На правах рукописи

Исматов Сайфулло Неъматович

Распределение дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе – 2015

Работа выполнена в Институте математики имени А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

Научный руководитель: Рахмонов Зарулло Хусенович
доктор физико–математических наук,
член корреспондент АН РТ, профессор

Официальные оппоненты: Журавлев Владимир Георгиевич,
доктор физико–математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых», профессор кафедры математического анализа

Чариеев Умидилла,
кандидат физико–математических наук,
доцент, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни,
доцент кафедры алгебры и теории чисел

Ведущая организация: Таджикский национальный университет

Защита состоится 26 июня 2015 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02 Каримов У.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Основным предметом исследований является оценка сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами и вывод закона распределения дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов.

Тригонометрические суммы впервые появились у Гаусса при доказательстве закона взаимности квадратичных вычетов. Он исчерпывающим образом исследовал важнейшие свойства, носящей его имя "*суммы Гаусса*". Тригонометрические суммы в дальнейшем стали мощным средством решения ряда важных проблем теории чисел. При этом, основной в отношении таких сумм стала проблема разыскания их возможно более точной оценки, то есть возможно более точной верхней границы их модуля.

Далее были исследованы полные рациональные тригонометрические суммы вида

$$S = \sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{f(x)}{q}\right), \tag{1}$$

где $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x,\ n > 1,\ (a_n, \ldots, a_1, q) = 1$. В случае простого $q = p$ наилучшая неулучшаемая оценка принадлежит А. Вейлю[1]. Он доказал, что

$$|S| < n\sqrt{p}.$$

Первые оценки суммы (1) в случае составного q были даны Хуа [2,3]. Он установил неравенство вида

$$|S| \leq c(n) q^{1-\frac{1}{n}}.$$

Это неравенство замечательно тем, что при постоянном n в смысле порядка роста правой части с возрастанием q оно, вообще говоря, уже не может быть заменено существенно лучшим. В.Н. Чубариков[4] получил оценки модуля кратной рациональной тригонометрической суммы.

[1]Weyl A. Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloquim Pub. 29 (1947).

[2]L.K. Hua, On exponential sums, J. Chinese Math. Soc. 20 (1940), pp. 301 – 312.

[3]Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории в теории чисел — М.: Мир. 1964. 190 с.

[4]Чубариков В.Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Математические заметки. 1976. Т. 20. Вып. 1. С. 61 – 68.

Рациональная тригонометрическая сумма, как частный случай, входит в еще более общий класс сумм вида

$$S = S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \sum_{m \le P} e(f(m)), \tag{2}$$

где $f(x) = \alpha_n m^n + \ldots + \alpha_1 m$ и $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ – любые вещественные числа. Первый общий метод нахождения нетривиальных оценок сумм (2) создал Г. Вейль[5], поэтому этим суммам дали название суммы Г. Вейля. Этот метод оценок сыграл заметную роль в развитии теории чисел: он позволил дать первые решения ряда важных проблем, в частности, найти закон распределения дробных частей многочлена $f(t)$, следствием которого является их равномерное распределение по модулю 1.

В 1934 г. И.М. Виноградов[6,7] нашел новый метод в аналитической теории чисел. Этот метод не только позволил коренным образом усовершенствовать решения проблем, уже рассматривавшихся ранее с помощью других методов, но и открыл широкий путь к решению новых.

Идейная часть метода И.М. Виноградова основана на возможности получения нетривиальных оценок двойных тригонометрических сумм вида

$$W = \sum_{m \le X} \sum_{n \le Y} a(m) b(n) e(\alpha m n),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, α – действительное число,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| \le 1.$$

Следующим результатом, полученным новым методом, явились принципиально новые оценки сумм Г. Вейля[8,9,10]. Основу этих оценок составила "теорема о среднем И.М. Виноградова". Новые оценки сумм Г. Вейля (1935

---

[5] Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann. 1916. 77. s. 313 – 352.

