«Утверждаю»
Ректор Таджикского
национального университета
академик АН РТ, профессор
________________ Имомов М.С.
9 июня 2015 г.

Отзыв ведущей организации

на диссертацию Исматова Сайфулло Неъматовича «Распределение дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы. И.М.Виноградов создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют метод сглаживания двойных сумм, теорема о среднем для сумм Г. Вейля, решето Виноградова и решил проблему распределения дробных частей многочлена $f(p) = \alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p$ при условии, что p принимает значения последовательных простых чисел, не превосходящих P. В проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$ он получил намного более точную оценку тригонометрической суммы, чем в общем случае распределения дробных частей $\{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p\}$. Он доказал: *пусть K – целое, $K \leq N$, α – вещественное, $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $1 \leq q \leq N$, тогда, будем иметь*

$$V_K(N) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p \leq N} e(\alpha k p) \right| \ll K N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right). \tag{1}$$

Отсюда следует утверждение: *при любом σ с условием $0 < \sigma \leq 1$ число $F_\alpha(N, \sigma)$ значений $\{\alpha p\}$, $p \leq N$ подчиненных условию и $\{\alpha p\} < \sigma$, выразится формулой*

$$F_\alpha(N, \sigma) = \sigma \pi(N) + R_\sigma(N), \quad R_\sigma(N) \ll N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right).$$

В частности, если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, то можно выбрать q таким, чтобы оно было порядка $\sqrt{N}$. В этом случае в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, то есть для $F_\alpha(N,H,\sigma)$ – *количество членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $N-H<p\le N$ *и* $\{\alpha p\}<\sigma$, *имея в виду, что* $F_\alpha(x,y,\sigma)=F_\alpha(x,\sigma)-F_\alpha(x-y,\sigma)$, *справедлива асимптотическая формула*

$$F_\alpha(N,H,\sigma)=\sigma(\pi(N)-\pi(N-H))+O\left(N^{4/5+\varepsilon}\right),$$

являющаяся нетривиальной при $N\gg H^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$. Для величин H, порядок которых меньше порядка $N^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$ и произвольных α вопрос распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(N-H,\,N]$, оставался открытым.

Основу оценки (1) составляют вместе с решетом Виноградова и нетривиальные оценки тригонометрических сумм вида

$$W(x)=\sum_{k\le K}\left|\sum_{F_1<m\le F_2}a(m)\sum_{\substack{G_1<n\le G_2\\ mn\le x}}b(n)e(\alpha kmn)\right|,\quad \alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, K, F, G – натуральные, $F\le F_1<F_2\le 2F$, $G\le G_1<G_2\le 2G$.

Структура и содержание работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Первый параграф каждой главы носит вспомогательный характер.

Второй параграф посвящён оценкам сумм модулей коротких двойных тригонометрических сумм, получающихся из $W(x)$ заменой условия $mn\le x$ на условие $x-y<mn\le x$, где $\sqrt{x}<y\le x\mathscr{L}^{-1}$, $\mathscr{L}=\ln xq$, а именно оценкам сумм $W(x,y)$, в которых имеются *«длинная»* сплошная сумма (теорема 1.1) и суммы, составляющие двойную сумму, *«близкие»* по порядку (теорема 1.2).

В третьем параграфе, прилагая результаты второго параграфа для сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами доказана нетривиальная оценка вида: *пусть* K, H, N *и* q – *натуральные числа,* $K\le H$, A – *абсолютная постоянная,* $\mathscr{L}=\ln Nq$,

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad \mathscr{L}^{4A+20}\le q\le\frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}. \tag{2}$$

Тогда при $H\gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ *справедлива оценка*

$$V_K(N,H)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{N-H<p\le N}e(\alpha kp)\right|\ll\frac{KH}{\mathscr{L}^{A+1}}.$$

Вторая глава состоит из трёх параграфов и посвящена изучению распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины.

Во втором параграфе доказана теорема 2.1, в котором задача о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины $(x-y,\,x]$, сведена к оценке сумм $V_K(x,y)$, посредством соотношения:

$$F_\alpha(x,y,\sigma)-\sigma(\pi(x)-\pi(x-y)) \ll \frac{y\ln M}{\mathscr{L}^{A+1}} + \max_{K\le M_1}\left(\frac{V_K(x,y)}{K}\mathscr{L}\right),$$

где $y \ge x^{0.534}$, $\mathscr{L}=\ln x$, $A>1$ – постоянная, $M \ge \mathscr{L}^A$ и $M_1 = M\ln\mathscr{L}^A$.

