Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу Исматова Сайфулло Неъматовича “Распределение дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов”, представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертационная работа С.Н. Исматова посвящена оценке сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами и её приложению к выводу закона распределения дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов.

Оценка тригонометрическими сумм с простыми числами берет своего начало в 1937 г., когда И.М. Виноградов обнаружил, что многие суммы по простым числам могут быть составлены путем только сложений и вычитаний из сравнительно небольшого числа других сумм, хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм, не зависящего от теории дзета-функции Римана и L – рядов Дирихле. Для сумм модулей линейных тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградов доказал оценку

$$V_K(N) = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{p\le N} e(\alpha kp)\right| \ll KN^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}} + N^{-0,2}\right),$$

где K — целое, $K \le N$, $\alpha = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, $(a,q)=1$, $1\le q\le N$. Вместе с «решетом Виноградова» в доказательстве использованы нетривиальные оценки тригонометрических сумм вида

$$W(x) = \sum_{k\le K}\left|\sum_{F_1<m\le F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ mn\le x}} b(n)e(\alpha kmn)\right|,$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, K, F, G – натуральные числа с условием $F\le F_1<F_2\le 2F$, $G\le G_1<G_2\le 2G$.

Воспользовавшись своим методом, с помощью которого задача о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$ сводится к оценке тригонометрических сумм $V_K(N)$, основой которого является лемма *«о стаканчиках»*, И.М. Виноградов показал: *при любом σ с условием $0<\sigma\le 1$ число $F_\alpha(N,\sigma)$ значений $\{\alpha p\}$, $p\le N$, подчиненных условию $\{\alpha p\}<\sigma$, выразится формулой*

$$F_\alpha(N,\sigma) = \sigma\pi(N) + R_\sigma(N), \quad R_\sigma(N) \ll N^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}} + N^{-0,2}\right).$$

В частности, если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, то q можно выбрать порядка $\sqrt{N}$. В этом случае в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, то есть для $F_\alpha(N,H,\sigma)$ — *количества членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $N-H<p\le N$ *и* $\{\alpha p\}<\sigma$, *имея в виду, что* $F_\alpha(x,y,\sigma)=F_\alpha(x,\sigma)-F_\alpha(x-y,\sigma)$, *справедлива асимптотическая формула*

$$F_\alpha(N,H,\sigma)=\sigma(\pi(N)-\pi(N-H))+O\left(N^{4/5+\varepsilon}\right),$$

являющаяся нетривиальной при $N\gg H^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$.

Для величин H, порядок которых меньше порядка $N^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$, и произвольных α, вопрос о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(N-H,N]$, оставался открытым.

Оценкам тригонометрических сумм с простыми числами и их приложениям посвящены также фундаментальные работы Ю.В. Линника, Н.Г. Чудакова, В.Н. Чубарикова, Р. Вона, Пан Чен–дона, Пан Чен–бьяо, Зан Тао и других.

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы из 56 наименований. Первый параграф каждой главы носит вспомогательный характер.

Во введении (с. 4-22) дается общая характеристика работы и формулируются основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Первая глава (с. 23-49) состоит из трёх параграфов. Во втором параграфе этой главы получены нетривиальные оценки сумм модулей коротких двойных тригонометрических сумм $W(x,y)$, получающиеся из $W(x)$ заменой условия $mn\le x$ на условие $x-y<mn\le x$, где $\sqrt{x}<y\le x\mathscr{L}^{-1}$, $\mathscr{L}=\ln xq$, а именно оценены суммы $W(x,y)$, в которых имеется *«длинная»* сплошная сумма (теорема 1.1), и еще некоторой суммы, составляющие двойную сумму (теорема 1.2). В третьем параграфе, воспользовавшись этими результатами, методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова для сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами $V_K(N,H)$, получающиеся из $V_K(N)$ заменой условия $p\le N$ на условие $N-H<p\le N$, доказана следующая нетривиальная оценка.

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть* K, H, N *и* q – *натуральные числа,* $K\le H$, A – *абсолютная постоянная,* $\mathscr{L}=\ln Nq$, α – *вещественное и*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\le q\le\frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда при $H\gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ *справедлива оценка*

$$V_K(N,H)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<p\le N}e(\alpha kp)\right|\ll\frac{KH}{\mathscr{L}^{A+1}}.$$

Вторая глава (с. 50-63) состоит из трёх параграфов и её основным результатом является теорема 2.1 о сведении задачи о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y, x]$, к оценке сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами $V_K(x,y)$.

Теорема 2.1. *Пусть $y \geq x^{0.534}$, $\mathscr{L} = \ln x$, $A > 1$ – абсолютная постоянная, $M \geq \mathscr{L}^A$ и $M_1 = M \ln \mathscr{L}^A$, тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количества членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma) - \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) \ll \frac{y \ln M}{\mathscr{L}^{A+1}} + \max_{K \leq M_1}\left(\frac{V_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right),$$

где $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих числа x.

Из теоремы 1.5, теоремы 2.1 и закона распределения простых чисел в интервале малой длины для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ вытекает асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \frac{\sigma y}{\mathscr{L}} + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^2}\right),$$

(следствие 2), то есть последовательность дробных долей $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$, $y \to \infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.

К замечаниям отнесем встречающиеся местами опечатки. Влияющих на общую оценку работы критических замечаний по оформлению и содержанию диссертации нет.

Подводя итоги обсуждению диссертации С.Н. Исматова, можно сказать следующее. Основные результаты диссертации снабжены строгими доказательствами, полученными в результате применения современных методов аналитической теории чисел, в том числе:

- метода И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами;
- метода оценок тригонометрических сумм Г. Вейля;
- методов гармонического анализа.

По теме диссертации опубликовано 5 работ, из них 4 входят в перечень ВАК. В публикациях Исматова С.Н. в должной степени представлены основные результаты диссертационного исследования. Они неоднократно докладывались на различных международных конференциях, а также на семинарах в Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан и на семинаре кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета.

Автореферат диссертации правильно и полно отражает ее содержание.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации и методика их получения могут быть использованы при решении задач аналитической теории чисел в том числе, в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из коротких интервалов.

Считаю, что диссертация С.Н. Исматова "Распределение дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов", представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 (математическая логика, алгебра и теория чисел), соответствует п.8 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", ВАК России, а автор диссертации Исматов Сайфулло Неъматович заслуживает присуждения ему указанной степени.

Доктор физико–математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Владимирского государственного университета
имени А.Г. и Н.Г. Столетовых

Журавлев В.Г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования "Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых"(ВлГУ)
600000, г. Владимир, ул. Горького, 87
тел. (4922) 53-25-75, 47-97-37, 33-13-91
факс (4922) 53-25-75, 33-13-91 E-mail: oid@vlsu.ru

Подпись Журавлева В.Г. заверяю

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
УЧ. СЕКРЕТАРЬ ВлГУ
КОЧНОВА Т.Г.