[6] Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга // Доклады Академии наук СССР. 1934. № 2. С. 337 – 341.

[7] Виноградов И.М. Избранные труды — М.: Издательство АН СССР. 1952.

[8] Виноградов И.М. Новый вариант вывода теоремы Варинга // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1935. № 9. С. 5 – 16.

[9] Виноградов И.М. Новый метод в аналитической теории чисел // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1937. Т. 10. С. 5 – 122.

[10] Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1984. Т. 168. С. 4 – 30.

г.) были получены на основе теоремы И.М. Виноградова *“о среднем значении тригонометрической суммы Г. Вейля”*, то есть суммы вида

$$S = S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \sum_{x=1}^{P} e(f(x)), \qquad f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x.$$

Теорема о среднем — это теорема об оценке сверху величины J, т.е. интеграла J вида

$$J = J_b = J_b(P) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|^{2b} d(\alpha_n, \ldots, \alpha_1),$$

который представляет собой среднее значение модуля суммы S в степени $2b$.

В 1937 г. И.М. Виноградов обнаружил, что многие суммы по простым числам могут быть составлены путем только сложений и вычитаний из сравнительно небольшого числа других сумм, хорошие оценки которых могут быть получены с помощью соображений метода оценок двойных сумм W и средств, не имеющих какого-либо отношения к теории функции $\zeta(s)$ (или L – рядов). В частности, такой суммой оказалась сумма

$$S' = \sum_{p \le P} e(f(p)),\ f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha x,$$

аналогичная сумме S, но с суммированием, распространенным лишь на простые числа, не превосходящие P. Первой была найдена оценка суммы

$$\sum_{p \le P} e(\alpha p),$$

являющейся простейшим (при $n = 1$ и $f(x) = \alpha x$) видом суммы S', которая в соединении с теоремами, касающимися распределения простых чисел в арифметических прогрессиях, имеющих разность, не превосходящую некоторой медленно растущей с возрастанием P, позволила впервые строго вывести асимптотическую формулу для числа $I(N)$ представлений нечетного числа N в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

Из этой формулы как частное следствие было выведено и существование представлений для всех достаточно больших N (тернарная проблема Гольдбаха).

Далее, в том же 1937 г. с помощью указанного соображения, существенно используя метод Г. Вейля, И.М. Виноградов получил и оценку суммы S' (для $n > 1$), сходную с оценкой суммы S по методу Г. Вейля (несколько менее точную). А в 1948–1956 гг. с помощью тех же соображений, но используя вместо метода Г. Вейля средства своего метода, И.М. Виноградов получил и общую теорему об оценке суммы S', принципиально близкую к общей теореме И.М. Виноградова об оценке суммы S.

Основу метода И. М. Виноградова оценок сумм с простыми числами, наряду с уже упомянутым выше методом сглаживания двойных сумм и теоремой о среднем, составляет решето Виноградова.

Следствием оценки суммы S' по простым числам явилась теорема о распределении дробных частей значений многочлена $f(p)$ при условии, что p принимает значения последовательных простых чисел, не превосходящих P.

В проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$ И.М. Виноградов получил намного более точную оценку тригонометрической суммы, чем в общем случае распределения дробных частей $\{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p\}$. Он доказал: *пусть K — целое, $K \leq N$, α — вещественное,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq N,$$

тогда, будем иметь

$$V_K(N) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p \leq N} e(\alpha k p) \right| \ll K N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right). \qquad (3)$$

Отсюда следует утверждение: *при любом σ с условием* $0 < \sigma \leq 1$ *число $F_\alpha(N, \sigma)$ значений $\{\alpha p\}$, $p \leq N$, подчиненных условию $\{\alpha p\} < \sigma$, выразится формулой*

$$F_\alpha(N, \sigma) = \sigma \pi(N) + R_\sigma(N), \quad R_\sigma(N) \ll N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right).$$

