Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

ИСМАТОВ САЙФУЛЛО НЕЪМАТОВИЧ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО МНОГОЧЛЕНА, АРГУМЕНТ КОТОРОГО ПРИНИМАЕТ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ИЗ КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛОВ

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
член-корреспондент АН РТ, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2015

Оглавление

Обозначения

$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i\sin 2\pi\alpha$.

При ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются тремя индексами: номер главы, номер параграфа, номер утверждения.

$c, c_1, c_2, \cdots$,–положительные постоянные, не всегда одни и те же.

ε–положительные сколь угодно малые постоянные.

$\varphi(q)$ – функция Эйлера.

$\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

$\Lambda(n)$ – функция Мангольдта.

$\tau(n)$ – число делителей числа n.

$\tau_r(n)$ – число решений уравнения $x_1x_2\ldots x_r = n$ в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Запись $A \asymp B$ означает, что $c_1A \le B \le c_2A$.

При положительном A запись $B = O(A)$ или $B \ll A$ означает, что существует $c > 0$ такое, что $|B| \le cA$.

(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b.

$[x]$ – целая часть числа x.

$\{x\}$ – дробная часть числа x.

$\|x\| = \min\Big(\{x\}, 1 - \{x\}\Big)$ – расстояние до ближайшего целого числа.

$\mathscr{L} = \ln xq$.

Введение

Основным предметом исследований, составляющих содержание диссертации, является оценка сумм коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами и вывод закона распределения дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов.

Тригонометрические суммы впервые появились у Гаусса при доказательстве закона взаимности квадратичных вычетов. Он исчерпывающим образом исследовал важнейшие свойства носящей его имя “*суммы Гаусса*”. Тригонометрические суммы в дальнейшем стали мощным средством решения ряда важных проблем теории чисел. При этом, основной в отношении таких сумм стала проблема разыскания их возможно более точной оценки, то есть возможно более точной верхней границы их модуля.

Далее были исследованы полные рациональные тригонометрические суммы вида

$$S = \sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{f(x)}{q}\right), \tag{1}$$

где $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x$, $n > 1$, $(a_n, \ldots, a_1, q) = 1$. В случае простого $q = p$

наилучшая неулучшаемая оценка принадлежит А. Вейлю [1]. Он доказал, что

$$|S| < n\sqrt{p}.$$

Первые оценки суммы (1) в случае составного q были даны Хуа [2, 3, 4, 5]. Он установил неравенство вида

$$|S| \leq c(n)q^{1-\frac{1}{n}}.$$

Это неравенство замечательно тем, что при постоянном n в смысле порядка роста правой части с возрастанием q оно, вообще говоря, уже не может быть заменено существенно лучшим. В.Н. Чубариков [6] получил оценки модуля кратной рациональной тригонометрической суммы.

Рациональная тригонометрическая сумма, как частный случай, входит в еще более общий класс сумм вида

$$S = S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \sum_{m \leq P} e(f(m)), \tag{2}$$

где $f(x) = \alpha_n m^n + \ldots + \alpha_1 m$ и $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ – любые вещественные числа.

Первый общий метод нахождения нетривиальных оценок сумм (2) дал Г. Вейль [7], задолго до упомянутого результата Хуа. Поэтому этим суммам присвоено название суммы Г. Вейля. Метод Г. Вейля. сыграл заметную роль в развитии теории чисел: он позволил дать первые решения ряда важных проблем, в частности, найти закон распределения дробных частей многочлена $f(t)$, следствием которого является их равномерное распределение по модулю 1.

В 1934 г. И.М. Виноградов [8, 9, 10] нашел новый метод в аналитической теории чисел. Этот метод не только позволил коренным образом усовершенствовать решения проблем, уже рассматривавшихся ранее с помощью других методов, но и открыл широкий путь к решению новых.

Первым результатом, полученным новым методом (1934 г.), явилась принципиально новая верхняя граница для функции $G(n)$ Харди и Литтлвуда (см. [10, 11]):

$$G(n) < n(6\ln n + 10).$$

Эта граница растет с возрастанием n как величина порядка $n \ln n$ и, ввиду известного неравенства $G(n) > n$, уже не может быть заменена границей существенно более низкого порядка.

Следующим результатом, полученным новым методом, явились принципиально новые оценки сумм Г. Вейля [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] . Основу этих оценок составила «теорема о среднем И.М. Виноградова». Новые оценки сумм Г. Вейля (1935 г.) были получены на основе теоремы И.М. Виноградова *“о среднем значении тригонометрической суммы Г. Вейля”*, то есть суммы вида

$$S = S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \sum_{x=1}^{P} e(f(x)), \qquad f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x.$$

Теорема о среднем — это теорема об оценке сверху величины J, т.е. интеграла J вида

$$J = J_b = J_b(P) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|^{2b} d(\alpha_n, \ldots, \alpha_1),$$

который представляет собой среднее значение модуля суммы S в степени $2b$.

В 1942 году Ю.В. Линником [20] было найдено новое доказательство теоремы о среднем значении, использующее свойства сравнений по модулю степеней простого числа p. Другое p – адическое доказательство, то есть использующее свойства сравнений по модулю простого числа p, теоремы о среднем значении было получено А.А. Карацубой [21], на основе разработанного им в шестидесятых годах двадцатого века p–адического метода в данной проблематике. В дальнейшем его метод, помимо других приложений, позволил не только значительно прояснить и упростить доказательство теоремы о среднем значении, но и получить новые существенные результаты, в частности, вывести нетривиальные оценки величины $J(N; n, k)$ при малых значениях k (см. работы [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29]).

И.М. Виноградов поставил проблему оценки сверху кратных тригонометрических сумм. Данная задача была решена Г.И. Архиповым [30] в начале 70-х годов прошлого века. Г.И. Архипов получил первые оценки двукратных сумм Вейля для многочленов общего вида. В 1975г. Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [31], [32] дали обобщение результатов Г.И. Архипова на кратный случай. В 1976 г. В.Н. Чубариков [6, 33, 34] получил оценки кратных тригонометрических интегралов. В течение 80-х годов прошлого столетия Г.И. Архипов, А.А. Карацуба и В.Н. Чубариков [35, 36] продолжили исследования и получили первые оценки кратных тригонометрических сумм Вейля, равномерные по всем параметрам (по длинам интервалов изменения переменных суммирования, по степени осреднения и по степени многочлена). В 1987 г. результаты всех исследований по кратным тригонометрическихрическим суммам Вейля составили содержание монографии *“Теория кратных тригонометрических сумм”* [37]. В середине 80-х годов прошлого века В.Н. Чубариков получил первые оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами с многочленом общего вида в экспоненте [38, 39, 40, 41].

В 1937 г. И.М. Виноградов обнаружил, что многие суммы по простым числам могут быть составлены путем только сложений и вычитаний из сравнительно небольшого числа других сумм, хорошие оценки которых могут быть получены с помощью соображений метода оценок двойных сумм W и средств, не имеющих какого-либо отношения к теории функции $\zeta(s)$ (или L – рядов). В частности, такой суммой оказалась сумма

$$S' = \sum_{p \le P} e(f(p)), \ f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha x,$$

аналогичная сумме S, но с суммированием, распространенным лишь на простые числа, не превосходящие P. Первой была найдена оценка суммы

$$\sum_{p \le P} e(\alpha p),$$

являющейся простейшим (при $n = 1$ и $f(x) = \alpha x$) видом суммы S', которая в соединении с теоремами, касающимися распределения простых чисел в арифметических прогрессиях, имеющих разность, не превосходящую некоторой медленно растущей с возрастанием P, позволила впервые строго вывести асимптотическую формулу для числа $I(N)$ представлений нечетного числа N в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

Из этой формулы как частное следствие было выведено существование представлений для всех достаточно больших N (тернарная проблема Гольдбаха).

Далее, в том же 1937 г. с помощью указанного соображения, существенно используя метод Г. Вейля, И.М. Виноградов получил и оценку суммы S' (для $n > 1$), сходную с оценкой суммы S по методу Г. Вейля (несколько менее точную). А в 1948—1956 гг. с помощью тех же соображений, но используя вместо метода Г. Вейля средства своего метода, И.М. Виноградов получил и общую теорему об оценке суммы S', принципиально близкую к общей теореме И.М. Виноградова об оценке суммы S.

Основу метода И.М. Виноградова оценок сумм с простыми числами, наряду с уже упомянутым выше методом сглаживания двойных сумм и теоремой о среднем, составляет решето Виноградова.

Следствием оценки суммы S' по простым числам явилась теорема о распределении дробных частей значений многочлена $f(p)$ при условии, что p принимает значения последовательных простых чисел, не превосходящих P.

В проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$ И.М. Виноградов получил намного более точную оценку тригонометрической суммы, чем в общем случае распределения дробных частей $\{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p\}$. Он доказал [17, 19]): *пусть* K *— целое,* $K \le N$, α *— вещественное,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \le q \le N,$$

тогда, будем иметь

$$V_K(N) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p \le N} e(\alpha k p) \right| \ll K N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right). \qquad (3)$$

Отсюда следует утверждение: *при любом σ с условием $0 < \sigma \leq 1$ число $F_\alpha(N,\sigma)$ значений $\{\alpha p\}$, $p \leq N$, подчиненных условию $\{\alpha p\} < \sigma$, выразится формулой*

$$F_\alpha(N,\sigma) = \sigma\pi(N) + R_\sigma(N), \quad R_\sigma(N) \ll N^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}} + N^{-0,2}\right).$$

В частности, если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, то можно выбрать q таким, чтобы оно было порядка $\sqrt{N}$. В этом случае в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, то есть для $F_\alpha(N,H,\sigma)$ – *количества членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $N-H < p \leq N$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, имея в виду, что $F_\alpha(x,y,\sigma) = F_\alpha(x,\sigma) - F_\alpha(x-y,\sigma)$, справедлива асимптотическая формула*

$$F_\alpha(N,H,\sigma) = \sigma(\pi(N) - \pi(N-H)) + O\left(N^{4/5+\varepsilon}\right),$$

являющаяся нетривиальной при

$$H \gg N^{\frac{4}{5}+\varepsilon}.$$

Для величин H, порядок которых меньше порядка $N^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$, и произвольных α вопрос распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(N-H,\, N]$, оставался открытым.

Вместе с «решетом Виноградова» основу оценки (3) также составляют нетривиальные оценки тригонометрических сумм вида

$$W(x) = \sum_{k\leq K}\left|\sum_{F_1<m\leq F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1<n\leq G_2\\ mn\leq x}} b(n)e(\alpha kmn)\right|, \quad \alpha = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1,$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, K, F, G – натуральные, $F \leq F_1 < F_2 \leq 2F$, $G \leq G_1 < G_2 \leq 2G$.

И.М. Виноградов при сведении задачи о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$ к оценке тригонометрических сумм $V_K(N)$, как в других подобных задачах, воспользовался своим методом, основой которого является лемма *«о стаканчиках»* ([17], стр. 18 – 20).

Диссертация состоит из двух глав.

Первая глава состоит из трёх параграфов и посвящена нетривиальной оценке сумм модулей коротких двойных тригонометрических сумм и оценке сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами.

Первый параграф носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые используются в последующих параграфов этой главы. В этом параграфе также с помощью известной теоремы о попадании простых чисел в интервале малой длины, принадлежащей Р. Бакеру и Г. Харману [42], доказана:

Лемма 1.6 *При* $y \geq x^{0.534}$ *справедливо соотношение*

$$\sum_{x-y<p\leq x} e(\alpha kp) - \frac{1}{\ln x}\sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n)e(\alpha kn) \ll \frac{y^2}{x\ln^2 x}.$$

Второй параграф посвящён оценкам сумм модулей коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$W(x,y) = \sum_{k\leq K}\left|\sum_{F_1<m\leq F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1<n\leq G_2\\ x-y<mn\leq x}} b(n)e(\alpha kmn)\right|,$$

получающиеся из $W(x)$ заменой условия $mn \leq x$ на условие $x-y < mn \leq x$, где $\sqrt{x} < y \leq x\mathscr{L}^{-1}$, $\mathscr{L} = \ln xq$, а именно оценкам сумм $W(x,y)$, в которых имеется *«длинная»* сплошная сумма (теорема 1.1) и суммы, составляющие двойную сумму, *«близкие»* по порядку (теорема 1.2). Сформулируем результаты первого параграфа.

