Институт математики имени А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

Камарадинова Заррина Нусратуллоевна

Средние Рисса арифметических функций, распространенных на значения тернарной кубической формы

Специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Душанбе – 2015

Работа выполнена в Институте математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан

Научный руководитель:	Рахмонов Зарулло Хусенович, член–корреспондент АН РТ, профессор, доктор физико–математических наук
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Чирский Владимир Григорьевич ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, профессор кафедры математического анализа Чариев Умидилла, кандидат физико–математических наук, доцент, Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни, доцент кафедры алгебры и теории чисел
Ведущая организация:	Таджикский национальный университет

Защита состоится 26 июня 2015 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 047.007.02 при Институте математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни 299/4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, а также на сайте http://www.mitas.tj

Автореферат разослан “___” _______ 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 047.007.02 Каримов У.Х.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертация посвящена задачам аналитической теории чисел и её основным предметом исследования является вывод асимптотических формул для сумм

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} \tau_k(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^{\alpha},$$

$$S_{\alpha}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} r(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^{\alpha},$$

то есть для “средних Рисса” веса $\alpha \ge 0$ многомерной функции делителей, и функции суммы квадратов, распространенных на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3) = z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3$. Поясним, что функцией делителей $\tau_k(n)$ называется количество представлений натурального n в виде $n = x_1\dots x_k$, где $x_1,\dots,x_k$ — натуральные числа. Функцией суммы квадратов $r(n)$ называется число решений уравнения $x_1^2+x_2^2 = n$ в целых числах x_1 и x_2.

Под средней Рисса порядка α, значений функции $f(z)$, распространённой на некоторое конечное множество точек $z \in M$ в количестве N элементов, здесь понимается величина V, равная сумме

$$V_{\alpha} = \sum_{z\in M} f(z) \left(1 - \frac{z}{N}\right)^{\alpha}.$$

Из определения $T_{\alpha,k}(x)$ следует, что величина $T_{0,k}(x)$ равна количеству решений диофантова уравнения вида

$$x_1\dots x_k - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3 + 3z_1z_2z_3 = 0,$$

причем переменные $x_1,\dots,x_k$ принимают натуральные, а z_1, z_2, z_3 – целые значения и выполнено неравенство $x_1\dots x_k \le x$.

А из определения $S_{\alpha}(x)$ следует, что величина $S_0(x)$ выражает собой количество решений диофантова уравнения вида

$$x_1^2 + x_2^2 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3$$

относительно целых неизвестных x_1, x_2 и z_1, z_2, z_3 при условии $x_1^2+x_2^2 \le x$.

В кандидатской диссертации Х.Т. Нгуена[1], защищнной на механико-математическом факультете МГУ имени В.М. Ломоносова в 1990 году, найдена асимптотическая формула для $T_{0,k}(x)$ в случае $k=1$ и $k=2$.

Важно учесть, что форма третьей степени $\varphi(z_1,z_2,z_3)$ является разложимой, точнее, она разлагается на линейные множители в алгебраическом расширении $Q(\sqrt{3})$ поля рациональных чисел Q. Это свойство создает предпосылки использования в данной задаче техники производящих рядов Дирихле. Действительно, в упомянутой выше работе[1] при $k=1$ и $k=2$ был явно выписан искомый производящий ряд

$$f_k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_k(n)}{n^s},\quad t_k(n)=t(n)\tau_k(n),$$

причём существенным элементом рассуждений послужило доказательство мультипликативности арифметической функции

$$t(n)=\frac{t_0(n)}{3},\tag{1}$$

где $t_0(n)$ при каждом натуральном n определяется как количество решений диофантова уравнения вида $n=z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3$. Заметим, что наличие множителя $1/3$ в равенстве (1) говорит о том, что возможность использования мультипликативных свойств коэффициентов искомого производящего ряда Дирихле $f_k(s)$ заранее не очевидна.

Баядилов Е.Е.[2] представил производящий ряд $f_k(s)$ в виде

$$f_k(s)=\zeta^{2k}(s)L^k(s,\chi)g_k(s).\tag{2}$$

Здесь k — любое натуральное число, большее двух, $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $L(s,\chi)$ — L-ряд Дирихле, χ — неглавный характер Дирихле по модулю 3, $g_k(s)$ — некоторый ряд Дирихле, сходящийся абсолютно в области $\Re s>1/2$.

При $k=1,\ 2$ это утверждение было доказано в работе Х.Т. Нгуена[1], причём в этом случае $g_k(s)$ представляет собой конечный ряд Дирихле.