В частности, если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, то можно выбрать q таким, чтобы оно было порядка $\sqrt{N}$. В этом случае в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, то есть для $F_\alpha(N, H, \sigma)$ – *количества членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких,* *что* $N - H < p \leq N$ *и* $\{\alpha p\} < \sigma$, *имея в виду, что* $F_\alpha(x, y, \sigma) = F_\alpha(x, \sigma) - F_\alpha(x - y, \sigma)$, *справедлива асимптотическая формула*

$$F_\alpha(N, H, \sigma) = \sigma(\pi(N) - \pi(N - H)) + O\left(N^{4/5+\varepsilon}\right),$$

являющаяся нетривиальной при $N \gg H^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$.

Для величин H, порядок которых меньше порядка $N^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$, и произвольных α, вопрос распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(N - H, N]$, оставался открытым.

Вместе с «решетом Виноградова» основу оценки (3) также составляют нетривиальные оценки тригонометрических сумм вида

$$W(x) = \sum_{k \leq K} \left| \sum_{F_1 < m \leq F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \leq G_2 \\ mn \leq x}} b(n) e(\alpha k m n) \right|, \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, K, F, G – натуральные, $F \leq F_1 < F_2 \leq 2F$, $G \leq G_1 < G_2 \leq 2G$.

И.М. Виноградов при сведении задачи о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$ к оценке тригонометрических сумм $V_K(N)$, как в других подобных задачах, воспользовался своим методом, основой которого является лемма *«о стаканчиках»*.

Цель работы. Целью диссертационной работы является получение нетривиальной оценки сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами и их приложения к закону распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x - y, x]$.

Методы исследования. Степень обоснованности полученных в диссертации научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, а именно:

- метод И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляет метод сглаживания двойных сумм и решето Виноградова;
- метод оценок тригонометрических сумм Г. Вейля;

- методы гармонического анализа.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяется тем, что в ней найдена нетривиальная оценка сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами, также их приложения - вывод закона распределения дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаюся в следующем:

- найдены нетривиальные оценки сумм модулей коротких двойных линейных тригонометрических сумм, в которых имеется длинная сплошная сумма, или суммы, составляющие двойную сумму, близки по порядку;
- для сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами получена нетривиальная оценка, являющаяся обобщением соответствующей оценки И.М. Виноградова на случай коротких тригонометрических сумм с простыми числами;
- задача о распределении дробных частей линейного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, сведена к оценке сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами;
- доказан закон распределения дробных частей линейного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала для всех коэффициентов являющихся иррациональным числом или рациональным числом с большими знаменателями;
- найдены условия, при выполнении которых последовательность дробных частей линейного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, является равномерно распределённой.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации и методика их получения могут быть использованы при решении задач аналитической теории чисел в том числе, в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из коротких интервалов.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались:

- на семинаре отдела алгебры, теории чисел и топологии (2012-2014 гг.) и на общеинститутском семинаре (2014-2015 гг.) в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан;

- на семинаре кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета

- на международной конференции «Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел», посвященной 85-летию со дня рождения профессора Г.Б. Бабаева, Душанбе, 25-26 октября 2013 г.;

- на международной научной конференции «Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений», посвященной 85-летию академика Л.Г. Михайлова, Душанбе, 17 июня 2013 г.

- на международной научной конференции «Современные проблемы математики и её преподавания», Худжанд, 28 - 29 июня 2014 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырех статьях в рецензируемых научных журналах и сборниках, список которых приведен в конце автореферата. В работах, написанных совместно с З.Х. Рахмоновым и Ф.З. Рахмоновым, соавторам принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы. Общий объем работы 70 страниц. Список цитированной литературы включает 56 наименований.

Содержание диссертации

Во введении к диссертации содержится обзор результатов, относящихся к теме диссертации, а также формулируются основные полученные в ней результаты.

Первая глава состоит из трёх параграфов, она посвящена нетривиальной оценке сумм модулей коротких двойных тригонометрических сумм и оценке сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами.