Третий параграф является приложением основного результата первой главы — теоремы 1.5 и теоремы 2.1, и её основным моментом является новая теорема 2.2 о законе распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x-y,\,x]$: *пусть x, y и q – натуральные числа, $A \ge 3$ – абсолютная постоянная, $\mathscr{L}=\ln xq$, α – вещественное и удовлетворяет условию* (2), *тогда при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma)=\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что последовательность $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ при $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$, $y\to\infty$ является равномерно распределённой по модулю единица.

Теорема 2.2 является решением поставленной задачей о законе распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x-y,\,x]$ для более коротких интервалов, для всех иррациональных α и рациональных α с большими знаменателями.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность полученных результатов и выводов обусловлена корректностью математических преобразований, опирающихся на современные методы аналитической теории чисел, а именно:

- метод И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляет метод сглаживания двойных сумм и решето Виноградова;
- метод оценок тригонометрических сумм Г. Вейля;
- методы гармонического анализа.

Новизна и практическая значимость, ценность научных работ соискателя. К новым результатам полученных в диссертации относятся следующие:

1. найдены нетривиальные оценки сумм модулей коротких двойных линейных тригонометрических сумм, в которых имеется длинная сплошная сумма, или суммы, составляющие двойную сумму, близки по порядку;
2. для сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами получена нетривиальная оценка, являющаяся обобщением соответствующей оценки И.М. Виноградова на случай коротких тригонометрических сумм с простыми числами;
3. задача о распределении дробных частей линейного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, сведена к оценке сумм модулей коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами;
4. доказан закон распределения дробных частей линейного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала для всех коэффициентов, являющихся иррациональным числом или рациональным числом с большими знаменателями;
5. найдены условия, при выполнении которых последовательность дробных частей линейного многочлена, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, является равномерно распределённой.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методика их получения могут быть использованы при изучении коротких тригонометрических сумм с простыми числами, распределения дробных частей значений многочленов, аргумент которых пробегает простые числа из интервала малой длины. Также их можно рекомендовать при чтении спецкурсов и проведении исследований по теории чисел в МИРАН, в МГУ им. М.В. Ломоносова, в МГПУ и в Таджикском национальном университете.

Апробация работы и публикации. Основные положения диссертации С.Н. Исматова в достаточной мере освещены в его 5 публикациях, в том числе 4 статьи в журналах из списка ВАК РФ, рекомендуемых для кандидатских диссертаций и прошли апробацию на научно-исследовательских семинарах и международных конференциях.

Замечания. В диссертации имеется ряд незначительных неточностей, неудачные обозначения и опечаток, не влияющих на научную значимость полученных результатов.

Заключение. Диссертация С.Н. Исматова на тему «Распределение дробных частей значений линейного многочлена, аргумент которого принимает простые числа из коротких интервалов», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел представляет собой законченную научно-квалификационную работу, в которой получены результаты, имеющие важное значение для развития аддитивных задач аналитической теории чисел.

Работа выполнена на высоком научном уровне, обладает научной новизной и практической значимостью, соответствует критериям установленным Положением о присуждения учёных степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09 2013 г. №842, а сам С.Н. Исматов заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв составили кандидаты физико – математических наук, доценты Species Бобоёров Ш.К., Бобоева Р., Собиров А.Ш. Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры алгебры и теории чисел, механико – математического факультета Таджикского национального университета, протокол №9 от 23 мая 2015 года.

Заведующий кафедрой
алгебры и теории чисел,
кандидат физ.–мат. наук, доцент — Бобоёров Ш.К.

Контактная информация ведущей организации
Таджикский национальный университет.
Адрес: 734025, г.Душанбе, проспект Рудаки, 17
сайт: http://www.tnu.tj/index.php/ru, телефон:(992-372) 21-77-11
E-mail:boboyorov72@mail.ru

Подпись кандидата физ.–мат. наук, доцента
Бобоёрова Шавката Кенджабоевича заверяю
Начальник отдела кадров ТНУ — Сироджиддини Эмомали

РАЁСАТИ КАДРХО ВА КОРХОИ МАХСУС ДОНИШГОХИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН
TAJIK NATIONAL UNIVERSITY
УПРАВЛЕНИЕ КАДРОВ И СПЕЦЧАСТИ