Представление (2) для ряда $f_k(s)$ даёт возможность применить метод контурного интегрирования для нахождения сумматорной функции коэффициентов ряда, а также выразить главный член и остаток искомой

[1]Нгуен Хак Тхань Диофантовы уравнения с малым числом переменных // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова, 1990.

[2]Баядилов Е.Е. О проблеме делителей для значений тернарной кубической формы // Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 2001. №5, с. 29 – 32.

асимптотической формулы через вычет функции $F_k(s)$ в точке $s = 1$ и некоторый контурный интеграл соответственно. Но, так как модуль характера χ равен трём, то исследование остатка искомой асимптотики в нашем случае в идейном смысле не сильно отличается от случая производящего ряда $G_k(s) = \zeta^{2k}(s)$, но требует несколько более громоздких выкладок, связанных, в частности, с использованием функционального уравнения для $L(s,\chi)$, а также разбиением ряда Дирихле, определяющего функцию $L(s,\chi)$, на две прогрессии по модулю 3.

Другими словами, можно считать, что исследование остаточного члена в нашем случае фактически сводится к случаю производящего ряда $G_k(s) = \zeta^{2k}(s)$, то есть к классической многомерной проблеме делителей Дирихле, отвечающей размерности $m = 2k$.

Проблемой делителей Дирихле называют задачу об исследовании асимптотического поведения среднего значения функции делителей, распространенных на множестве натуральных чисел, имеющих различную природу. Следует сказать, что данная задача допускает многочисленные арифметические и геометрические интерпретации. В частности, полученная самим Дирихле асимптотика для среднего значения числа делителей натурального аргумента одновременно является и асимптотикой для количества целых точек под гиперболой. Начиная с классической работы Л.Дирихле, проблема делителей Дирихле остаётся одной из центральных задач аналитической теории чисел.

Основным аспектом проблемы делителей Дирихле, в том числе многомерной проблемы Дирихле, является задача уточнения оценки остаточного члена $\Delta_k(x)$ в асимптотической формуле для сумматорной функции делителей вида

$$D_k(x) = \sum_{n\le x} \tau_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + \Delta_k(x).$$

Здесь предполагается, что $x \to \infty$, и функция $P_{k-1}(y)$ представляет собой некоторый многочлен с вещественными коэффициентами степени $k-1$ от аргумента $y = \ln x$.

В исследованиях по верхним оценкам остатка $\Delta_k(x)$ используется стандартное обозначение показателя α_k, понимаемое как наименьшее вещественное число, обладающее свойством, что при $x \to \infty$ справедлива оценка вида

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{\alpha_k+\varepsilon}.$$

Верхней оценкой остатка $\Delta_k(x)$ при различных значениях величины k посвящено очень много работ. Кроме упомянутой выше работы Л. Дирихле 1849 года, в которой получена оценка вида

$$\alpha_2 \leq \frac{1}{2},$$

можно указать на работы Г. Вороного, Е. Ландау, Харди и Литтльвуда, ван дер Корпута, Тонга, Вальфиша Аткинсона, Чи Джан Тао, Х.Е. Рихерта, Чен Джин Рана, А.А. Карацубы, Г.А. Колесника, Иванец и Мозоччи, А. Ивича и М. Квелета и другие. В монографии А. Ивича[3] изложены последние результаты по проблеме делителей Дирихле. Отдельно отметим результаты, полученные Г.И. Архиповым, Е.Е. Баядиловым, В. Н.Чубариковым[4], Е.Е. Баядиловым[5] и О.В. Колпаковой[6].

Однако, следует подчеркнуть, что интенсивные исследования, проводимые на протяжении многих лет и отражённые в указанных выше работах, в настоящий момент ещё далеки от окончательного решения проблемы, которая предполагает полученные оценки типа

$$\alpha_k \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$$

соответствующей Ω – теореме Г. Харди[7] для величины α_k, утверждающей, что для любого $\varepsilon > 0$ верхняя оценка типа

$$\alpha_k \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} - \varepsilon$$

уже не имеет место.