Первый параграф носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы которые используются в последующих параграфах этой главы. В этом параграфе также с помощью известной теоремы о попадании простых чисел в интервал малой длины, принадлежащей Р. Бакеру и Г. Харману[11], доказана:

Лемма 1.6. *При $y \geq x^{0.534}$ справедливо соотношение*

$$\sum_{x-y<p\leq x} e(\alpha kp) - \frac{1}{\ln x} \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(\alpha kn) \ll \frac{y^2}{x \ln^2 x}.$$

Второй параграф посвящён оценкам сумм модулей коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$W(x,y) = \sum_{k\leq K} \left| \sum_{F_1<m\leq F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1<n\leq G_2 \\ x-y<mn\leq x}} b(n) e(\alpha kmn) \right|,$$

получающиеся из $W(x)$ заменой условия $mn \leq x$ на условие $x - y < mn \leq x$, где $\sqrt{x} < y \leq x\mathscr{L}^{-1}$, $\mathscr{L} = \ln xq$, а именно оценкам сумм $W(x,y)$, в которых имеется *«длинная»* сплошная сумма (теорема 1.1) и суммы, составляющие двойную сумму, *«близкие»* по порядку (теорема 1.2). Сформулируем результаты первого параграфа.

Теорема 1.1. *Пусть в сумме $W(x,y)$ выполняются условия: $F \leq y$, $K \leq y$, $1 < q \leq Ky$,*

$$\sum_{t\leq 2KF} \left(\sum_{\substack{t=mk,\, 1\leq k\leq K \\ F<m\leq 2F}} |a(m)| \right)^2 \ll KF\mathscr{L}^{c_a},$$

c_a – абсолютная постоянная. Тогда при $b(n) = 1$ справедлива оценка

$$W(x;y) \ll \begin{cases} Ky\left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{F}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}}, & \text{если } q < 4KF; \\[2ex] Ky \cdot \sqrt{\dfrac{q}{Ky}}\, \mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}}, & \text{если } q \geq 4KF. \end{cases}$$

Следствие 1.1.1. *Пусть A – абсолютная постоянная, тогда, при $\mathscr{L}^{2A+c_a+1} \leq q \leq Ky\mathscr{L}^{-2A-c_a-1}$ и $y \geq F\mathscr{L}^{2A+c_a+1}$, справедлива оценка*

$$W(x,y) = \sum_{k\leq K} \left| \sum_{F_1<m\leq F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1<n\leq G_2 \\ x-y<mn\leq x}} e(\alpha kmn) \right| \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.$$

[11]Baker R., Harman G. The difference between consecutive primes // Proc. London Math. 1996. Soc. 72. pp. 261 – 280.

Теорема 1.2. *Пусть в сумме $W(x,y)$ выполняются условия:* $F\le y$, $G\le y$, $K\le y$, $1<q\le Ky^2x^{-1}$,

$$\sum_{F_1<m\le F_2}|a(m+m_1^*)|^2\ll F\mathscr{L}^{c_a},\qquad \sum_{G_1<n\le G_2}|b(n)|^2\ll G\mathscr{L}^{c_b},$$

c_a *и* c_b *– абсолютные постоянные,* $m_1^*=0$ *или* $F<m_1^*\le 2F$. *Тогда справедлива оценка*

$$W(x,y)\ll\begin{cases} Ky\left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{F}{y}+\dfrac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac14}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}, & \text{если } q<\dfrac{2Ky}{G};\\[2ex] Ky\left(\dfrac{qx}{Ky^2}+\dfrac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac14}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}, & \text{если } q\ge\dfrac{2Ky}{G}.\end{cases}$$

