ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Замонова Бехруза Маликасроровича
«Короткие кубические тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теории чисел

1. Актуальность избранной темы. Диссертационная работа является исследованием в аналитической теории чисел и её основным предметом является оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм и их приложения к нахождению нетривиальной оценки коротких кубических тригонометрических сумм с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k = 3$ в малых дугах $\mathfrak{m}$. Длинную тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса впервые рассматривали Г. Дэвенпорта и Л.-К. Хуа. Они воспользовавшись методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова соответственно при $k = 1$ и $k \ge 2$ получили нетривиальную оценку вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{n\le x} \mu(n)e(\alpha n^k) \ll x\mathscr{L}^{-B}.$$

Короткую сумму $S_k(\alpha; x, y)$ впервые рассмотрел Т. Жан и получил её нетривиальную оценку в случае $k = 1$ при $y \ge x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$ и в случае $k = 2$ совместно с Дж. Лю при $y \ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$. А.В. Кумчев получил для $S_k(\alpha; x, y)$ нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при

$$y \ge x^{\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = 1 - \frac{1}{2k+3}, \qquad \tau = x^{1+2\theta}P^{-1},$$

которая для суммы $S_3(\alpha; x, y)$ принимает вид

$$y \ge x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}, \qquad \tau = x^{\frac{25}{9}}P^{-1}.$$

Б.М. Замонову удалось получить нетривиальную оценку для более коротких сумм $S_3(\alpha; x, y)$.

2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации. Все утверждения теорем и научные положения, сформулированные в диссертации, получены в результате применения современных методов теории чисел, а именно:

- метод И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляет сглаживания двойных сумм и решето Виноградова;
- метод оценок тригонометрических сумм Г. Вейля.

3. Достоверность и новизна полученных результатов. Основные результаты диссертационной работы являются новыми и заключаются в следующем:

1. найдена нетривиальная оценка короткой кубической двойной тригонометрической суммы с «длинным» сплошным суммированием в малых дугах;
2. найдена нетривиальная оценка короткой кубической двойной тригонометрической суммы, имеющей близкие по порядку суммы в малых дугах;

3. найдена нетривиальная оценка короткой кубической тригонометрической суммы с функцией Мёбиуса на малых дугах.

4. Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся тригонометрическими функциями, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. А. Джураева АН РТ, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В. Ломоносова, в Таджикском национальном университете и в других учебных заведениях.

5. Оценка содержания диссертации, её завершенность. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Во введении описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов; обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов; приводятся основные результаты диссертации.

Первая и вторая глава посвящены коротким двойным тригонометрическим суммам

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N \le U < 2N$, $x > x_0$, y – вещественные числа. Следует заметить, что все безусловные нетривиальные оценки коротких кубических тригонометрических сумм $S_k(\alpha; x, y)$, как и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$f_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

в малых дугах получены методом оценок сумм с простыми числами И.М. Виноградова, основу которого составляют оценки сумм $J_k(\alpha; x, y, M, N)$ и «решето Виноградова». Суммы $J_1(\alpha; x, y, M, N)$ были изучены в работах И.М. Виноградова, Хейзелгроува, В. Статулявычуса, Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо, Т. Жана.

Основным результатом первой главы является теоремы 1.1 о нетривиальной оценки сумм $J_k(\alpha; x, y, M, N)$ с «длинным» сплошным суммированием, в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{8A+791})$ при

$$\tau = y^3\mathscr{L}^{-8A-791}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+198} < N \le x\mathscr{L}^{-2A-8}.$$

А основным результатом второй главы являются теоремы 2.1 об оценке суммы $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, имеющей близкие по порядку суммы и её следствие 2.1.1 о нетривиальной оценке таких сумм в малые дуги $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(A+13)})$ при

$$\tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \le N \le y\mathscr{L}^{-8(A+13)}.$$

Основным результатом третьей главы является доказательство теоремы 3.1 о нетривиальной оценке суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+19)})$, $B \ge 11$ при

$$y \ge x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+282}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(B+18)},$$

и доказывается методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова, используя результаты предыдущих глав.

6. Достоинство и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования. Достоинствами диссертации являются её основные результаты, отмеченные в пункте 3, полученные применением метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова, метода оценок тригонометрических сумм Г. Вейля. А к недостаткам диссертации можно отнести несколько незначительных отпечатков и грамматических ошибок, не влияющих на научную значимость полученных результатов.

В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо.

7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федераци, полно и правильно отражает положения диссертационной работы.

8. Соответствие диссертации и автореферата требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствует требованиям ГОСТ Р 7.0.11-2011. В списке литературы библиографические записи соответствует требованиям ГОСТ в полной мере.

9. Заключение о соответствие диссертации критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14. Диссертация Замонова Б.М. соответствует критериям, установленным «Положением о присуждении ученых степеней» по пунктам 10, 11 и 14.

(П.10): Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты в тригонометрических суммах. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении некоторых задач в аналитической теории чисел.

(П.11): Основные научные результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах, три из которых входят в перечень ВАК МОН РФ.

(П.14): Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Диссертационная работа Замонова Бехруза Маликасроровича на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является научно-квалифицированной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для тригонометрических сумм, и полностью соответствует требованиям П.9 Положения о присуждения учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент: Исматов Сайфулло Неъматович,
кандидат физико-математических наук по специальности
01.01.06-Математическая логика, алгебра и теория чисел,
доцент кафедры алгебры и теории чисел
Таджикского национального университета

Контактная информация: Таджикский национальный университет,
734025, г. Душанбе, проспект Рудаки 17, телефон: (+992)372217711
e-mail: saifullo@mail.ru

Подпись С.Н. Исматова заверяю
Начальник УК и спецчасти ТНУ Тавкиев Э.Ш.