Теорема 1.1 *Пусть в сумме $W(x,y)$ выполняются условия: $F \leq y$, $K \leq y$, $1 < q \leq Ky$,*

$$\sum_{t \leq 2KF} \left(\sum_{\substack{t=mk,\, 1\leq k \leq K \\ F < m \leq 2F}} |a(m)| \right)^2 \ll KF\mathscr{L}^{c_a},$$

c_a – абсолютная постоянная. Тогда при $b(n) = 1$ справедлива оценка

$$W(x;y) \ll \begin{cases} Ky\left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{F}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}}, & \text{если } q < 4KF; \\ \\ Ky \cdot \sqrt{\dfrac{q}{Ky}}\, \mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}}, & \text{если } q \geq 4KF. \end{cases}$$

Следствие 1.1.1. *Пусть A – абсолютная постоянная, тогда, при $\mathscr{L}^{2A+c_a+1} \leq q \leq Ky\mathscr{L}^{-2A-c_a-1}$ и $y \geq F\mathscr{L}^{2A+c_a+1}$, справедлива оценка*

$$W(x,y) = \sum_{k \leq K} \left| \sum_{F_1 < m \leq F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \leq G_2 \\ x-y < mn \leq x}} e(\alpha kmn) \right| \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.$$

Теорема 1.2 *Пусть в сумме $W(x,y)$ выполняются условия: $F \leq y$, $G \leq y$, $K \leq y$, $1 < q \leq Ky^2x^{-1}$,*

$$\sum_{F_1 < m \leq F_2} |a(m + m_1^*)|^2 \ll F\mathscr{L}^{c_a}, \qquad \sum_{G_1 < n \leq G_2} |b(n)|^2 \ll G\mathscr{L}^{c_b},$$

c_a и c_b – абсолютные постоянные, $m_1^*=0$ или $F<m_1^*\leq 2F$. Тогда справедлива оценка

$$W(x,y)\ll\begin{cases} Ky\left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{F}{y}+\dfrac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac14}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}, & \text{если } q<\dfrac{2Ky}{G};\\ \\ Ky\left(\dfrac{qx}{Ky^2}+\dfrac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac14}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}, & \text{если } q\geq\dfrac{2Ky}{G}.\end{cases}$$

Следствие 1.2.1 *Пусть A – абсолютная постоянная, тогда при выполнении одного из следующих условий:*

i. $y\geq\max\left(F\mathscr{L}^{4A+2c_a+2c_b+4},\ \dfrac{x\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b}}{F}\right)$ *и* $\mathscr{L}^{2c_a+2c_b+4A+4}\leq q<\dfrac{2Ky}{G}$;

ii. $y\geq\dfrac{x\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b}}{F}$ *и* $\dfrac{2Ky}{G}\leq q\leq\dfrac{Ky^2}{x\mathscr{L}^{2c_a+2c_b+4A+4}}$,

следует оценка

$$W(x,y)=\sum_{k\leq K}\left|\sum_{F_1<m\leq F_2}a(m)\sum_{\substack{G_1<n\leq G_2\\ x-y<mn\leq x}}e(\alpha kmn)\right|\ll\frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.$$

Третий параграф является приложением второго параграфа и посвящён выводу нетривиальных оценок сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами.

Теорема 1.4 *Пусть K, H, N и q – натуральные числа, $K\leq H$, A – абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln Nq$, α – вещественное и*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\leq q\leq\frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда, при $H\gg N^{\frac23}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива оценка

$$S_K(N,H)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<n\leq N}\Lambda(n)e(\alpha kn)\right|\ll\frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство теоремы 1.4 проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова в сочетании с методами работ [43, 44, 45] и его основными моментами являются:

- замена короткой тригонометрической суммы с простыми числами на короткие кратные тригонометрические суммы, то есть применение леммы 1.2 и представление $S_K(N,H)$ в виде;

$$S_K(N,H) = \sum_{k=1}^{K} \left|-2S_1(k) + S_2(k)\right|,$$

$$S_1(k) = \sum_{m\le\sqrt{N}} \mu(m) \sum_{N-H<mn\le N} \ln n \, e(\alpha kmn),$$

$$S_2(k) = \sum_{m_1\le\sqrt{N}} \mu(m_1) \sum_{m_2\le\sqrt{N}} \mu(m_2) \sum_{n_1} \sum_{N-H<m_1m_2n_1n_2\le N} \ln n_1 \, e(\alpha km_1m_2n_1n_2).$$

- Представление $|S_K(N,H)|$ в виде суммы коротких кратных тригонометрических сумм вида

$$|S_K(N,H)| \ll \mathscr{L}^3 \sum_{k=1}^{K} |S_1(k,\bar M,\bar N)| + \mathscr{L}^5 \sum_{k=1}^{K} |S_2(k,\bar M,\bar N)|,$$

$$S_1(k,\bar M,\bar N) = \sum_{M_1<m\le 2M_1} \mu(m) \sum_{\substack{N_1<n\le 2N_1\\ N-H<mn\le N}} \ln n \; e(\alpha kmn),$$

$$S_2(k,\bar M,\bar N) = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1} \mu(m_1) \sum_{M_2<m_2\le 2M_2} \mu(m_2) \sum_{U_1<n_1\le 2N_1} \sum_{\substack{U_2<n_2\le 2N_2\\ N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}} e(\alpha km_1m_2n_1n_2),$$

где $M_1 \ge M_2,\ N_1 \ge N_2$;

- Рассмотрим следующие возможные значения параметра N_1: $N_1 \ge N^{\frac13}$; $N^{\frac13}N_2^{-1} \le N_1 < N^{\frac13}$; $N_1 < N^{\frac13}N_2^{-1}$.

- В случае $N_1 \geq N^{\frac{1}{3}}$ в сумме $S_2(k, \bar{M}, \bar{N})$ сплошное суммирование по n_1 является длинным и представляя $S_2(k, \bar{M}, \bar{N})$ как сумму не более трёх сумм вида
$$S_2(k, \bar{M}, \bar{N}, F) = \sum_{F_1 < m \leq F_2} a(m) \sum_{\substack{U_1 < n \leq 2N_1 \\ N-H < mn \leq N}} e(\alpha kmn),$$
и применим следствие 1.1.1 теоремы 1.1 к сумме
$$S_2 \ll \sum_{k=1}^{K} |S_2(k, \bar{M}, \bar{N}, F)|.$$
- В случаях $N^{\frac{1}{3}} N_2^{-1} \leq N_1 < N^{\frac{1}{3}}$; $N_1 < N^{\frac{1}{3}} N_2^{-1}$ сумму $S_2(k, \bar{M}, \bar{N})$ представим в виде суммы не более четырёх двойных сумм, составляющие суммы которых *«близки»* по порядку. Суммируя эти двойные суммы по всем k, $1 \leq k \leq K$, оценим воспользовавшись следствием 1.2.1 теоремы 1.2.

Следствием теоремы 1.4 и леммы 1.6 является теорема 1.5, которая во второй главе прилагается при выводе асимптотической формулы в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Теорема 1.5 *Пусть K, H, N и q – натуральные числа, $K \leq H$, A – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln Nq$, α – вещественное и*
$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{KH^2}{N} \mathscr{L}^{-4A-20}.$$
Тогда при $H \gg N^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива оценка
$$V_K(N, H) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{N-H < p \leq N} e(\alpha kp) \right| \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^{A+1}}.$$

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена изучению распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины. Первый параграф носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые используются в последующих параграфах.

Пусть α – вещественное число, $x > x_0 > 1$, $y \geq x^{0.534}$, $0 \leq \sigma \leq 1$. Вводим следующие обозначения и понятия:

- $F_\alpha(x, y, \sigma)$ – *обозначает количество членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x - y < p \leq x$ *и* $\{\alpha p\} < \sigma$*;*

- $F_\alpha(x, y, \mu, \nu)$ – *обозначает количество членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x-y < p \leq x$ *и* $\mu \leq \{\alpha p\} < \nu$*, причём* $0 \leq \mu < \nu \leq 1$*, то есть*
$$F_\alpha(x, y, \mu, \nu) = F_\alpha(x, y, \nu) - F_\alpha(x, y, \mu);$$

- *величина*
$$D(x, y) = \sup_{0 \leq \mu < \nu \leq 1} \left| \frac{F(x, y, \mu, \nu)}{y} - (\mu - \nu) \right|$$
называется ***отклонением*** *членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *при* $x - y < p \leq x$*, если* p *принимает значения из интервала малой длины* $(x - y, x]$*;*

- *последовательность* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x - y < p \leq x$ *и* $\{\alpha p\} < \sigma$ *называется равномерно распределенной по модулю единица, если при* $y \to \infty$ *выполняется соотношение*
$$D(x, y) = o(1).$$

Основным результатом второго параграфа второй главы является теорема 2.1 о сведении задачи о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y,\, x]$ к оценке сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами $V_K(x,y)$.

Теорема 2.1 *Пусть $y \geq x^{0.534}$, $\mathscr{L} = \ln x$, $A > 1$ – абсолютная постоянная, $M \geq \mathscr{L}^A$ и $M_1 = M \ln \mathscr{L}^A$, тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma) - \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) \ll \frac{y \ln M}{\mathscr{L}^{A+1}} + \max_{K \leq M_1} \left(\frac{V_K(x,y)}{K} \mathscr{L} \right),$$

где $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих числа x.

Из теоремы 2.1 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ и $\mu \leq \{\alpha p\} < \nu$, причём $0 \leq \mu < \nu \leq 1$, получим:

Следствие 2.1.1 *При выполнении условий теоремы 2.1 справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu) - (\nu-\mu)(\pi(x) - \pi(x-y)) \ll \frac{y \ln M}{\mathscr{L}^{A+1}} + \max_{K \leq M_1} \left(\frac{V_K(x,y)}{K} \mathscr{L} \right).$$

Из следствия 2.1.1 для отклонения

$$D_\alpha(x,y) = \sup_{0 \leq \mu < \nu \leq 1} \left| \frac{F(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y) - \pi(x)} - (\nu - \mu) \right|$$

членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$, находим:

Следствие 2.1.2 *При выполнении условий теоремы 2.1 справедлива следующая оценка*

$$D_\alpha(x,y) \ll \frac{\ln M}{\mathscr{L}^A} + \max_{K \leq M_1} \left(\frac{V_K(x,y)}{K y \mathscr{L}^{-2}} \right).$$

Понятие равномерного распределения значений числовых последовательностей на отрезке ввёл в математику Г. Вейль [7]. Он заложил основы теории равномерного распределения, которая получила дальнейшее развитие в теории чисел, в теории функций, классической механике. В [46, 47] было введено понятие *равномерной распределённости* для дробных частей $\{\alpha m^n\}$, при условии, что $x-y < m \le x$ и доказано, что *если α – иррациональное число, тогда последовательность $\{\alpha m^2\}$, $x-y < m \le x$ при $y \ge \ln^3 x$, $y \to \infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.*

Мы вводим критерии Г. Вейля о равномерном распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Из следствия 2.1.2 получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю единица для последовательности $\{\alpha p\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x-y, x]$.

Следствие 2.1.3 *Последовательность $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \le x$, является равномерно распределённой по модулю единица, при $y \to \infty$ справедлива оценка*

$$V_K(x,y) = o\left(\frac{Ky}{\mathscr{L}^2}\right).$$

Как мы уже отмечали, если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, то из теоремы 1.3 И.М. Виноградова следует асимптотическая формула (следствие 1.3.2) в законе распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины

$(x-y,\, x]$, являющиеся нетривиальной при

$$y \gg x^{\frac{4}{5}+\varepsilon},$$

а для величин y, порядок которых меньше порядка $x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$ и произвольных α, вопрос распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x-y,\, x]$ оставался открытым.

Теорема 1.5 о нетривиальной оценке сумм коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами $V_K(N,H)$ при $H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ в сочетании теоремы 2.1 о сведении задачи о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y,\, x]$ к оценке $V_K(x,y)$ позволила доказать теорему 2.2 о законе распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x-y,\, x]$ для более коротких интервалов и для всех иррациональных α и рациональных α с большими знаменателями.

Теорема 2.2 *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Из доказанной теоремы 2.2 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ и $\mu \leq \{\alpha p\} < \nu$, причём

$0 \le \mu < \nu \le 1$, воспользовавшись соотношением

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu) = F_\alpha(x,y,\nu) - F_\alpha(x,y,\mu),$$

получим следующее утверждение:

Следствие 2.2.1 *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \ge 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \le q \le \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu) = (\nu-\mu)(\pi(x) - \pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Из следствия 2.2.1 для отклонения

$$D_\alpha(x,y) = \sup_{0\le\mu<\nu\le1}\left|\frac{F_\alpha(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)} - (\nu-\mu)\right|$$

членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$, получаем следующее утверждение:

Следствие 2.2.2 *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \ge 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \le q \le \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $D_\alpha(x,y)$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая оценка

$$D_\alpha(x,y) \ll \frac{y\mathscr{L}^{-A}}{\pi(x)-\pi(x-y)}.$$

Из следствия 2.2.2 и теоремы Р. Вакера и Г. Хармана о правильном порядке число простых чисел в интервале малой длины $(x-y,x]$, $y \geq x^{0.534}$ (лемма 1.5) получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю единица для последовательности $\{\alpha p\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x-y,x]$.

Следствие 2.2.3 *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда последовательность $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$, $y \to \infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.

Следствие 2.2.4 *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \frac{\sigma y}{\mathscr{L}} + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^2}\right).$$

Из доказанного следствия 2.2.4 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ и $\mu \leq \{\alpha p\} < \nu$, причём $0 \leq \mu < \nu \leq 1$, получим:

Следствие 2.2.5 *При выполнении условий теоремы 2.2 справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x, y, \mu, \nu) = \frac{(\nu - \mu)H}{\mathscr{L}} + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}^2}\right).$$

Глава 1

Суммы коротких тригонометрических сумм с простыми числами

1.1. Вспомогательные леммы

Лемма 1.1. *Пусть H и y произвольные целые числа, $H \geq 1$. Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{x=y+1}^{y+H} e(\alpha x) \leq \min\left(H, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right), \quad \|\alpha\| = \min\left(\{\alpha\}, 1-\{\alpha\}\right).$$

Доказательство см. [17].