Следствие 1.2.1. *Пусть A – абсолютная постоянная, тогда при выполнении одного из следующих условий:*

i. $y\ge\max\left(F\mathscr{L}^{4A+2c_a+2c_b+4},\ \dfrac{x\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b}}{F}\right)$ *и* $\mathscr{L}^{2c_a+2c_b+4A+4}\le q<\dfrac{2Ky}{G}$;

ii. $y\ge\dfrac{x\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b}}{F}$ *и* $\dfrac{2Ky}{G}\le q\le\dfrac{Ky^2}{x\mathscr{L}^{2c_a+2c_b+4A+4}}$,

следует оценка

$$W(x,y)=\sum_{k\le K}\left|\sum_{F_1<m\le F_2}a(m)\sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ x-y<mn\le x}}e(\alpha kmn)\right|\ll\frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.$$

Третий параграф является приложением второго параграфа и посвящён выводу нетривиальных оценок сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами.

Теорема 1.4. *Пусть K, H, N и q – натуральные числа, $K\le H$, A – абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln Nq$, α –вещественное и*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\le q\le\frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда, при $H\gg N^{\frac23}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива оценка

$$S_K(N,H)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<n\le N}\Lambda(n)e(\alpha kn)\right|\ll\frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство теоремы 1.4 проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами работ[12,13,14] и его основными моментами являются:

- замена короткой тригонометрической суммы с простыми числами на короткие кратные тригонометрические суммы, то есть применение леммы 1.2 и представление $S_K(N,H)$ в виде:

$$S_K(N,H)=\sum_{k=1}^{K}\left|-2S_1(k)+S_2(k)\right|$$
$$S_1(k)=\sum_{m\le\sqrt{N}}\mu(m)\sum_{N-H<mn\le N}\ln n\, e(\alpha kmn),$$
$$S_2(k)=\sum_{m_1\le\sqrt{N}}\mu(m_1)\sum_{m_2\le\sqrt{N}}\mu(m_2)\sum_{n_1}\sum_{N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}\ln n_1\, e(\alpha km_1m_2n_1n_2).$$

- Представление $|S_K(N,H)|$ в виде суммы коротких кратных тригонометрических сумм вида

$$|S_K(N,H)|\ll \mathscr{L}^3\sum_{k=1}^{K}|S_1(k,\bar{M},\bar{N})|+\mathscr{L}^5\sum_{k=1}^{K}|S_2(k,\bar{M},\bar{N})|,$$
$$S_1(k,\bar{M},\bar{N})=\sum_{M_1<m\le 2M_1}\mu(m)\sum_{\substack{N_1<n\le 2N_1\\ N-H<mn\le N}}\ln n\ e(\alpha kmn),$$
$$S_2(k,\bar{M},\bar{N})=\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\le 2M_2}\mu(m_2)\sum_{U_1<n_1\le 2N_1}\sum_{\substack{U_2<n_2\le 2N_2\\ N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}}e(\alpha km_1m_2n_1n_2),$$

  где $M_1\ge M_2,\ N_1\ge N_2$;

- Рассмотрим следующие возможные значения параметра N_1: $N_1\ge N^{\frac{1}{3}}$; $N^{\frac{1}{3}}N_2^{-1}\le N_1<N^{\frac{1}{3}}$; $N_1<N^{\frac{1}{3}}N_2^{-1}$.

- В случае $N_1\ge N^{\frac{1}{3}}$ в сумме $S_2(k,\bar{M},\bar{N})$ сплошное суммирование по n_1 является длинным и, представляя $S_2(k,\bar{M},\bar{N})$ как сумму более

[12] Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Доклады Российской академии наук. 1993. Т. 331. № 3. С. 281 – 282.

[13] Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57. № 4. С. 55 – 71.

[14] Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.