Современные оценки величины α_k, приведенные в работе Ивича, имеют следующий вид:

$$\alpha_k \leq \frac{3k-4}{4k} \quad \text{при } 4 \leq k \leq 8, \qquad \alpha_9 \leq \frac{35}{54}, \quad \alpha_{10} \leq \frac{41}{60}, \quad \alpha_{11} \leq \frac{7}{10},$$
$$\alpha_k \leq \frac{k-2}{k+2} \quad \text{при } 12 \leq k \leq 25, \qquad \alpha_k \leq \frac{k-1}{k+4} \quad \text{при } 26 \leq k \leq 50,$$
$$\alpha_k \leq \frac{31k-98}{32k} \quad \text{при } 51 \leq k \leq 57, \quad \alpha_k \leq \frac{7k-34}{7k} \quad \text{при } k \geq 58.$$

---

[3] Ivič A. Riemann Zeta-function, M, Wiley,New-York, 1985.

[4] Архипов Г.И., Баядилов И.Е., Чубариков В.Н. Об абсциссе и экспоненте Карлсона в проблеме моментов дзета–функции // Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 2004.№1, 42 – 45.

[5] Баядилов Е.Е. Об оценках дзета–функции Римана в окрестности прямой $\Re s = 1$ // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень 2(2000), 42–49.

[6] Колпакова О.В. О средних значениях арифметических функций. Кандидатская диссертация, М., МГУ, 2006.

[7] Hardy G.H. On Dirichlet‘s divisor problem. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 15, (1915), 1–25.

О.В.Колпакова[8], в предположении справедливости оценки

$$\zeta(\sigma+it) \ll t^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \ln^{\frac{2}{3}} t$$

доказала, что

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{1}{3}\, 2^{\frac{2}{3}} (ak)^{-\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Здесь $a > 0$ – некоторая постоянная, значение которой, последовательно улучшается. История оценок значения параметра a начинается с работы Рихерта[9], где было указано значение $a = 100$. В дальнейшем были получены следующие результаты: $a = 39$ (Туран, 1971), $a = 86$ (Рибенбойм, 1986), $a = 26$ и $a = 21$ (Пантелеева, 1987, 1988), $a = 17$ (Хис-Браун, 1990), $a = 18,4974$ (Кулас, 1999). Е.Е. Баядилов[10] доказал, что $a = 15,21$. Последняя оценка для параметра a дает значение $a = 4.45$, полученное К. Фордом[11].

Что же касается числа k, которое характеризует размерность функции делителей $\tau_k(n)$, то хотя формально можно считать, что k принимает все натуральные значения, но фактически применение этой оценки целесообразно только при достаточно больших значениях k, например $k > 50$, ввиду того, что существующие оценки параметра a ещё не достаточно хороши.

Остановимся на истории получения последней оценки (3) для α_k. Ясно, что при растущих k она принципиально точнее, чем оценка типа

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{c_0}{k},$$

где c_0 – любая фиксированная постоянная.

В 1960 году Х.Е. Рихерт[12] доказал, что имеет место оценка вида

$$\alpha_k \leq 1 - ck^{-\frac{2}{3}},$$

причём числовое значение константы c не было указано.

---

[8] Колпакова О.В. О новых оценках остаточного члена асимптотической формулы в многомерной проблеме делителей Дирихле // Математические заметки. 2011. Том 89, выпуск 4. С. 530 – 546.

[9] Richert H.E. Vershärfung der Abschärzung beim Dirichletschen Teilerproblem. Math. Z. 58(1953), 204 – 218.

[10] Баядилов Е.Е. О среднем значении функции делителей от тернарной кубической формы // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Душанбе, Институт математики Академии наук Республики Таджикистан, 2009.

[11] Ford K. Vinogradov‘s integral and bounds for the Riemann zeta–function // Proc. London Math. Soc., (3), 85:3 (2002), 565 – 633.

[12] Richert H.E. Einfuhrung in die Theorie der starken Rieszchen Summierbarkeit von Dirichletreihen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (Math. Physik), (1960), 17 – 75.

В 1971 году А.А. Карацуба[13] установил справедливость этой оценки при

$$\alpha_k \le 1 - c_0 a^{-\frac{2}{3}} k^{-\frac{2}{3}}, \qquad c_0 = 2^{-\frac{5}{3}} \approx 0.31498.$$

Постоянную c_0 в этой оценке будем называть *константой Карацубы.* Упомянутый выше результат А. Ивича и М. Квелета[14] соответствует значению

$$c_0 = \frac{1}{3}\, 2^{\frac{2}{3}} \approx 0.52913.$$

В работе Е.И. Пантелеевой[15] приводится значение

$$B = 2^{-2/3} = 0,6299\ldots.$$

В 2001 году Е.Е. Баядилов[10], получил оценку вида

$$\alpha_k \le 1 - \left(\frac{2}{3a(k-2k_0)}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{a\sqrt{k-2k_0}}\right)^{-1}, \quad k_0 = 44 - \left[\frac{22}{a}\right],$$

которая означает, что

$$c_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \delta$$

при любом $\delta > 0$ для всех $k \ge h(\delta)$, где $h(\delta) > 0$ – некоторая функция, зависящая от δ.