Лемма 1.2. *Пусть $f(n)$ — произвольная комплекснозначная функция, $u \leq x$, $r \geq 1$,*

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}, \quad \lambda(n) = \sum_{d\backslash n,\, d\leq u} \mu(n).$$

Тогда имеет место тождество:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)f(n)=$$

$$=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\sum_{m_1\le u}\mu(m_1)\cdots\sum_{\substack{m_k\le u\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\le x}}\mu(m_k)\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_k}\ln n_1 f(m_1n_1\cdots m_km_k)+$$

$$+(-1)^r\sum_{n_1\ge u}\lambda(n_1)\cdots\sum_{\substack{n_r\ge u\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_k\le x}}\lambda(n_r)\sum_{m}\Lambda(m)f(n_1\cdots n_r m).$$

Доказательство см. [44].

Лемма 1.3. . *При $x\ge 2$ имеем*

$$\sum_{n\le x}\tau_r^k(n)\ll x\,(\ln x)^{r^k-1}, \qquad k=1,2.$$

Доказательство см. [48].

Лемма 1.4. *При вещественном α, подчинённом условиям*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad 1\le q\le N,\quad |\theta|\le 1,$$

а) для суммы

$$V_g=\sum_{z=g}^{g+q'}\min\left(U,\frac{1}{\|\alpha z\|}\right),\qquad q'<q,\qquad U>0,$$

имеем неравенство

$$V_g\ll U+q\ln q,$$

б) а для суммы

$$V=\sum_{0<z\le 0{,}5q}\frac{1}{\|\alpha z\|}$$

имеем неравенство

$$V\ll q\ln q.$$

Доказательство см. [17], стр. 61.

Лемма 1.5. *Пусть $y \geq x^{0.534}$, тогда справедлива оценка*

$$\frac{y}{\ln x} \ll \pi(x) - \pi(x-y) \ll \frac{y}{\ln x}.$$

Доказательство см. [42].

Лемма 1.6. *При $y \geq x^{0.534}$ справедливо соотношение*

$$\sum_{x-y<p\leq x} e(\alpha kp) - \frac{1}{\ln x} \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n) e(\alpha kn) \ll \frac{y^2}{x \ln^2 x}.$$

Доказательство. Воспользовавшись условием $x - y < p \leq x$, получим

$$\frac{\ln p}{\ln x} = 1 + \frac{\ln \frac{p}{x}}{\ln x} = 1 + r_p(x), \qquad r_p(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{p-x}{x}\right)}{\ln x}.$$

При $|u| \leq 0,5$, пользуясь соотношением

$$\ln(1+u) \ll |u|,$$

найдём

$$r_p(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{p-x}{x}\right)}{\ln x} \ll \frac{x-p}{x \ln x} < \frac{y}{x \ln x}.$$

Воспользовавшись этой формулой, найдём

$$\sum_{x-y<p\le x} e(\alpha kp) = \sum_{x-y<p\le x}\left(\frac{\ln p}{\ln x} - r_p(n)\right)\, e(\alpha kp) =$$

$$= \frac{1}{\ln x}\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)e(\alpha kn) - R(x,y),$$

$$R(x,y) = \frac{1}{\ln x}\sum_{\substack{x-y<p^r\le x\\ r\ge 2}}\ln p\; e(\alpha kp^r) + \sum_{x-y<p\le x} r_p(n)\; e(\alpha kp) \ll$$

$$\ll \sum_{\substack{x-y<p^r\le x\\ r\ge 2}} 1 + \frac{y}{x\ln x}\sum_{x-y<p\le x} 1 \ll$$

$$\ll \sum_{2\le r\ll \ln x}\ \sum_{\sqrt[r]{x-y}<p\le\sqrt[r]{x}} 1 + \frac{(\pi(x)-\pi(x-y))y}{x\ln x}.$$

Пользуясь неравенством

$$\sqrt[r]{x} - \sqrt[r]{x-y} = x^{\frac{1}{r}}\left(1-\left(1-\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{r}}\right) = x^{\frac{1}{r}}\left(1-\left(1+O\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right) \ll$$

$$\ll \frac{y}{x^{1-\frac{1}{r}}} \ll \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

и при $y \ge x^{0.534}$ леммой 1.5, получим

$$R(x,y) \ll \frac{y\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{y^2}{x\ln^2 x} \ll \frac{y^2}{x\ln^2 x}.$$

Лемма доказана.

1.2. Оценка сумм коротких двойных тригонометрических сумм

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одной из проблем является распределение дробных частей $\{\alpha p\}$, в которой он [17, 19] получил намного более точную оценку тригонометрической суммы, чем в общем случае распределения дробных частей $\{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p\}$

и её основу составляют нетривиальные оценки тригонометрических сумм вида

$$W(x) = \sum_{k \le K} \left| \sum_{F_1 < m \le F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \le G_2 \\ mn \le x}} b(n) e(\alpha kmn) \right|,$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, x – вещественное число, $x > x_0 > 0$, K, F, G – натуральные,

$$F \le F_1 < F_2 \le 2F, \quad G \le G_1 < G_2 \le 2G,$$

α – действительное число,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q < x.$$

Этот параграф посвящен изучению коротких тригонометрических сумм вида

$$W(x, y) = \sum_{k \le K} \left| \sum_{F_1 < m \le F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \le G_2 \\ x - y < mn \le x}} b(n) e(\alpha kmn) \right|,$$

которые из $W(x)$ получаются заменой условия $mn \le x$ на условие $x - y < mn \le x$, где $\sqrt{x} < y \le x\mathscr{L}^{-1}$, $\mathscr{L} = \ln xq$.

Более конкретно в этом параграфе получены оценки сумм $W(x, y)$, в которых имеется

- *«длинная»* сплошная сумма (теорема 1.1);
- суммы, составляющие двойную сумму *«близкие»* по порядку (теорема 1.2).

Теорема 1.1. *Пусть в сумме* $W(x,y)$ *выполняются условия:* $F \le y$, $K \le y$, $1 < q \le Ky$,

$$\sum_{t \le 2KF} \left(\sum_{\substack{t=mk,\, 1\le k\le K \\ F<m\le 2F}} |a(m)| \right)^2 \ll KF\mathscr{L}^{c_a}, \tag{1.2.1}$$

c_a *– абсолютная постоянная. Тогда, при* $b(n)=1$, *справедлива оценка*

$$W(x,y) \ll \begin{cases} Ky\left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{F}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}}, & \text{если } q < 4KF; \\[2ex] Ky\cdot\sqrt{\dfrac{q}{Ky}}\,\mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}}, & \text{если } q \ge 4KF. \end{cases}$$

Доказательство. При $F_1G_1 \ge x$ или $F_2G_2 < x-y$ сумма $W(x,y)$ пустая, поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $F_1G_1 < x$ и $F_2G_2 \ge x-y$, также не ограничивая общности, будем также считать $y < x\mathscr{L}^{-1}$. Имеем

$$W(x,y) = \sum_{k\le K} |W(k)|,$$

$$W(k) = \sum_{F_1<m\le F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1<n\le G_2 \\ x-y<mn\le x}} e(\alpha kmn) = \sum_{F_1<m\le F_2} a(m) \sum_{G'<n\le G''} e(\alpha kmn),$$

где

$$G' = \max\left(G_1,\ \frac{x-y}{m}\right), \quad G'' = \min\left(G_2,\ \frac{x}{m}\right).$$

Переходя к оценкам, и применяя к внутренней сумме лемму 1.1 об оценке линейной тригонометрической суммы, найдём

$$|W(k)| \le \sum_{F_1<m\le F_2} |a(m)| \left| \sum_{G'<n\le G''} e(\alpha kmn) \right| \le$$
$$\le \sum_{F<m\le 2F} |a(m)| \min\left(G''-G',\ \frac{1}{2\|\alpha km\|}\right).$$

Суммируя обе части последнего неравенства по k, $1 \le k \le K$, воспользовавшись неравенством

$$G'' - G' = \min\left(G_2,\ \frac{x}{m}\right) - \max\left(G_1,\ \frac{x-y}{m}\right) \le \frac{x}{m} - \frac{x-y}{m} = \frac{y}{m} \le \frac{y}{F},$$

имеем

$$W(x,y) \le \sum_{k=1}^{K} \sum_{F<m\le 2F} |a(m)| \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha k m\|}\right) =$$
$$= \sum_{F<t\le 2KF} \eta(t)\ \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha t\|}\right),$$

где

$$\eta(t) = \sum_{\substack{t=mk,\,1\le k\le K\\ F<m\le 2F}} |a(m)|.$$

Возводя обе части последнего неравенство в квадрат, применяя неравенство Коши, затем соотношение (1.2.1), последовательно найдём

$$W^2(x,y) \le \left(\sum_{F<t\le 2KF} \eta(t)\ \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha t\|}\right)\right)^2 \le$$
$$\le \sum_{t\le 2KF} \eta^2(m) \sum_{t\le 2KF} \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha t\|}\right)^2 \ll$$
$$\ll KF\mathscr{L}^{c_a} \cdot \frac{y}{F} \sum_{t\le 2KF} \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha t\|}\right) \ll$$
$$\ll Ky\mathscr{L}^{c_a} \sum_{t\le 2KF} \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha t\|}\right).$$

Рассмотрим отдельно случаи $2KF > 0,5q$ и $2KF \le 0,5q$.

При $2KF > 0.5q$, разбивая интервал изменения t на не более

$$\frac{2KF}{q} + 1 \le \frac{2KF}{q} + 4\cdot\frac{KF}{q} = \frac{6KF}{q} \ll \frac{KF}{q}$$

интервалов вида $g \le t \le g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 1.4, найдём

$$W^2(x,y) \ll Ky\mathscr{L}^{c_a} \cdot \frac{KF}{q} \sum_{t=g}^{g+q'} \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha t\|}\right) =$$

$$= \frac{K^2Fy}{q}\mathscr{L}^{c_a} \sum_{t=g}^{g+q'} \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha t\|}\right) \ll$$

$$\ll \frac{K^2Fy}{q}\left(\frac{y}{F} + q\ln q\right)\mathscr{L}^{c_a} \ll K^2y^2\left(\frac{1}{q} + \frac{F}{y}\right)\mathscr{L}^{c_a+1}.$$

Следовательно при $2KF > 0.5q$, имеем

$$W(x,y) \ll Ky\left(\frac{1}{q} + \frac{F}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}}.$$

При $2KF \le 0.5q$, воспользовавшись утверждением б) леммы 1.4, получим

$$W^2(x,y) \ll Ky\mathscr{L}^{c_a} \sum_{t \le 0,5q} \frac{1}{\|\alpha t\|} \ll Ky\mathscr{L}^{a} \cdot q\mathscr{L} = Kyq\mathscr{L}^{c_a+1}.$$

Следовательно, при $2KF \le 0.5q$, имеем

$$W(x,y) \ll Ky \cdot \sqrt{\frac{q}{Ky}}\,\mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1.1. *Пусть A – абсолютная постоянная, тогда, при $\mathscr{L}^{2A+c_a+1} \le q \le Ky\mathscr{L}^{-2A-c_a-1}$ и $y \ge F\mathscr{L}^{2A+c_a+1}$, справедлива оценка*

$$W(x,y) = \sum_{k \le K}\left|\sum_{F_1 < m \le F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \le G_2 \\ x-y < mn \le x}} e(\alpha kmn)\right| \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство. При $\mathscr{L}^{2A+c_a+1} \ll q < 4KF$ и $y \geq F\mathscr{L}^{2A+c_a+1}$, воспользовавшись первым утверждением теоремы 1.1, получим

$$\begin{aligned}W(x,y) &\ll Ky\left(\frac{1}{q}+\frac{F}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}} \ll \\ &\ll Ky\left(\frac{1}{\mathscr{L}^{2A+c_a+1}}+\frac{F}{F\mathscr{L}^{2A+c_a+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}} \ll \\ &\ll Ky\left(\frac{2F}{F\mathscr{L}^{2A}\cdot\mathscr{L}^{c_a+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}} \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^{A}}.\end{aligned}$$

А при $q \geq 4KF$, воспользовавшись вторым утверждением теоремы 1.1, найдём

$$W(x,y) \ll Ky\cdot\sqrt{\frac{q}{Ky}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}} \ll Ky\cdot\sqrt{\frac{Ky\mathscr{L}^{-2A-c_a-1}}{Ky}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+1}{2}} \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^{A}}.$$

