 371, p. 161–170, где дана общая оценка сумм такого рода, правильная по порядку уже при $y \geqslant x^{\varepsilon}$.

– из неравенства $r \leqslant x - mu$ на стр. 23 следует, что дробь x/m в определении величины G на той же странице должна быть заменена дробью $(x - r)/m$.

– на стр. 26 вместо W_{rd}, W'_{rd} и т.д. лучше писать $W_{r,d}, W'_{r,d}$ и т.д., т.к. указанные суммы зависят от параметров r и d, но эта зависимость не сводится к зависимости от произведения rd; то же относится к встречающимся далее по тексту величинам $F_{m\mu}$, $G_{n\nu}$ и т.д.

– в ряде мест (стр. 36, 57) автор использует лемму 1.3, которая требует отдельного рассмотрения двух случаев (в зависимости от того, превосходит ли длина исследуемой суммы $0.5q$ или нет); более целесообразным представляется использование аналога леммы 1.3, который охватывает оба случая (см., например: А.А. Карацуба, Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М., Наука, 1983, лемма 5 из §2 гл. VI); во всяком случае, это позволило бы несколько упростить рассуждения на стр. 56-57;

– целый ряд опечаток допущен в формулировке леммы 3.1 (стр. 52); так, в определении $\lambda(n)$ вместо $\mu(n)$ должно быть $\mu(d)$, вместо $d \leqslant u_1$ следует указать $d > u$; в правой части тождества множитель $(-1)^r$ перед суммой по $n_1, \ldots, n_r > u$ является лишним; в доказательстве леммы также содержатся опечатки: в первой выносной формуле на стр. 53 вместо $d \leqslant u$ в предпоследнем равенстве должно быть $d > u$, во второй выносной формуле не должно быть множителя $-(-1)^k$; вместо n_k должно быть n_r;

– при доказательстве теоремы 3.1 используется тот факт, что $x - y > x/4$; таким образом, условие теоремы нужно дополнить неравенством $y < 3x/4$.

– на стр. 55 при использовании метода Г. Вейля должно происходить уменьшение степени лишь у многочлена n^3, в то время как у автора в последних выносных неравенствах величина m^3 необоснованно заменяется величиною m; соответственно, вместо $\|6\alpha mkl\|$ должно быть $\|6\alpha m^3 kl\|$, вместо $12y^2M^{-1}$ (верхняя граница в сумме по n) – $48My^2$; дальнейшие оценки также искажаются (хотя и не сильно, т.к. M ограничена степенью логарифма); то же замечание справедливо для выкладок на стр. 60

Подводя итог, отметим следующее. Результаты, полученные Б.М. Замоновым, являются новыми и значимыми, снабжены подробными доказательствами и были своевременно опубликованы в журналах из списка ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

По актуальности, объёму и научному уровню выполненных исследований диссертация полностью удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
доктор физико - математических наук
ведущий научный сотрудник
Отдела теории чисел
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова М.А.Королёв
119991, Москва, ул. Губкина, 8
Тел.: 8(495)9848141 (доб. 37-32)
E-mail: korolevma@mi.ras.ru

Подпись ведущего научного сотрудника
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова
Королёва М.А. заверяю

Ученый секретарь
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова П.А. Яськов