О.В.Колпакова[8] доказала теорему, в которой получена оценка

$$\alpha_k = 1 - \left(\frac{2}{3a(k-2k_1)}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad k_1 = 79.95$$

Из этой теоремы следует справедливость соотношения

$$c_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0.763143.$$

Заметим также, что к проблеме делителей относится ещё целый класс задач, состоящих в нахождении асимптотических формул с оценкой остатка для среднего значения функции $\tau_k(n)$, когда n пробегает некоторое

[13] Карацуба А.А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их применения // Труды МИАН СССР, 112(1971), 241 – 255.

[14] Ivič A., Quellet M. Some new estimates in the Dirichlet divisor problem. // Acta Math. Arithmetica, 52(1989), 241-253.

[15] Пантелеева Е.И. К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 4, С. 494 – 505.

подмножество множества натуральных чисел, не совпадающее с натуральным рядом. Количество таких задач очень велико, как и число работ, им посвященных. Можно указать, например, на проблему нахождения асимптотики для среднего значения функции $\tau_k([n^c])$, рассмотренную Закзаком[16], Солибой[17], Г.И. Архиповым и В.Н. Чубариковым[18].

Важным направлением в круге указанных проблем является нахождение асимптотик функций $\tau_k(f(\bar{z}))$ и $r(f(\bar{z}))$, где $f(\bar{z})$ — целозначный многочлен от нескольких переменных $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_m)$. Сюда могут быть отнесены, как основные задачи, рассматриваемые в диссертации в случае $\alpha = 0$, так и нахождение асимптотик для сумм вида

$$\sum_{n \le x} \tau_k(n)\tau_l(n+a) = \sum_{z_1 \ldots z_l \le x} \tau_k(z_1 \ldots z_l + a),$$

где $k, l \ge 2$. Исследованию $k = 2$, $l \ge 2$ посвящены фундаментальные работы Эстермана, Титчмарша, Хооли, Линника, Бредихина, Мотохаши, Тимофеева, А.И. Виноградова и других математиков. Следует сказать, что случай $k = l = 3$ до сих пор представляет собой актуальную проблему, не решенную до сих пор.

Заметим ещё, что многими авторами наряду с асимптотикой для среднего значения многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ рассматривается "среднее Рисса" веса α, $\alpha \ge 0$ этой функции, то есть асимптотика для сумм вида

$$D_{\alpha,k}(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha}.$$

В частности, асимптотическая формула для $D_{1,k}(x)$ установлена в работе А.А. Карацубы[19] и монографии[20], где она затем с помощью метода асимптотического дифференцирования используется для нахождения асимптотики среднего значения функции $\tau_k(n)$, то есть для "средних

[16]Закзак А. Проблема делителей Дирихле в редких последовательностях // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова, 1993.

[17]Солиба Х.М. О среднем значении тернарной функции делителей на последовательности нецелых степеней натуральных чисел // Материалы Международной Конференции по аналитической теории чисел. Москва. МГУ. 1997. С. 30.

[18]Архипов Г.И., Чубариков В.И. Три теоремы о тригонометрических суммах из анализа // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 14. С. 19 – 29.

[19]Карацуба А.А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Серия математическая. 1972. Т. 36, №3, С. 475 – 483.

[20]Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана // Москва. Наука. 1994. 376 с.

Рисса" веса нуль. Оценка остатка $\Delta_{1,k}(x)$ в этих работах имела вид

$$\Delta_{1,k}(x) \ll_\varepsilon x^{æ(k,1)+\varepsilon}, \qquad æ(k,1) = 1 - \left(\frac{1}{2ak}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

В работах Е.Е. Баядилова этот результат улучшается. При $k \geq 140$ и $a \geq 3$ доказана следующая оценка

$$æ(k,1) \leq 1 - \left(\frac{5}{3a(k-2k_0)}\right)^{2/3}, \qquad k_0 = 44 - \left[\frac{22}{a}\right].$$

О.В. Колпакова[8] для средних Рисса от многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ при $k \geq 186$ с произвольным значением веса $\alpha \geq 0$ доказала асимптотическую формулу с остаточным членом вида

$$æ(k,1) \leq 1 - \left(\frac{2+3\alpha}{3a(k-2k_1)}\right)^{2/3}, \qquad k_1 = 79.95.$$

Цель работы. Целью работы является нахождение представления производящего ряда функции числа решений представлений тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$ в виде суммы двух квадратов через дзета-функции Римана и L – функций Дирихле и вывод асимптотической формулы для "средних Рисса" веса $\alpha \geq 0$ многомерной функции делителей, и функции суммы квадратов, распространенных на значения тернарной кубической формы.