Теорема 1.2. *Пусть в сумме $W(x,y)$ выполняются условия: $F \leq y$, $G \leq y$, $K \leq y$, $1 < q \leq Ky^2x^{-1}$,*

$$\sum_{F_1<m\leq F_2}|a(m+m_1^*)|^2 \ll F\mathscr{L}^{c_a}, \qquad \sum_{G_1<n\leq G_2}|b(n)|^2 \ll G\mathscr{L}^{c_b}, \tag{1.2.2}$$

c_a и c_b – абсолютные постоянные, $m_1^* = 0$ или $F < m_1^* \leq 2F$. Тогда справедлива оценка

$$W(x,y) \ll \begin{cases} Ky\left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{F}{y}+\dfrac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}, & \text{если } q < \dfrac{2Ky}{G}; \\[2ex] Ky\left(\dfrac{qx}{Ky^2}+\dfrac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}, & \text{если } q \geq \dfrac{2Ky}{G}. \end{cases}$$

Доказательство. При $F_1G_1 \geq x$ или $F_2G_2 < x-y$ сумма $W(x,y)$ пустая, поэтому не ограничивая общности, будем считать, что $F_1G_1 < x$ и $F_2G_2 \geq x-y$. Отсюда и из условий $F \leq y$, $G \leq y$ следует, что $x-y \leq 4FG < 4y^2$, то есть $y \gg \sqrt{x}$. Не ограничивая общности, будем также считать

$y < x\mathscr{L}^{-1}$. Возводя $W(x,y)$ в квадрат, и пользуясь неравенством Коши, найдём

$$W^2(x,y) = \left(\sum_{k\le K} |W(k)|\right)^2 \le K \sum_{k\le K} |W(k)|^2, \tag{1.2.3}$$

где

$$|W(k)|^2 = \left| \sum_{G_1<n\le G_2} b(n) \sum_{\substack{F_1<m\le F_2 \\ x-y<mn\le x}} a(m)e(\alpha kmn) \right|^2 \le$$

$$\le \sum_{G_1<n\le G_2} |b(n)|^2 \sum_{G_1<n\le G_2} \left| \sum_{\substack{F_1<m\le F_2 \\ x-y<mn\le x}} a(m)e(\alpha kmn) \right|^2.$$

Воспользовавшись условием (1.2.2), находим

$$|W(k)|^2 \ll G\mathscr{L}^{c_b} \sum_{G_1<n\le G_2} \left| \sum_{\substack{F_1<m\le F_2 \\ x-y<mn\le x}} a(m)e(\alpha kmn) \right|^2 =$$

$$= G\mathscr{L}^{c_b} \sum_{G_1<n\le G_2} \sum_{\substack{F_1<m_1\le F_2 \\ x-y<m_1 n\le x}} a(m_1) \sum_{\substack{F_1<m_2\le F_2 \\ x-y<m_2 n\le x}} \overline{a(m_2)} e(\alpha k(m_1-m_2)n).$$

Разбивая сумму по m_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $m_2 < m_1$, $m_1 = m_2$ и $m_2 > m_1$, имеем

$$|W(k)|^2 \ll G\mathscr{L}^{c_b}(W_1(k) + W_2(k) + W_3(k)), \tag{1.2.4}$$

где

$$W_1(k) = \sum_{G_1<n\le G_2} \sum_{\substack{F_1<m_1\le F_2 \\ x-y<m_1 n\le x}} a(m_1) \sum_{\substack{F_1<m_2<m_1 \\ x-y<m_2 n\le x}} \overline{a(m_2)} e(\alpha k(m_1-m_2)n),$$

$$W_2(k) = \sum_{G_1<n\le G_2} \sum_{\substack{F_1<m_1\le F_2 \\ x-y<m_1 n\le x}} |a(m_1)|^2,$$

$$W_3(k) = \sum_{G_1<n\le G_2} \sum_{\substack{F_1<m_1\le F_2 \\ x-y<m_1 n\le x}} a(m_1) \sum_{\substack{m_1<m_2\le F_2 \\ x-y<m_2 n\le x}} \overline{a(m_2)} e(\alpha k(m_1-m_2)n).$$

Воспользовавшись условием (1.2.2), оценим сумму $W_2(k)$:

$$W_2(k) = \sum_{F_1 < m_1 \le F_2} |a(m_1)|^2 \sum_{\substack{G_1 < n \le G_2 \\ x-y < m_1 n \le x}} 1 \le \sum_{F_1 < m_1 \le F_2} |a(m_1)|^2 \left(\frac{y}{m_1} + 1\right) \le$$

$$\le \left(\frac{y}{F} + 1\right) \sum_{F_1 < m_1 \le F_2} |a(m_1)|^2 \ll \left(\frac{y}{F} + 1\right) F\mathscr{L}^{c_a} \ll y\mathscr{L}^{c_a}. \qquad (1.2.5)$$

Суммы $W_1(k)$ и $W_3(k)$ оцениваются одинаково. Сделав в $W_3(k)$ суммирование по n внутренним, имеем

$$W_3(k) = \sum_{F_1 < m_1 \le F_2} a(m_1) \sum_{m_1 < m_2 \le F_2} \overline{a(m_2)} \sum_{\substack{G_1 < n \le G_2 \\ x-y < m_1 n, m_2 n \le x}} e(\alpha k(m_1 - m_2)n) =$$

$$= \sum_{F_1 < m_1 \le F_2} a(m_1) \sum_{0 < m_2 - m_1 \le F_2 - m_1} \overline{a(m_2)} \sum_{\substack{G_1 < n \le G_2 \\ x-y < m_1 n, m_2 n \le x}} e(\alpha k(m_1 - m_2)n).$$

В сумме по m_2, полагая $m_2 = m_1 + m$, сделаем замену переменных и при этом, имея в виду, что

$$m = m_2 - m_1 = \frac{m_2 n - m_1 n}{n} \le \frac{x - (x-y)}{n} = \frac{y}{n} < \frac{y}{G},$$

найдём

$$W_3(k) = \sum_{F_1 < m_1 \le F_2} a(m_1) \sum_{0 < m \le \min(F_2 - m_1, yG^{-1})} \overline{a(m_1 + m)} \sum_{G' < n \le G''} e(-\alpha kmn),$$

где

$$G' = \max\left(G_1, \ \frac{x-y}{m_1}\right), \qquad G'' = \min\left(G_2, \ \frac{x}{m_1 + m}\right).$$

Переходя в сумме $W_3(k)$ к оценкам, а затем воспользовавшись леммой 1.1, имеем

$$W_3(k) \le \sum_{F_1 < m_1 \le F_2} |a(m_1)| \sum_{0 < m \le \min(F_2 - m_1, yG^{-1})} |a(m_1 + m)| \left| \sum_{G' < n \le G''} e(\alpha kmn) \right| \le$$

$$\le \sum_{F_1 < m_1 \le F_2} |a(m_1)| \sum_{0 < m \le \min(F_2 - m_1, yG^{-1})} |a(m_1 + m)| \min\left(G'' - G', \ \frac{1}{2\|\alpha km\|}\right).$$

Из условия $m > 0$ находим

$$G''-G' = \min\left(G_2,\ \frac{x}{m_1+m}\right) - \max\left(G_1,\ \frac{x-y}{m_1}\right) \le$$
$$\le \frac{x}{m_1+m} - \frac{x-y}{m_1} \le \frac{x}{m_1} - \frac{x-y}{m_1} = \frac{y}{m_1} \le \frac{y}{F}.$$

Поэтому

$$W_3(k) \le \sum_{F_1<m_1\le F_2} |a(m_1)| \sum_{0<m\le \min(F_2-m_1,\, yG^{-1})} |a(m_1+m)| \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha k m\|}\right) \le$$
$$\le \sum_{0<m\le yG^{-1}} \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha k m\|}\right) \sum_{F_1<m_1\le F_2} |a(m_1)||a(m_1+m)|.$$

Обозначая через m^*, $0 < m^* \le yG^{-1}$, такое m, при котором сумма по m_1 максимальная, имеем

$$W_3(k) \le \sum_{F_1<m_1\le F_2} |a(m_1)||a(m_1+m^*)| \cdot V(k),$$

где

$$V(k) = \sum_{0<m\le yG^{-1}} \min\left(\frac{y}{F},\ \frac{1}{2\|\alpha k m\|}\right).$$

Воспользовавшись неравенством Коши и условием (1.2.2), имеем

$$W_3(k) \ll \left(\sum_{F_1<m_1\le F_2} |a(m_1)|^2 \sum_{F_1<m_1\le F_2} |a(m_1+m^*)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot V(k) \ll F\mathscr{L}^{c_a} \cdot V(k).$$

Подставляя эту оценку и оценку (1.2.5) в (1.2.4), найдём

$$|W(k)|^2 \ll G\mathscr{L}^{c_b}\left(W_1(k) + W_2(k) + W_3(k)\right) \ll$$
$$\ll G\mathscr{L}^{c_b}\left(F\mathscr{L}^{c_a}\, V(k) + y\mathscr{L}^{c_a}\right) = G\left(FV(k) + y\right)\mathscr{L}^{c_a+c_b}.$$

Отсюда, с учётом неравенства (1.2.3), найдём

$$W^2(x,y) \le K\sum_{k\le K} |W(k)|^2 \ll K\sum_{k\le K} G\left(FV(k)+y\right)\mathscr{L}^{c_a+c_b} =$$
$$= KG\left(FV + Ky\right)\mathscr{L}^{c_a+c_b}, \qquad V = \sum_{k\le K} V(k). \qquad (1.2.6)$$

Сумму V представим в виде

$$V = \sum_{k \le K} \sum_{0 < m \le yG^{-1}} \min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha km\|}\right) = \sum_{r \le KyG^{-1}} \tau'(r) \min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha r\|}\right),$$

где

$$\tau'(r) = \sum_{\substack{r=km,\\ k\le K,\, m\le yG^{-1}}} 1 \le \tau(r).$$

Возводя обе части суммы V в квадрат, и применяя неравенство Коши, затем лемму 1.3, последовательно находим

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(\sum_{r \le KyG^{-1}} \tau'(r) \min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha r\|}\right)\right)^2 \le \\ &\le \sum_{r \le KyG^{-1}} \tau^2(r) \sum_{r \le KyG^{-1}} \min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha r\|}\right)^2 \ll \\ &\ll \frac{Ky\mathscr{L}^3}{G} \cdot \frac{y}{F} \sum_{r \le KyG^{-1}} \min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha r\|}\right) = \\ &= \frac{Ky^2\mathscr{L}^3}{FG} \sum_{r \le KyG^{-1}} \min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha r\|}\right). \end{aligned}$$

Возможны следующие случаи длины суммирования по r: ***i)*** $KyG^{-1} > 0.5q$; ***ii)*** $KyG^{-1} \le 0.5q$.

Случай ***i)*** $KyG^{-1} > 0,5q$; Имеем

$$V^2 \ll \frac{Ky^2}{FG}\mathscr{L}^3 \sum_{r \le KyG^{-1}} \min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha r\|}\right).$$

Разбивая интервал изменения r на не более

$$\frac{KyG^{-1}}{q} + 1 = \frac{KyG^{-1}}{q} + \frac{q}{q} < \frac{KyG^{-1}}{q} + \frac{2KyG^{-1}}{q} \ll \frac{Ky}{qG}$$

интервалов вида $g \le r \le g+q'$, $q' < q$, получим

$$V^2 \ll \frac{Ky^2}{FG}\mathscr{L}^3 \cdot \frac{Ky}{qG}\sum_{r=g}^{g+q'}\min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha r\|}\right) \ll$$
$$\ll \frac{K^2y^3\mathscr{L}^3}{qFG^2}\ \sum_{r=g}^{g+q'}\min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha r\|}\right).$$

Применяя к сумме по r утверждение а) леммы 1.4, находим

$$V^2 \ll \frac{K^2y^3\mathscr{L}^3}{qFG^2}\left(\frac{y}{F} + q\ln q\right) \ll \frac{K^2y^4}{F^2G^2}\left(\frac{1}{q} + \frac{F}{y}\right)\mathscr{L}^4.$$

Отсюда и из квадрата неравенства (1.2.6), найдём

$$W^4(x,y) \le K^2G^2\left(F^2 \cdot V^2 + K^2y^2\right)\mathscr{L}^{2c_a+2c_b} \ll$$
$$\ll K^2G^2\left(F^2 \cdot \frac{K^2y^4}{F^2G^2}\left(\frac{1}{q} + \frac{F}{y}\right)\mathscr{L}^4 + K^2y^2\right)\mathscr{L}^{2c_a+2c_b} =$$
$$= K^4y^4\left(\frac{1}{q} + \frac{F}{y} + \frac{G^2\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)\mathscr{L}^{2c_a+2c_b+4}.$$

Далее воспользовавшись соотношением $FG \asymp x$, получим

$$W^4(x,y) \ll K^4y^4\left(\frac{1}{q} + \frac{F}{y} + \frac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)\mathscr{L}^{2c_a+2c_b+4}.$$

Следовательно

$$W(x,y) \ll Ky\left(\frac{1}{q} + \frac{F}{y} + \frac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}.$$

Случай ***ii)*** $KyG^{-1} \le 0.5q$. Воспользовавшись утверждением б) леммы 1.4, получим

$$V^2 \ll \frac{Ky^2}{FG}\mathscr{L}^3\sum_{r \le KyG^{-1}}\min\left(\frac{y}{F}, \frac{1}{2\|\alpha r\|}\right) \ll$$
$$\ll \frac{Ky^2\mathscr{L}^3}{FG}\sum_{r \le 0{,}5q}\frac{1}{\|\alpha r\|} \ll \frac{Ky^2}{FG}\mathscr{L}^3 \cdot q\ln q \le \frac{Ky^2q}{FG}\mathscr{L}^4.$$