трёх сумм вида

$$S_2(k,\bar{M},\bar{N},F)=\sum_{F_1<m\le F_2}a(m)\sum_{\substack{U_1<n\le 2N_1\\ N-H<mn\le N}}e(\alpha kmn),$$

и применим следствие 1.1.1 теоремы 1.1 к сумме

$$S_2\ll\sum_{k=1}^{K}|S_2(k,\bar{M},\bar{N},F)|$$

- В случаях $N^{\frac{1}{3}}N_2^{-1}\le N_1<N^{\frac{1}{3}}$; $N_1<N^{\frac{1}{3}}N_2^{-1}$ сумму $S_2(k,\bar{M},\bar{N})$ представим в виде суммы не более четырёх двойных сумм, составляющие суммы которых *«близки»* по порядку. Суммируя эти двойные суммы по всем k, $1\le k\le K$, оценим, воспользовавшись следствием 1.2.1 теоремы 1.2.

Следствием теоремы 1.4 и леммы 1.6 является теорема 1.5, которая во второй главе прилагается при выводе асимптотической формулы в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Теорема 1.5. *Пусть K, H, N и q – натуральные числа, $K\le H$, A – абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln Nq$, α – вещественное и*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\le q\le\frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда при $H\gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива оценка

$$V_K(N,H)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<p\le N}e(\alpha kp)\right|\ll\frac{KH}{\mathscr{L}^{A+1}}.$$

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена изучению распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Первый параграф носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые используются в последующих параграфах.

Пусть α – вещественное число, $x>x_0>1$, $y\ge x^{0.534}$, $0\le\sigma\le 1$. Вводим следующие обозначения и понятия:

- $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – *обозначает количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ и $\{\alpha p\}<\sigma$;*

- $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – *обозначает количество членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x-y<p\le x$ *и* $\mu\le\{\alpha p\}<\nu$, *причём* $0\le\mu<\nu\le 1$, *то есть*

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu)=F_\alpha(x,y,\nu)-F_\alpha(x,y,\mu);$$

- *величина*

$$D(x,y)=\sup_{0\le\mu<\nu\le 1}\left|\frac{F(x,y,\mu,\nu)}{y}-(\mu-\nu)\right|$$

называется ***отклонением*** *членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *при* $x-y<p\le x$, *если* m *принимает простые числа из интервала малой длины* $(x-y,x]$*;*

- *последовательность* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x-y<p\le x$ *и* $\{\alpha p\}<\sigma$ *называется равномерно распределённой по модулю единица, если при* $y\to\infty$ *выполняется соотношение*

$$D(x,y)=o(1).$$

Основным результатом второго параграфа второй главы является теорема 2.1 о сведении задачи о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y,\,x]$ к оценке сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами $V_K(x,y)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $y\ge x^{0.534}$, $\mathscr{L}=\ln x$, $A>1$ – *абсолютная постоянная,* $M\ge\mathscr{L}^A$ *и* $M_1=M\ \ln\mathscr{L}^A$, *тогда для* $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – *количество членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x-y<p\le x$ *и* $\{\alpha p\}<\sigma$, *справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma)-\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))\ll\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{V_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right),$$

где $\pi(x)$ – *количество простых чисел, не превосходящих числа* x.

Из теоремы 2.1 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ и $\mu\le\{\alpha p\}<\nu$, причём $0\le\mu<\nu\le 1$, получим:

Следствие 2.1.1. *При выполнении условий теоремы 2.1 справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu)-(\nu-\mu)(\pi(x)-\pi(x-y))\ll\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{V_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right).$$

Из следствия 2.1.1 для отклонения

$$D_\alpha(x,y)=\sup_{0\le\mu<\nu\le1}\left|\frac{F(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)}-(\nu-\mu)\right|$$

членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$, находим:

Следствие 2.1.2. *При выполнении условий теоремы 2.1 справедлива следующая оценка*

$$D_\alpha(x,y)\ll\frac{\ln M}{\mathscr{L}^A}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{V_K(x,y)}{Ky\mathscr{L}^{-2}}\right).$$

Понятие равномерного распределения значений числовых последовательностей на отрезке ввёл в математику Г. Вейль[5]. Он заложил основы теории равномерного распределения, которая получила дальнейшее развитие в теории чисел, в теории функций, классической механике. В работах[15] для дробных частей $\{\alpha m^n\}$, при условии, что $x-y<m\le x$ и доказано, что *если α — иррациональное число, тогда последовательность $\{\alpha m^2\}$, $x-y<m\le x$ при $y\ge\ln^3 x$, $y\to\infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.*

Мы вводим критерии Г. Вейля о равномерном распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Из следствия 2.1.2 получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю единица для последовательности $\{\alpha p\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x-y,x]$.

