Отзыв

официального оппонента на диссертацию Исматова С.Н. "Распределение дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов", представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

С помощью своего метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградов решил проблему распределения дробных частей многочлена при условии, что его аргумент принимает значения последовательных простых чисел, не превосходящих заданной величины. Для линейных многочленов он получил намного более точную оценку тригонометрической суммы, чем в общем случае, из которой в частности следует, что если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, то для $F_\alpha(N, H, \sigma)$ – количества членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $N - H < p \le N$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, справедлива асимптотическая формула

$$F_\alpha(N, H, \sigma) = \sigma(\pi(N) - \pi(N - H)) + O\left(N^{\frac{4}{5}+\varepsilon}\right),$$

являющаяся нетривиальной при $H \gg N^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$. Для величин H, порядок которых меньше порядка $N^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$ и произвольных α вопрос распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(N - H, N]$, оставался открытым.

Структура и содержание работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Первый параграф каждой главы носит вспомогательный характер.

Второй параграф посвящён оценкам сумм модулей коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$W(x, y) = \sum_{k \le K} \left| \sum_{F_1 < m \le F_2} a(m) \sum_{\substack{G_1 < n \le G_2 \\ x - y < mn \le x}} b(n) e(\alpha kmn) \right|,$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, K, F, G – натуральные числа, $F \le F_1 < F_2 \le 2F$, $G \le G_1 < G_2 \le 2G$, $\sqrt{x} < y \le x\mathscr{L}^{-1}$, $\mathscr{L} = \ln xq$, а именно оценкам сумм $W(x, y)$, в которых имеется *«длинная»* сплошная сумма (теорема 1.1) и суммы, составляющие двойную сумму, *«близкие»* по порядку (теорема 1.2). В третьем параграфе доказан основной результат первой главы — нетривиальная оценка сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами:

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть K, H, N и q – натуральные числа, $K \le H$, A – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln Nq$, $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $\mathscr{L}^{4A+20} \le q \le \frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}$. Тогда при $H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива оценка*

$$V_K(N, H) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{N - H < p \le N} e(\alpha kp) \right| \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^{A+1}}.$$

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена изучению распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Основным результатом второй главы является теорема 2.1 о сведении задачи о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y, x]$, к оценке сумм $V_K(x,y)$:

Теорема 2.1. *Пусть $y \geq x^{0.534}$, $\mathscr{L} = \ln x$, $A > 1$ – абсолютная постоянная, $M \geq \mathscr{L}^A$ и $M_1 = M \ln \mathscr{L}^A$, тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma) - \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) \ll \frac{y \ln M}{\mathscr{L}^{A+1}} + \max_{K \leq M_1} \left(\frac{V_K(x,y)}{K} \mathscr{L} \right),$$

где $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих числа x.

В третьем параграфе воспользовавшись теоремами 1.5 и 2.1 доказана:

Теорема 2.2. *Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln xq$, и $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a,q) = 1$, $\mathscr{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x} \mathscr{L}^{-4A-20}$. Тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Из теоремы 2.2 вытекает, что последовательность $\{\alpha p\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}} \mathscr{L}^{4A+16}$, $y \to \infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Основные результаты диссертации снабжены строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов теории чисел, а именно:

- метод И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляет метод сглаживания двойных сумм и решето Виноградова;
- метод оценок тригонометрических сумм Г. Вейля;
- методы гармонического анализа.

Новизна и практическая значимость, ценность научных работ соискателя. Основные результаты диссертационной работы являются новыми и заключаются следующем:

1. найдены нетривиальные оценки сумм модулей коротких двойных линейных тригонометрических сумм, в которых имеется длинная сплошная сумма, или суммы, составляющие двойную сумму, близки по порядку;
2. для сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами получена нетривиальная оценка, являющаяся обобщением соответствующей оценки И.М. Виноградова на случай коротких тригонометрических сумм с простыми числами;
3. задача о распределении дробных частей линейного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, сведена к оценке сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами;

4. доказан закон распределения дробных частей линейного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала для всех коэффициентов, являющихся иррациональным числом или рациональным числом с большими знаменателями;
5. найдены условия, при выполнении которых последовательность дробных частей линейного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, является равномерно распределённой.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты, а также используемый новый подход могут быть основой для дальнейшего исследования задач об оценке коротких тригонометрических сумм с простыми числами, распределения дробных частей значений многочленов, аргумент которых пробегает простые числа из интервала малой длины. Также их можно рекомендовать при чтении спецкурсов и проведении исследований по теории чисел в МИРАН, в МГУ им. М.В. Ломоносова, в МГПУ и в Таджикском национальном университете.

Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем и апробация. Основные результаты работы и опубликованы в 5 работах, в том числе 4 статьи – в журналах из списка ВАК РФ, рекомендуемых для кандидатских диссертаций, и прошли надлежащую апробацию на научно-исследовательских семинарах и международных конференциях.

Замечания. Критических замечаний по оформлению и содержанию диссертации, влияющих на общую оценку, не имеется. Отдельные опечатки редакционного и стилистического характера не вносят особых трудностей при чтении.

Выводы. Автореферат полно и точно отражает содержание диссертации. На основании вышеизложенного считаю, что диссертация С.Н. Исматова на тему «Распределение дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов» представляет собой законченное самостоятельно выполненное научное исследование, имеющее существенное значение для аналитической теории чисел, соответствующее критериям, установленным Положением о порядке присуждений учёных степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09 2013г. №842, а её автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Кандидат физико–математических наук,
доцент кафедры алгебры и теории чисел
Таджикского государственного
педагогического университета им. С.Айни — У. Чариев
734003, город Душанбе, проспект Рудаки 121
E-mail: umidchoryev@mail.ru

Подпись Чариева У. заверяю учёный секретарь
Таджикского государственного
педагогического университета им. С.Айни — Додобоева М.С.