Отсюда и из квадрата неравенства (1.2.6) с учётом соотношения $FG \asymp x$, найдём

$$\begin{aligned}W^4(x,y) &\le K^2G^2\left(F^2\cdot V^2 + K^2y^2\right)\mathscr{L}^{2c_a+2c_b} \ll \\ &\ll K^2G^2\left(F^2\frac{Ky^2q}{FG}\mathscr{L}^4 + K^2y^2\right)\mathscr{L}^{2c_a+2c_b} = \\ &= K^4y^4\left(\frac{qFG}{Ky^2} + \frac{G^2\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)\mathscr{L}^{2c_a+2c_b+4} \ll \\ &\ll K^4y^4\left(\frac{qx}{Ky^2} + \frac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)\mathscr{L}^{2c_a+2c_b+4}.\end{aligned}$$

Следовательно

$$W(x,y) \ll Ky\left(\frac{qx}{Ky^2} + \frac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1}.$$

Следствие 1.2.1. *Пусть A – абсолютная постоянная тогда, при выполнении одного из следующих условий:*

i. $y \ge \max(F\mathscr{L}^{4A+2c_a+2c_b+4}, xF^{-1}\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b})$ *и* $\mathscr{L}^{2c_a+2c_b+4A+4} \le q < 2KyG^{-1}$*;*

ii. $y \ge xF^{-1}\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b}$ *и* $2KyG^{-1} \le q \le Ky^2x^{-1}\mathscr{L}^{-2c_a-2c_b-4A-4}$,

справедлива оценка

$$W(x,y) \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство. При выполнении неравенств условия ***i,*** воспользовавшись первым утверждением теоремы 1.2, получим

$$\begin{aligned}W(x,y) &\ll Ky\left(\frac{1}{q} + \frac{F}{y} + \frac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1} \ll \\ &\ll Ky\left(\frac{1}{\mathscr{L}^{4A+2c_a+2c_b+4}} + \frac{F}{F\mathscr{L}^{4A+2c_a+2c_b+4}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{(xF^{-1}\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b})^2}\right)^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1} \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.\end{aligned}$$

А при выполнении неравенств условия ***ii,*** воспользовавшись вторым утверждением теоремы 1.2, найдём

$$W(x,y) \ll Ky\left(\frac{qx}{Ky^2}+\frac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{y^2}\right)^{\frac14}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1} \ll$$

$$\ll Ky\left(\frac{Ky^2x^{-1}\mathscr{L}^{-2c_a-2c_b-4A-4}\cdot x}{Ky^2}+\frac{x^2F^{-2}\mathscr{L}^{-4}}{(xF^{-1}\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b})^2}\right)^{\frac14}\mathscr{L}^{\frac{c_a+c_b}{2}+1} \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^A}.$$

1.3. Оценка сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами

И.М. Виноградов создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами основу которого составляют метод сглаживания двойных сумм, теорема о среднем для сумм Г. Вейля, решето Виноградова и решил проблему распределения дробных частей многочлена $f(p)=\alpha_np^n+\ldots+\alpha_1p$ при условии, что p принимает значения последовательных простых чисел, не превосходящих P [18]. В проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$ он [19, 17] получил намного более точную оценку тригонометрической суммы, чем в общем случае распределения дробных частей $\{\alpha_np^n+\ldots+\alpha_1p\}$. Он доказал:

Теорема 1.3. (Виноградов И.М.) *Пусть K — целое, $K\le N$, α – вещественное,*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad 1\le q\le N,$$

тогда будем иметь

$$V_K(N)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{p\le N}e(\alpha kp)\right| \ll KN^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac1q+\frac{q}{N}}+N^{-0,2}\right).$$

Отсюда следует утверждение:

Следствие 1.3.1. (Виноградов И.М.) *При любом σ с условием $0 < \sigma \leq 1$ число $A_\sigma(x)$ значений $\{\alpha p\}$, $p \leq x$ подчиненных условию $\{\alpha p\} < \sigma$, выразится формулой*

$$A_\sigma(x) = \sigma\pi(x) + R_\sigma(x), \quad R_\sigma(x) \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-0,2}\right).$$

В частности, если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, то можно выбрать q таким, чтобы оно было порядка $\sqrt{x}$. В этом случае для $F_\alpha(x, y, \sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, имея в виду, что

$$F_\alpha(x, y, \sigma) = A_\sigma(x) - A_\sigma(x - y),$$

справедливо утверждение:

Следствие 1.3.2. (Виноградов И.М.) *Пусть α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, тогда при любом σ с условием $0 < \sigma \leq 1$, справедлива асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x, y, \sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x - y)) + O\left(x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}\right). \tag{1.3.1}$$

Таким образом из теоремы 1.3 И.М. Виноградова следует асимптотическая формула в законе о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x - y,\, x]$, являющаяся нетривиальной при

$$y \gg x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}.$$

Для величин y, порядок которых меньше порядка $x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$, и произвольных α вопрос распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x - y,\, x]$, оставался открытым.

Вместе с «решетом Виноградова» основу доказательства теоремы 1.3 составляют нетривиальные оценки тригонометрических сумм вида

$$W(x)=\sum_{k\le K}\left|\sum_{F_1<m\le F_2}a(m)\sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ mn\le x}}b(n)e(\alpha kmn)\right|,$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, K, F, G – натуральные, $F\le F_1<F_2\le 2F$, $G\le G_1<G_2\le 2G$.

Полученные в предыдущем параграфе 1.2 оценки коротких тригонометрических сумм вида

$$W(x,y)=\sum_{k\le K}\left|\sum_{F_1<m\le F_2}a(m)\sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ x-y<mn\le x}}b(n)e(\alpha kmn)\right|,\quad y\le\frac{x}{\ln x},$$

которые из $W(x)$ получаются заменой условия $mn\le x$ на условие $x-y<mn\le x$, в сочетании с методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова и методами работ [43, 44, 45] позволили доказать:

Теорема 1.4. *Пусть K, H, N и q – натуральные числа, $K\le H$, A – абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln Nq$, α –вещественное и*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\le q\le\frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда, при $H\gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива оценка

$$S_K(N,H)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<n\le N}\Lambda(n)e(\alpha kn)\right|\ll\frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство. Имеем

$$S=S_K(N,H)=\sum_{k=1}^{K}|S(k)|,\quad S(k)=\sum_{N-H<n\le N}\Lambda(n)e(\alpha kn).\qquad(1.3.2)$$

К сумме $S(k)$, применяя лемму 1.2, при $r=2$, $u=N^{\frac{1}{2}}$ и $f(m)=e(\alpha km)$, находим

$$S(k)=-2S_1(k)+S_2(k), \tag{1.3.3}$$

$$S_1(k)=\sum_{m\le u_1}\mu(m)\sum_{N-H<mn\le N}\ln n\, e(\alpha kmn),$$

$$S_2(k)=\sum_{m_1\le u_1}\mu(m_1)\sum_{m_2\le u_1}\mu(m_2)\sum_{n_1}\sum_{N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}\ln n_1\, e(\alpha km_1m_2n_1n_2).$$

Разобьем в $S_1(k)$ и $S_2(k)$ области изменения каждого m_1, m_2, n_1 и n_2 на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $M_j<m_j\le 2M_j$, $N_j<n_j\le 2N_j$, $j=1,2$. В случае S_1 получим не более $\mathscr{L}^2$ сумм вида

$$\bar{S}_1(k,\bar{M},\bar{N})=\sum_{M_1<m\le 2M_1}\mu(m)\sum_{\substack{N_1<n\le 2N_1\\ N-H<mn\le N}}\ln ne(\alpha kmn),$$

а в случае S_2 получим не более $\mathscr{L}^4$ сумм вида

$$\bar{S}_2(k,\bar{M},\bar{N})=\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\le 2M_2}\mu(m_2)\sum_{N_1<n_1\le 2N_1}\ln n_1\sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2\\ N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}}e(\alpha km_1m_2n_1n_2)=$$

$$=\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\le 2M_2}\mu(m_2)\sum_{N_1<n_1\le 2N_1}\int_1^{n_1}\frac{du}{u}\sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2\\ N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}}e(\alpha km_1m_2n_1n_2)=$$

$$=\int_1^{2N_1}\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\le 2M_2}\mu(m_2)\sum_{\max(u,N_1)<n_1\le 2N_1}\sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2\\ N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}}e(\alpha km_1m_2n_1n_2)d\ln u.$$

Через $U_1=\max(u,N_1)$, $u\le 2N_1$ обозначим такое число u, при котором модуль подинтегральной функции принимает максимальное значение, тогда

$$|\bar{S}_2(k,\bar{M},\bar{N})|\ll\mathscr{L}\left|S_2(k,\bar{M},\bar{N})\right|,\qquad N_j\le U_j<2N_j,\qquad j=1,2 \tag{1.3.4}$$

$$S_2(k,\bar{M},\bar{N})=\sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\le 2M_2}\mu(m_2)\sum_{U_1<n_1\le 2N_1}\sum_{\substack{U_2<n_2\le 2N_2\\ N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}}e(\alpha km_1m_2n_1n_2).$$

Аналогично покажем, что

$$|\bar{S}_1(k,\bar{M},\bar{N})| \ll \mathscr{L}\left|S_1(k,\bar{M},\bar{N})\right|,$$

$$S_1(k,\bar{M},\bar{N}) = \sum_{M_1<m\le 2M_1}\mu(m)\sum_{\substack{U_1<n\le 2N_1\\ N-H<mn\le N}} e(\alpha kmn).$$

Отсюда, из (1.3.4), (1.3.3) и (1.3.2), получим

$$S = \sum_{k=1}^{K}|-2S_1(k)+S_2(k)| \ll$$

$$\ll \sum_{k=1}^{K}\left(\mathscr{L}^2|\bar{S}_1(k,\bar{M},\bar{N})| + \mathscr{L}^4|\bar{S}_2(k,\bar{M},\bar{N})|\right) \ll$$

$$\ll \sum_{k=1}^{K}\left(\mathscr{L}^3|S_1(k,\bar{M},\bar{N})| + \mathscr{L}^5|S_2(k,\bar{M},\bar{N})|\right) \ll$$

$$\ll \mathscr{L}^5\left(S_1+S_2\right), \qquad S_l = \sum_{k=1}^{K}|S_l(k,\bar{M},\bar{N})|, \qquad l=1,2. \tag{1.3.5}$$

Вводим следующие обозначения:

$$\prod_{j=1}^{l} M_jN_j = Y, \qquad \prod_{j=1}^{l} M_jU_j = X, \quad Y<X, \quad M_j\le N^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.6}$$

При $2^{2l}Y\le N-H$ или $Y>N$ сумма $S_l(k,\bar{M},\bar{N})$ пустая, поэтому не ограничивая общности будем считать, что $Y<N$ и $2^{2l}Y\ge N-H$, то есть

$$\frac{N}{2^{2l+1}}\le Y<N. \tag{1.3.7}$$

Оценим суммы S_1 и S_2 отдельно и, не ограничивая общности будем считать, что

$$M_1\ge M_2, \qquad N_1\ge N_2. \tag{1.3.8}$$

Оценка S_1. Имеем

$$S_1 = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{M_1<m\le 2M_1}\mu(m)\sum_{\substack{U_1<n\le 2N_1\\ N-H<mn\le N}} e(\alpha kmn)\right|,$$

Сплошное суммирование по n является длинным, поэтому оценим сумму S_1, пользуясь следствием 1.1.1 теоремы 1.1, полагая

$$F_1 = M_1,\ F_2 = 2M_1, \quad G_1 = U_1,\ G_2 = 2N_1, \quad x = N,\ y = H, \quad a(m) = 1,\ c_a = 0.$$

Согласно этому следствию, имея в виду, что $M_1 \le N^{\frac{1}{2}}$, при

$$H \ge N^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{2A+1}, \qquad \mathscr{L}^{2A+1} \le q \le KH\mathscr{L}^{-2A-1} \tag{1.3.9}$$

имеем

$$S_1 \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

Оценка S_2. Рассмотрим следующие возможные значения параметра N_1:

1. $N_1 \ge N^{\frac{1}{3}}$;

2. $N^{\frac{1}{3}}N_2^{-1} \le N_1 < N^{\frac{1}{3}}$;

3. $N_1 < N^{\frac{1}{3}}N_2^{-1}$.