Следствие 2.1.3. *Последовательность $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$, является равномерно распределённой по модулю единица, при $y\to\infty$ справедлива оценка*

$$V_K(x,y)=o\left(\frac{Ky}{\mathscr{L}^2}\right).$$

Теорема 1.5 о нетривиальной оценке сумм коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами $V_K(N,H)$ при $H\gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ в сочетании с теоремой 2.1 о сведении задачи о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y,x]$ к оценке $V_K(x,y)$, позволила доказать теорему 2.2 о

[15] Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля // Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки. 2012. № 6. Ч. 2. С. 194 – 203.

законе распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x-y,\,x]$ для более коротких интервалов и для всех иррациональных α и рациональных α с большими знаменателями.

Теорема 2.2. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A\geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\leq q\leq \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\leq x$ и $\{\alpha p\}<\sigma$, при $y\gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma)=\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Из доказанной теоремы 2.2 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\leq x$ и $\mu\leq\{\alpha p\}<\nu$, причём $0\leq\mu<\nu\leq 1$, воспользовавшись соотношением

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu)=F_\alpha(x,y,\nu)-F_\alpha(x,y,\mu),$$

получим следующее утверждение:

Следствие 2.2.1. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A\geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\leq q\leq \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ при $y\gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu)=(\nu-\mu)(\pi(x)-\pi(x-y))+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Из следствия 2.2.1 для отклонения

$$D_\alpha(x,y)=\sup_{0\leq\mu<\nu\leq 1}\left|\frac{F_\alpha(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)}-(\nu-\mu)\right|$$

членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\leq x$, получаем следующее утверждение:

Следствие 2.2.2. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $D_\alpha(x,y)$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая оценка

$$D_\alpha(x,y) \ll \frac{y\mathscr{L}^{-A}}{\pi(x) - \pi(x-y)}.$$

Из следствия 2.2.2 и теоремы Р. Вакера и Г. Хармана о правильном порядке числа простых чисел в интервале малой длины $(x-y, x]$, $y \geq x^{0.534}$ (лемма 1.5) получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю единица для последовательности $\{\alpha p\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x-y, x]$.

Следствие 2.2.3. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда последовательность $\{\alpha p\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$, $y \to \infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.

Следствие 2.2.4. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \frac{\sigma y}{\mathscr{L}} + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^2}\right).$$

Из доказанного следствия 2.2.4 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\mu \leq \{\alpha p\} < \nu$, причём $0 \leq \mu < \nu \leq 1$, получим:

Следствие 2.2.5. *При выполнении условий теоремы 2.2 справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x, y, \mu, \nu) = \frac{(\nu - \mu)H}{\mathscr{L}} + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}^2}\right).$$

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, член–корреспонденту Академии наук Республики Таджикистан, профессору З.Х. Рахмонову за постановку задач и внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

1. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З., Исматов С.Н. Оценка сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 12. С. 937 – 945.

2. Исматов С.Н. О распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 1. С. 9 – 14.

3. Рахмонов З.Х., Исматов С.Н. Распределение дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала// Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 5. С. 347 – 350.

4. Исматов С.Н. О распределении дробных частей , аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: естественные и экономические науки. 2014. № 2(29). Ч. 1. С. 303 – 304.

5. Исматов С.Н. Распределение дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. 2015. № 1/2. С. 25 – 28.