1. $N_1 \ge N^{\frac{1}{3}}$**.** В этом случае в сумме $S_2(k, \bar{M}, \bar{N})$ сплошное суммирование по n_1 является длинным. Представляя сумму $S_2(k, \bar{M}, \bar{N})$ в виде двойной суммы, имеем

$$S_2(k, \bar{M}, \bar{N}) = \sum_{M_1 < m_1 \le 2M_1} \mu(m_1) \sum_{M_2 < m_2 \le 2M_2} \mu(m_2) \sum_{U_1 < n_1 \le 2N_1} \sum_{\substack{U_2 < n_2 \le 2N_2 \\ N-H < m_1m_2n_1n_2 \le N}} e(\alpha k m_1 m_2 n_1 n_2) =$$
$$= \sum_{XU_1^{-1} < m \le 8YN_1^{-1}} a(m) \sum_{\substack{U_1 < n \le 2N_1 \\ N-H < mn \le N}} e(\alpha kmn),$$

где

$$\frac{X}{U_1} = M_1M_2U_2 \ge M_1M_2N_2 = \frac{Y}{N_1},$$

$$
\begin{aligned}
a(m) &= \sum_{\substack{m=m_1m_2n_2\ M_1<m_1\le 2M_1\\ M_2<m_2\le 2M_2,\ N_2<n_2\le 2N_2}} \mu(m_1)\mu(m_2),\\
|a(m)| &\le \sum_{\substack{m=m_1m_2n_2\ M_1<m_1\le 2M_1\\ M_2<m_2\le 2M_2,\ N_2<n_2\le 2N_2}} 1 \le \tau_3(m)
\end{aligned}
\tag{1.3.10}
$$

Разобьем в двойной сумме $S_2(k,\bar{M},\bar{N})$ область изменения m на интервалы вида $F_1 < m \le F_2$, $F \le F_1 < F_2 \le 2F$. Получим не более трёх сумм вида

$$
S_2(k,\bar{M},\bar{N},F) = \sum_{F_1<m\le F_2} a(m) \sum_{\substack{U_1<n\le 2N_1\\ N-H<mn\le N}} e(\alpha kmn),
$$

где

$$
\frac{Y}{N_1} \le \frac{X}{U_1} \le F_1 \le \frac{4Y}{N_1}.
$$

В сумме $S_2(k,\bar{M},\bar{N},F)$, переходя к оценкам и, суммируя по всем k, $1\le k\le K$ с учётом (1.3.5), получим

$$
S_2 \ll \sum_{k=1}^{K} |S_2(k,\bar{M},\bar{N},F)| = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{F_1<m\le F_2} a(m) \sum_{\substack{U_1<n\le 2N_1\\ N-H<mn\le N}} e(\alpha kmn) \right|.
$$

Для оценки этой суммы применим следствие 1.1.1 теоремы 1.1, пологая

$$
G_1 = U_1, \qquad G_2 = 2N_1, \qquad x = N, \qquad y = H,
$$

и проверим выполнение каждого из следующих её условий:

- для функции $a(m)$, пользуясь неравенством (1.3.10) и леммой 1.3, найдём

$$
\sum_{F_1<m\le F_2} |a(m)|^2 \le \sum_{F<m\le 2F} \tau_3^2(m) \ll F\mathscr{L}^7,
$$

то есть $c_a = 7$;

• для параметра F, пользуясь неравенством (1.3.7), найдём

$$F \le F_1 \le \frac{4Y}{N_1} < \frac{4N}{N^{\frac{1}{3}}} = 4N^{\frac{2}{3}}.$$

Следовательно согласно следствию 1.1.1 теоремы 1.1, при

$$H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{2A+8}, \qquad \mathscr{L}^{2A+8} \le q \le \frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-2A-8}, \tag{1.3.11}$$

справедлива оценка

$$S_2 \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

2. $N^{\frac{1}{3}}N_2^{-1} \le N_1 < N^{\frac{1}{3}}$**.** Из соотношений (1.3.8) и условия рассматриваемого случая, найдём

$$N^{\frac{1}{3}} \le N_1N_2 \le N_1^2 < N^{\frac{2}{3}}, \qquad N^{\frac{1}{3}} \le M_1M_2 = \frac{Y}{N_1N_2} \le N^{\frac{2}{3}}. \tag{1.3.12}$$

Представляя сумму $S_2(k,\bar{M},\bar{N})$ в виде двойной суммы, имеем

$$S_2(k,\bar{M},\bar{N}) = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\le 2M_2}\mu(m_2)\sum_{U_1<n_1\le 2N_1}\sum_{\substack{U_2<n_2\le 2N_2\\ N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}} e(\alpha k m_1m_2n_1n_2) =$$

$$= \sum_{M_1M_2<m\le 4M_1M_2} a(m)\sum_{\substack{U_1U_2<n\le 4N_1N_2\\ N-H<mn\le N}} b(n)e(\alpha kmn),$$

где

$$a(m) = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\sum_{\substack{M_2<m_2\le 2M_2\\ m=m_1m_2}}\mu(m_2), \qquad |a(m)| \le \tau(m), \tag{1.3.13}$$

$$b(n) = \sum_{U_1<n_1\le 2N_1}\sum_{\substack{U_2<n_2\le 2N_2\\ n=n_1n_2}} 1, \qquad |b(n)| \le \tau(n). \tag{1.3.14}$$

Разобьем в $S_2(k,\bar{M},\bar{N})$ области изменения m и n соответственно на интервалы вида $F < m \le 2F$ и $G_1 < n \le G_2$. Получим не более четырёх сумм вида

$$S_2(k,\bar{M},\bar{N},F,G)=\sum_{F<m\le 2F}a(m)\sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ N-H<mn\le N}}b(n)e(\alpha kmn),$$

$$M_1M_2\le F\le 2M_1M_2,\qquad N_1N_2\le G\le G_1\le 2N_1N_2. \tag{1.3.15}$$

В сумме $S_2(k,\bar{M},\bar{N},F,G)$, переходя к оценкам и, суммируя по всем k, $1\le k\le K$, с учетом (1.3.5), получим

$$S_2=\sum_{k=1}^{K}|S_2(k,\bar{M},\bar{N},F,G)|=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{F<m\le 2F}a(m)\sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ N-H<mn\le N}}b(n)e(\alpha kmn)\right|.$$

Оценим эту сумму воспользовавшись следствием 1.2.1 теоремы 1.2, при $x=N$ и $y=H$, и проверим выполнение каждого из следующих её условий:

- для функций $a(m)$ и $b(n)$, воспользовавшись неравенствами (1.3.13) и (1.3.14), согласно лемме 1.3, найдём

$$\sum_{F<m\le 2F}|a(m)|^2\le\sum_{F<m\le 2F}\tau^2(m)\ll F\mathscr{L}^3,$$
$$\sum_{G_1<n\le G_2}|b(n)|^2\le\sum_{G<n\le 2G}\tau^2(n)\ll G\mathscr{L}^3,$$

  то есть в следствии 1.2.1 возьмём $c_a=3$ и $c_b=3$;

- из (1.3.15) и (1.3.12) следует неравенство

$$\max\left(F\mathscr{L}^{4A+2c_a+2c_b+4},\frac{N}{F}\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b}\right)\le$$
$$\le\max\left(2M_1M_2\mathscr{L}^{4A+16},\frac{N}{M_1M_2}\mathscr{L}^{2A+6}\right)\le$$
$$\le\max\left(2N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16},\frac{N}{N^{\frac{1}{3}}}\mathscr{L}^{2A+6}\right)=2N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}.$$

Таким образом, согласно следствию 1.2.1 теоремы 1.2, при

$$H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}, \qquad \mathscr{L}^{4A+16} \le q \le KH^2N^{-1}\mathscr{L}^{-4A-16}, \tag{1.3.16}$$

имеем

$$S_2 \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

3. $N_1N_2 \le N_1^2 < N^{\frac{1}{3}}$**.** Из соотношений (1.3.8), (1.3.6), (1.3.7) и условия рассматриваемого случая, найдём

$$M_1 \ge (M_1M_2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Y}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}} \ge \left(\frac{2^{-5}N}{N_1N_2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{2^{-5}N}{N^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{N^{\frac{1}{3}}}{8}. \tag{1.3.17}$$

Представляя сумму $S_2(k,\bar{M},\bar{N})$ в виде двойной суммы, имеем

$$S_2(k,\bar{M},\bar{N}) = \sum_{M_1<m_1\le 2M_1}\mu(m_1)\sum_{M_2<m_2\le 2M_2}\mu(m_2)\sum_{U_1<n_1\le 2N_1}\sum_{\substack{U_2<n_2\le 2N_2\\ N-H<m_1m_2n_1n_2\le N}} e(\alpha k m_1m_2n_1n_2) =$$

$$= \sum_{M_1<m\le 2M_1}\mu(m)\sum_{\substack{XM_1^{-1}<n\le 8YM_1^{-1}\\ N-H<mn\le N}} b(n)e(\alpha kmn),$$

где

$$\frac{X}{M_1} = M_2U_1U_2 \ge M_2N_1N_2 = \frac{Y}{M_1},$$

$$b(n) = \sum_{\substack{n=m_2n_1n_2,\, M_2<m_2\le 2M_2\\ U_1<n_1\le 2N_1,\, U_2<n_2\le 2N_2}} \mu(m_2),$$

$$|b(n)| \le \sum_{\substack{n=m_2n_1n_2,\, M_2<m_2\le 2M_2\\ U_1<n_1\le 2N_1,\, U_2<n_2\le 2N_2}} 1 \le \tau_3(n). \tag{1.3.18}$$

Разобьем в двойной сумме $S_2(k,\bar{M},\bar{N})$ область изменения n на интервалы вида $G_1 < n \le G_2$, $G \le G_1 < G_2 \le 2G$. Получим не более трёх сумм вида

$$S_2(k,\bar{M},\bar{N},G) = \sum_{M_1<m\le 2M_1}\mu(m)\sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ N-H<mn\le N}} b(n)e(\alpha kmn),$$

$$\frac{Y}{M_1} \le \frac{X}{M_1} \le G \le G_1 \le \frac{4Y}{M_1}.$$

В сумме $S_2(k,\bar{M},\bar{N},G)$, переходя к оценкам и, суммируя по всем k, $1\le k\le K$, с учётом (1.3.5), получим

$$S_2\ll\sum_{k=1}^{K}|S_2(k,\bar{M},\bar{N},G)|=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{M_1<m\le 2M_1}\mu(m)\sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ N-H<mn\le N}}b(n)e(\alpha kmn)\right|.$$

Оценим эту сумму воспользовавшись следствием 1.2.1 теоремы 1.2, при $x=N$, $y=H$, $F=M_1$, и проверим выполнение каждого из следующих её условий:

- для функций $\mu(m)$ и $b(n)$, воспользовавшись неравенствами (1.3.18), согласно лемме 1.3, найдём

$$\sum_{M_1<m\le 2M_1}|\mu(m)|^2\le M_1,$$
$$\sum_{G_1<n\le G_2}|b(n)|^2\le\sum_{G<n\le 2G}\tau_3^2(n)\ll G\mathscr{L}^7,$$

  то есть в следствии 1.2.1 возьмём $c_a=0$ и $c_b=7$;

- из (1.3.6) и (1.3.17) следует неравенство

$$\begin{aligned}&\max\left(F\mathscr{L}^{4A+2c_a+2c_b+4},\,\frac{N}{F}\mathscr{L}^{2A+c_a+c_b}\right)=\\&=\max\left(M_1\mathscr{L}^{4A+18},\,\frac{N}{M_1}\mathscr{L}^{2A+7}\right)\le\\&\le\max(N^{\frac12}\mathscr{L}^{4A+18},\,\frac{N}{N^{\frac13}}\mathscr{L}^{2A+7})=N^{\frac23}\mathscr{L}^{2A+7}.\end{aligned}$$

Таким образом согласно следствию 1.2.1 теоремы 1.2, при

$$H\gg N^{\frac23}\mathscr{L}^{2A+7},\qquad \mathscr{L}^{4A+18}\le q\le KH^2N^{-1}\mathscr{L}^{-4A-18},$$

имеем

$$S_2\ll\frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

Отсюда, из (1.3.9), (1.3.11) и (1.3.16) при

$$H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}, \qquad \mathscr{L}^{4A+20} \le q \le KH^2N^{-1}\mathscr{L}^{-4A-20},$$

ввиду (1.3.5) следует утверждение теоремы.

Теорема 1.5. *Пусть* K, H, N *и* q *– натуральные числа,* $K \le H$, A *– абсолютная постоянная,* $\mathscr{L} = \ln Nq$, α *– вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \le q \le \frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда при $H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ *справедлива оценка*

$$V_K(N,H) = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<p\le N} e(\alpha kp)\right| \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^{A+1}}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать, что $H < N\mathscr{L}^{-A+1}$. Применяя к внутренней сумме по p лемму 1.6, находим

$$\begin{aligned} V_K(N,H) &= \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<p\le N} e(\alpha kp)\right| = \\ &= \sum_{k=1}^{K}\left|\frac{1}{\mathscr{L}}\sum_{N-H<n\le N}\Lambda(n)e(\alpha kn) + O\left(\frac{H^2}{N\mathscr{L}^2}\right)\right| = \\ &= \frac{1}{\mathscr{L}}\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<n\le N}\Lambda(n)e(\alpha kn)\right| + O\left(\frac{KH^2}{N\mathscr{L}^2}\right) = \\ &= \frac{S_K(N,H)}{\mathscr{L}} + O\left(\frac{KH^2}{N\mathscr{L}^2}\right). \end{aligned}$$

Далее воспользовавшись теоремой 1.4, имеем

$$V_K(N,H) \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^{A+1}} + \frac{KH^2}{N\mathscr{L}^2} = \frac{KH}{\mathscr{L}^{A+1}}\left(1 + \frac{H}{N\mathscr{L}^{-A+1}}\right) \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^{A+1}}.$$

Теорема доказана.

Глава 2

Распределение дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает значения простых чисел из коротких интервалов

2.1 . Вспомогательные леммы

Лемма 2.1. *Для функции* $\rho(u) = 0,5 - \{u\}$ *и натурального* $M > 1$ *справедлива формула*

$$\rho(u) = \sum_{1 \le |k| \le M} \frac{e(ku)}{2\pi i k} + r_M(u), \quad |r_M(u)| \le \psi_M(u),$$

$$\psi_M(u) = \frac{4}{\sqrt{1 + M^2 \sin^2 \pi u}}.$$

Доказательство см. [49].

Лемма 2.2. *Пусть задано разложение функции*

$$\psi_M(u) = \frac{4}{\sqrt{1 + M^2 \sin^2 \pi u}}$$

в ряд Фурье

$$\psi_M(u) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h e(hu)$$

тогда при $M \geq 1$ и $h \geq 0$ справедлива оценка

$$|c_h| = |c_{-h}| \leq \frac{4 + \ln M}{\pi M} \exp\left(-\frac{h}{M}\right).$$

Доказательство см. [49], с. 603.

Лемма 2.3. *Пусть $y \geq x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\pi(x) - \pi(x-y) = \frac{y}{\ln x} + O\left(\frac{y}{\ln^2 x}\right).$$

Доказательство см. [50].

2.2. Сведения распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала к оценке сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами

Пусть α – вещественное число, $x > x_0 > 1$, $y \geq x^{0.534}$, $0 \leq \sigma \leq 1$. Вводим следующие обозначения и понятия:

- $F_\alpha(x, y, \sigma)$ – *обозначает количество членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x - y < p \leq x$ *и* $\{\alpha p\} < \sigma$;
- $F_\alpha(x, y, \mu, \nu)$ – *обозначает количество членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x - y < p \leq x$ *и* $\mu \leq \{\alpha p\} < \nu$, *причём* $0 \leq \mu < \nu \leq 1$, *то есть*

$$F_\alpha(x, y, \mu, \nu) = F_\alpha(x, y, \nu) - F_\alpha(x, y, \mu);$$

- *величина*

$$D(x, y) = \sup_{0 \leq \mu < \nu \leq 1} \left| \frac{F(x, y, \mu, \nu)}{y} - (\mu - \nu) \right|$$

называется ***отклонением*** *членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *при* $x-y<p\le x$, *если* m *принимает значение из интервала малой длины* $(x-y,x]$;

- *последовательность* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x-y<p\le x$ *и* $\{\alpha p\}<\sigma$ *называется равномерно распределенной по модулю единица, если при* $y\to\infty$ *выполняется соотношение*

$$D(x,y)=o(1).$$

Докажем теорему, в которой задача об исследовании поведения функции $F(x,y,\sigma)$ сведется к оценке тригонометрических сумм вида

$$V_K(x,y)=\sum_{k\le K}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|.$$

Другими словами задача о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y,\,x]$, сведется к оценке сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами $V_K(x,y)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $y\ge x^{0.534}$, $\mathscr{L}=\ln x$, $A>1$ *– абсолютная постоянная,* $M\ge\mathscr{L}^A$ *и* $M_1=M\ \ln\mathscr{L}^A$, *тогда для* $F_\alpha(x,y,\sigma)$ *– количество членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x-y<p\le x$ *и* $\{\alpha p\}<\sigma$, *справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma)-\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))\ll\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{V_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right),$$

где $\pi(x)$ *– количество простых чисел, не превосходящих числа* x.

Доказательство. Вводим характеристическую функцию полуинтервала $[0,\sigma)$, то есть

$$g(u)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\le\{u\}<\sigma;\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

которая имеет следующий явный вид

$$g(u)=-[\{u\}-\sigma].$$

Функцию $g(u)$ представим с помощью функции $\rho(u)=0,5-\{u\}$. Имеем

$$g(u)=[u]-[u-\sigma]=u-\{u\}-(u-\sigma-\{u-\sigma\})=$$
$$=\sigma+\left(\frac{1}{2}-\{u\}\right)-\left(\frac{1}{2}-\{u-\sigma\}\right)=\sigma+\rho(u)-\rho(u-\sigma).$$

Воспользовавшись при $M\ge\mathscr{L}^A$ леммой 2.1, находим

$$g(u)=\sigma+\left(\sum_{1\le|k|\le M}\frac{e(ku)}{2\pi ik}+r_M(u)\right)-\left(\sum_{1\le|k|\le M}\frac{e((u-\sigma)k)}{2\pi ik}+r_M(u-\sigma)\right)=$$
$$=\sigma+\sum_{1\le|k|\le M}\frac{1-e(-(\sigma k))}{2\pi ik}e(ku)+r_M(u)-r_M(u-\sigma).$$

При помощи функции $g(u)$ представим функцию $F_\alpha(x,y,\sigma)$ в виде

$$F_\alpha(x,y,\sigma)=\sum_{x-y<p\le x}g(\alpha p)=\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))+$$
$$+\sum_{1\le|k|\le M}\frac{1-e(-(\sigma k))}{2\pi ik}\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)+$$
$$+\sum_{x-y<p\le x}r_M(\alpha p)-\sum_{x-y<p\le x}r_M(\alpha p-\sigma).$$

В последнем равенстве, переходя к оценкам, получим

$$F_\alpha(x,y,\sigma)-\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))\ll$$
$$\ll|W(x,y,\sigma)|+|R(x,y,0)|+|R(x,y,\sigma)|, \qquad (2.2.1)$$

где

$$W(x,y,\sigma)=\sum_{1\le|k|\le M}\frac{1-e(-(\sigma k))}{2\pi ik}\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp),$$
$$R(x,y,\eta)=\sum_{x-y<p\le x}r_M(\alpha p-\eta).$$

Отдельно оценим каждую из сумм $W(x,y,\sigma)$ и $R(x,y,\eta)$.

Оценка $|W(x,y,\sigma)|$. Воспользовавшись формулой Эйлера, и переходя к оценкам, имеем

$$\begin{aligned}|W(x,y,\sigma)|&\le\sum_{1\le|k|\le M}\frac{|\sin\pi k\sigma|}{\pi k}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|=\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{1\le k\le M}\frac{|\sin\pi k\sigma|}{k}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|\le\\&\le\frac{2}{\pi}\sum_{1\le k\le M}\frac{1}{k}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|.\end{aligned}$$

Разбивая интервал изменения $1\le k\le M$ на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $0,5K<k\le K$, получим

$$\begin{aligned}|W(x,y,\sigma)|&\ll\mathscr{L}\max_{K\le M}\left(\sum_{0,5K\le k\le K}\frac{1}{k}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|\right)\ll\\&\ll\max_{K\le M}\left(\frac{\mathscr{L}}{K}\sum_{k\le K}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|\right)=\max_{K\le M}\left(\frac{V_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right).\qquad(2.2.2)\end{aligned}$$

Воспользуемся вышеупомянутой леммой о разложении модуля разности $\rho(u)$ и приближающим её тригонометрическим полиномом в ряд Фурье, которая имеет вид:

Оценка $|R(x,y,\eta)|$. Для модуля разности $\rho(u)$ и приближающим её тригонометрическим полиномом, то есть для

$$|r_M(\alpha n-\eta)|\le\psi_M(\alpha n-\eta)=\frac{4}{\sqrt{1+M^2\sin^2\pi(\alpha n-\eta)}},$$

воспользуемся леммой 2.2 о разложении в ряд Фурье, то есть соотношением

$$\psi_M(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e(ku),$$

где при $k \geq 0$ для коэффициентов Фурье c_k справедлива оценка

$$|c_k| = |c_{-k}| \leq \frac{4 + \ln M}{\pi M} \exp\left(-\frac{k}{M}\right),$$

найдём

$$|R(x,y,\eta)| \leq \sum_{x-y<p\leq x} \psi_M(\alpha p - \eta) = \sum_{x-y<p\leq x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e(k(\alpha p - \eta)).$$

При $M_1 = M \ln \ln^A N$, разбивая сумму по k на две части, для которых соответственно выполняются условия $k \leq M_1$ и $k > M_1$, имеем

$$|R(x,y,\eta)| \leq R_1 + R_2, \tag{2.2.3}$$

$$R_1 = \sum_{|k|\leq M_1} c_k e(-h\eta) \sum_{x-y<p\leq x} e(\alpha k p),$$

$$R_2 = \sum_{x-y<p\leq x} \sum_{|k|>M_1} c_k e(k(\alpha p - \eta)).$$

Оценим R_1, воспользовавшись леммой 1.5:

$$|R_1| \leq \sum_{|k|\leq M_1} |c_h||e(-k\eta)| \left|\sum_{x-y<p\leq x} e(\alpha k p)\right| =$$

$$= |c_0| \sum_{x-y<p\leq x} 1 + \sum_{1\leq|k|\leq M_1} |c_h| \left|\sum_{x-y<p\leq x} e(\alpha k p)\right| =$$

$$= |c_0|(\pi(x) - \pi(x-y)) + \sum_{1\leq|k|\leq M_1} |c_h| \left|\sum_{x-y<p\leq x} e(\alpha k p)\right| \ll$$

$$= \frac{|c_0| \cdot y}{\mathscr{L}} + \sum_{1\leq|k|\leq M_1} |c_h| \left|\sum_{x-y<p\leq x} e(\alpha k p)\right|.$$

Воспользовавшись леммой 2.2, оценим коэффициенты Фурье c_h, при $|h| \le M_1$, неравенством

$$|c_k| = |c_{-k}| \le \frac{4 + \ln M}{\pi M} \exp\left(-\frac{k}{M}\right) \le \frac{4 + \ln M}{\pi M}.$$

Отсюда, с учётом соотношения $M \ge \mathscr{L}^A$, имеем

$$R_1 \ll \frac{y \ln M}{M\mathscr{L}} + \frac{\ln M}{M} \sum_{1 \le |k| \le M_1} \left| \sum_{x-y<p\le x} e(\alpha k p) \right| \ll$$
$$\ll \frac{y \ln M}{\mathscr{L}^{A+1}} + \frac{\ln M}{M} \sum_{1 \le k \le M_1} \left| \sum_{x-y<p\le x} e(\alpha k p) \right|.$$

Пользуясь оценкой коэффициентов Фурье

$$|c_k| = |c_{-k}| \le \frac{4 + \ln M}{\pi M} \exp\left(-\frac{k}{M}\right),$$

и воспользовавшись леммой 1.5, оценим R_2. Имеем

$$R_2 = \sum_{x-y<p\le x} \sum_{|k|>M_1} c_k e(k(\alpha p - \eta)) \ll (\pi(x) - \pi(x-y)) \sum_{|h|>M_1} |c_h| \ll$$
$$\ll \frac{y \ln M}{M\mathscr{L}} \sum_{k>M_1} \exp\left(-\frac{k}{M}\right) = \frac{y \ln M}{M\mathscr{L}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{[M_1]+1}{M}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{M}\right)} =$$
$$= \frac{y \ln M}{M\mathscr{L}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{[M_1]}{M}\right)}{\exp\left(\frac{1}{M}\right) - 1} = \frac{y \ln M}{M\mathscr{L}} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{M_1}{M}\right)} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\{M_1\}}{M}\right)}{\exp\left(\frac{1}{M}\right) - 1} \le$$
$$\le \frac{y \ln M}{M\mathscr{L} \exp\left(\frac{M_1}{M}\right)} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{M}\right) - 1}.$$

Далее, воспользовавшись при $|u| < 1$ разложением

$$e^u = 1 + u + O(u^2),$$

имеем

$$
\begin{aligned}
R_2 &\ll \frac{y\ln M}{M\mathscr{L}\ \exp\left(\frac{M_1}{M}\right)}\cdot\frac{1}{(1+M^{-1}+O(M^{-2}))-1}=\\
&=\frac{y\ln M}{\mathscr{L}\ \exp\left(\frac{M_1}{M}\right)}\cdot\frac{1}{1+O(M^{-1})}=\frac{y\ln M}{\mathscr{L}\ \exp\left(\frac{M_1}{M}\right)}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{M}\right)\right)=\\
&=\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{M}\right)\right)\ll\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}.
\end{aligned}
$$

Подставляя найденные оценки для R_1 и R_2 в неравенство (2.2.3), найдём

$$
\begin{aligned}
|R(x,y,\eta)| &\ll \frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\frac{\ln M}{M}\sum_{1\le k\le M_1}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|\ll\\
&\ll \frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{\mathscr{L}}{K}\sum_{k\le K}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|\right)=\\
&=\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{U_K(N,H)}{K}\mathscr{L}\right).
\end{aligned}
$$

Из этой оценки и оценки (2.2.2), с учётом соотношения (2.2.1), находим

$$
F_\alpha(x,y,\sigma)-\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))\ll\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{V_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right).
$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ и $\mu\le\{\alpha p\}<\nu$, причём $0\le\mu<\nu\le1$, получим:

Следствие 2.1.1. *При выполнении условий теоремы 2.1 справедлива следующая асимптотическая формула*

$$
F_\alpha(x,y,\mu,\nu)-(\nu-\mu)(\pi(x)-\pi(x-y))\ll\frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}}+\max_{K\le M_1}\left(\frac{V_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right).
$$

Из следствия 2.1.1 для отклонения

$$D_\alpha(x,y) = \sup_{0\le\mu<\nu\le1}\left|\frac{F(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)} - (\nu-\mu)\right|$$

членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$, находим:

Следствие 2.1.2. *При выполнении условий теоремы 2.1 справедлива следующая оценка*

$$D_\alpha(x,y) \ll \frac{\ln M}{\mathscr{L}^A} + \max_{K\le M_1}\left(\frac{V_K(x,y)}{Ky\mathscr{L}^{-2}}\right).$$

Понятие равномерного распределения значений числовых последовательностей на отрезке ввёл в математику Г. Вейль [7]. Он заложил основы теории равномерного распределения, которая получила дальнейшее развитие в теории чисел, в теории функций, классической механике. В [46, 47] было введено понятие *равномерной распределённости* для дробных частей $\{\alpha m^n\}$, при условии, что $x-y<m\le x$ и доказано, что *если α — иррациональное число, тогда последовательность $\{\alpha m^2\}$, $x-y<m\le x$ при $y\ge\ln^3 x$, $y\to\infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.*

Мы вводим критерии Г. Вейля о равномерном распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Из следствия 2.1.2 получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю единица для последовательности $\{\alpha p\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x-y,x]$.

Следствие 2.1.3. *Последовательность $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$, является равномерно распределённой по модулю единица, при $y\to\infty$*

справедлива оценка

$$V_K(x,y) = o\left(\frac{Ky}{\mathscr{L}^2}\right).$$

2.3. Распределение дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала

Как мы отмечали в третьем параграфе первой главы, если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, то из теоремы 1.3 И.М. Виноградова следует асимптотическая формула (следствие 1.3.2) в законе распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y,\, x]$, являющиеся нетривиальной при

$$y \gg x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}.$$

Для величин y, порядок которых меньше порядка $x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$ и произвольных α вопрос распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x-y,\, x]$, оставался открытым.

Теорема 1.5 о нетривиальной оценке сумм коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$V_K(N,H) = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<p\le N} e(\alpha k p)\right|,$$

при $H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ позволила доказать следующую теорему о законе распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x-y,\, x]$ для более коротких интервалов и для всех иррациональных α и рациональных α с большими знаменателями.

Теорема 2.2. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Доказательство. Для вывода асимптотической формулы для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, имея в виду, что $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16} > N^{0.534}$, применяя теорему 2.1 при $M = \mathscr{L}^A$, $M_1 = \mathscr{L}^A \ln \mathscr{L}^A$, имеем

$$\begin{aligned} F_\alpha(x,y,\sigma) - \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) &\ll \\ &\ll \frac{y \ln \mathscr{L}}{\mathscr{L}^{A+1}} + \max_{K \leq \mathscr{L}^A \ln \mathscr{L}^A} \left(\frac{S_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Оценим сумму $S_K(x,y)$ при помощи теоремы 1.5. Из условия

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{H^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}$$

доказуемой теоремы при $K \leq \mathscr{L}^A \ln \mathscr{L}^A$ следует выполнение условия теоремы 1.5, поэтому справедлива оценка

$$S_K(x,y) \ll \frac{Ky}{\mathscr{L}^{A+1}}.$$

Подставляя эту оценку в (2.3.1), получим

$$F_\alpha(x,y,\sigma) - \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) \ll \frac{y \ln \mathscr{L}}{\mathscr{L}^{A+1}} + \frac{y}{\mathscr{L}^A} \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 2.2 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ и $\mu\le\{\alpha p\}<\nu$, причём $0\le\mu<\nu\le 1$, воспользовавшись соотношением

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu)=F_\alpha(x,y,\nu)-F_\alpha(x,y,\mu),$$

получим следующее утверждение:

Следствие 2.2.1. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A\ge 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\le q\le\frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ при $y\gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu)=(\nu-\mu)(\pi(x)-\pi(x-y))+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Из следствия 2.2.1 для отклонения

$$D_\alpha(x,y)=\sup_{0\le\mu<\nu\le 1}\left|\frac{F_\alpha(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)}-(\nu-\mu)\right|$$

членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$, получаем следующее утверждение:

Следствие 2.2.2. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A\ge 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\le q\le\frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $D_\alpha(x,y)$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая оценка

$$D_\alpha(x,y) \ll \frac{y\mathscr{L}^{-A}}{\pi(x)-\pi(x-y)}.$$

Доказательство. Воспользовавшись утверждением теоремы 2.2, найдём

$$\begin{aligned} D_\alpha(x,y) &= \sup_{0\le\mu<\nu\le1}\left|\frac{F_\alpha(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)} - (\nu-\mu)\right| = \\ &= \sup_{0\le\mu<\nu\le1}\left|\frac{(\nu-\mu)(\pi(x)-\pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right)}{\pi(x-y)-\pi(x)} - (\nu-\mu)\right| \ll \\ &\ll \frac{y\mathscr{L}^{-A}}{\pi(x)-\pi(x-y)}. \end{aligned}$$

Из следствия 2.2.2 и теоремы Р. Вакера и Г. Хармана о правильном порядке число простых чисел в интервале малой длины $(x-y,x]$, $y \ge x^{0.534}$ (лемма 1.5) получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю единица для последовательности $\{\alpha p\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x-y,x]$.

Следствие 2.2.3. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \ge 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \le q \le \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда последовательность $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \le x$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$, $y \to \infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.

Следствие 2.2.4. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \ge 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, α – вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \le q \le \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ и $\{\alpha p\}<\sigma$, при $y\gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma)=\frac{\sigma y}{\mathscr{L}}+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^2}\right).$$

Доказательство. Применяя к полученной формуле в теореме 2.2, то есть к правой части формулы

$$F_\alpha(x,y,\sigma)=\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

с учётом соотношения $y\gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}\ge x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$ лемму 2.3, найдём

$$\begin{aligned}F_\alpha(x,y,\sigma)&=\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right)=\\&=\left(\frac{\sigma y}{\ln N}+O\left(\frac{y}{\ln^2 N}\right)\right)+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right)=\\&=\frac{\sigma y}{\ln x}+O\left(\frac{y}{\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из доказанного следствия 2.2.4 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ и $\mu\le\{\alpha p\}<\nu$, причём $0\le\mu<\nu\le1$, получим:

Следствие 2.2.5. *При выполнении условий теоремы 2.2 справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu)=\frac{(\nu-\mu)H}{\mathscr{L}}+O\left(\frac{H}{\mathscr{L}^2}\right).$$

Литература

[1] Weyl A. Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloquim Pub. 29 (1947).

[2] Hua L. K. Abschddotatzungen von Exponentialssumen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Enzuyklopadie der mathemathischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Bahd I. Teil 2. Heft 13. Teil 2. Teudner Verlagsgesellschaft, Leipzig. 1959.

[3] Хуа Ло-ген Метод тригонометрических сумм и его применения в теории в теории чисел — М.: Мир. 1964. 190 с.

[4] Hua L.K. On exponential sums. Sci. Res. 1 – 4. [4]. L.K. Hua, On exponential sums, J. Chinese Math. Soc. 20 (1940), pp. 301 – 312.

[5] Хуа Ло-ген. Аддитивная теория простых чисел // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1947. Т. 22. С. 1 – 179.

[6] Чубариков В.Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Математические заметки. 1976. Т. 20. Вып. 1. С. 61 – 68.

[7] Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann. 1916. 77. s. 313 – 352.

[8] Виноградов И.М. Об одной общей теореме Варинга // Математический сборник. 1924. Т. 31. № 3 – 4. С. 490 – 507.

[9] Виноградов И.М. О теореме Варинга // Известия Академии наук СССР, VII серия. Отделение физико-математических наук. 1928. Вып. 4. С. 393 – 400.

[10] Виноградов И.М. Новое решение проблемы Варинга // Доклады Академии наук СССР. 1934. № 2. С. 337 – 341.

[11] Виноградов И.М. О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга // Известия Академии наук СССР. Отделение физико-математических наук. 1934. № 10. С. 1455 – 1469.

[12] Виноградов И.М. Новый вариант вывода теоремы Варинга // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1935. № 9. С. 5 – 16.

[13] Виноградов И.М. Новый метод в аналитической теории чисел // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1937. Т. 10. С. 5 – 122.

[14] Виноградов И.М. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ // Известия Академии наук СССР. Серия маттематическая. 1959. Т. 23. № 5. С. 637 – 642.

[15] Виноградов И.М. Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1951. Т. 15. № 2. С. 109 – 130.

[16] Виноградов И.М. Избранные труды — М.: Издательство АН СССР. 1952.

[17] Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм — М.: Наука. 1976.

[18] Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел — М.: Наука. 1980.

[19] Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1984. Т. 168. С. 4 – 30.

[20] Линник Ю В. Оценки сумм Вейля // Доклады Академии наук СССР. 1942. Т. 34. № 7. С. 201 – 203.

[21] Карацуба А.А. Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ, 1962, Сер. 1, № 1, С. 28 – 38.

[22] Карацуба А.А. Средние значения модуля тригонометрической суммы // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1973. Т. 36. № 6. С. 1203 – 1227.

[23] Архипов Г.И. О среднем значении сумм Г. Вейля // Математические заметки. 1978. Т. 23. № 6. С. 785 – 788.

[24] Архипов Г.И., Карацуба А.А. Новая оценка интеграла И.М. Виноградова // Известия Академии наук СССР, Серия математическая. 1978. Т. 42. № 4. С. 751 – 762.

[25] Стечкин С.Б. О средних значениях модуля тригонометрический суммы // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1975. Т. 134. С. 283 – 309.

[26] Коробов Н.М. О тригонометрических суммах // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 245. № 1. С. 14 – 17.

[27] Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения — М: Наука. 1989. 240 с.

[28] Соколинский В.З. О теореме о среднем при малом числе переменных // Известия ВГПИ. 1979. Т. 201. С. 45 – 55.

[29] Тырина О.В. Новая оценка тригонометрического интеграла И.М. Виноградова // Известия Академии наук СССР. 1987. Т. 51. № 2. С. 363 – 378.

[30] Архипов Г.И. Оценки двойных тригонометрических сумм // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1976. Т. 142. С. 46 – 66.

[31] Архипов Г.И., Чубариков В.Н. О кратных тригонометрических суммах // Доклады Академии наук СССР. 1975. Т. 222. № 5. С. 1017 – 1019.

[32] Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1976. Т. 40. С. 209 – 220.

[33] Чубариков В.Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 227. С. 1308 – 1310.

[34] Чубариков В.Н. Асимптотическая формула среднего значения кратной тригонометрической суммы // Математические заметки. 1978. Т. 23. № 6. С. 799 – 816.

[35] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Равномерные оценки кратных тригонометрических суммах // Доклады Академии наук СССР. 1980. Т. 252. № 6. С. 1289 – 1291.

[36] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы и их приложения // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1980. Т. 44. С. 723 – 781.

[37] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. 1987. 368 с.

[38] Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Доклады Академии наук СССР. 1984. Т. 278. № 2. С. 302 – 304.

[39] Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1985. Т. 49. № 5. С. 1031 – 1067.

[40] Чубариков В.Н. Об одновременном представлении натуральных чисел суммами степеней простых чисел // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 286. № 4. С. 828 – 831.

[41] Чубариков В.Н. Многомерная аддитивная задача с простыми числами // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 290. № 4. С. 805 – 808.

[42] Baker R., Harman G. The difference between consecutive primes // Proc. London Math. 1996. Soc. 72. pp. 261 – 280.

[43] Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Доклады Российской академии наук. 1993. Т. 331. № 3. С. 281 – 282.

[44] Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и ее приложения // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57. № 4. С. 55 – 71.

[45] Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.

[46] Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля // Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки. 2012. № 6. Ч. 2. С. 194 – 203.

[47] Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б., Шокамолова Дж.А. О равномерном распределении по модулю единица значений квадратичного многочлена, аргумент которого принимает значения из короткого интервала // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 4. С. 261 – 264.

[48] Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // Доклады Академии наук СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391 – 393.

[49] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа. 2003.

[50] Huxley M.N. On the differences between consecutive primes // Invent. math. 15. (1972). pp. 164 – 170.

[51] Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 11. С. 853 – 860.

[52] Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З., Исматов С.Н. Оценка сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами //Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 12. С. 937 – 945.

[53] Исматов С.Н. О распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 1. С. 9 – 14.

[54] Рахмонов З.Х., Исматов С.Н. Распределение дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 5. С. 347 – 350.

[55] Исматов С.Н. О распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. серия: естественные и экономические науки. 2014, № 2 (29) Ч. 1. С. 303 – 304.

[56] Исматов С.Н. Распределение дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала. Вестник Таджикского Национального Универститета. 2015. Т. 57. № 2. С. 347 – 350.