Методы исследования. Степень обоснованности, полученных в диссертации научных результатов, подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов теории чисел и комплексного анализа, а именно:

- методы дзета-функции Римана и L – функций Дирихле;
- метод контурного интегрирования;
- метод производящих рядов Дирихле.

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяется тем, что в ней получен явный вид производящего ряда функции числа решений представлений тернарной кубической формы в виде суммы двух квадратов и асимптотические формулы для для "средних Рисса" веса $\alpha \geq 0$ арифметических функций.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- получено представление производящего ряда функции число решений представлений тернарной кубической формы в виде суммы двух квадратов через дзета-функции Римана и L – функции Дирихле;
- доказана асимптотическая формула для "среднего Рисса" веса $\alpha \geq 0$ многомерной функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$.
- доказана асимптотическая формула для "среднего Рисса" веса $\alpha \geq 0$ функции суммы квадратов, распространенной на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методика их получения могут быть использованы специалистами в области аналитической теории чисел и комплексного анализа.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались:

- на семинаре отдела алгебры, теории чисел и топологии (2009-2014 гг.), на обще институтском семинаре (2014-2015 гг.) в Институте математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан;
- на семинаре кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета;
- на международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и их приложений», посвящённой 60–летию академика К.Х. Бойматова 23–24 июня 2010 г.;
- на международной научной конференции «Современные проблемы теорий дифференциальных уравнений и математического анализа», посвящённой 80–летию академика А.Д. Джураева, Душанбе, 07–08 декабря 2012 г.;
- на международной научной конференции «Современные проблемы теорий функций и дифференциальных уравнений», посвящённой 85–летию академика Л.Г. Михайлова, 17–18 июня 2013 г.;
- на международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел», посвящённой 85–летию со дня рождения, профессора Г.Б. Бабаева, 25–26 октября 2013 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в девяти научных работах, список которых приведён в конце автореферата. В работе, написанной совместно с З.Х. Рахмоновым, соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения и трёх глав, разделённых на параграфы. Общий объем диссертации 82 страницы. Список цитированной литературы включает 68 наименований.

Содержание диссертации

Во введении содержится обзор результатов, относящихся к теме диссертации, а также формулируются основные полученные в ней результаты.

Первый параграф первой главы носит вспомогательный характер, где приведены известные леммы, которые используются в последующем параграфе этой главы и определения выше упомянутой мультипликативной функции

$$t(n)=\frac{t_0(n)}{3},$$

где $t_0(n)$ при каждом натуральном n определяется как количество решений диофантова уравнения вида $n=z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3$ и функции $r(n)$ – число решений уравнения $x_1^2+x_2^2=n$ в целых числах x_1 и x_2. Известна следующая формула[21]

$$r(n)=4\rho(n),\qquad \rho(n)=\sum_{d\backslash n}\chi_4(d),\quad \chi_4(d)=\sin\frac{\pi d}{2},$$

$\chi_4(d)$–неглавный характер по модулю 4 и арифметическая функция $\rho(n)$ – мультипликативная функция. Следовательно, мультипликативной является их произведения функции $s(n)=\rho(n)t(n)$.

Во втором параграфе первой главы доказана теорема 1.1 о представление производящего ряда функции $s(n)$.

Теорема 1.1. *Для производящего ряда Дирихле*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s(n)}{n^s}$$

функции $s(n)$ *справедливо равенство*

$$f(s)=\zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s),$$

[21] H. Iwaniec, E. Kowalski Analytic number theory, Providence, Rhode Island American Mathematical Society, 2004.

где χ_q — неглавный характер по модулю q, а также равенство

$$\mathscr{B}(s)=\left(1-\frac{2}{3^{2s}}+\frac{3}{3^{4s}}\right)\prod_{p\equiv 1\pmod{12}}\left(1-\frac{3}{p^{2s}}+\frac{2}{p^{3s}}\right)\prod_{p\equiv 5\pmod{12}}\left(1+\frac{3}{p^{2s}}-\frac{2}{p^{3s}}\right)\times$$
$$\times\prod_{p\equiv 7\pmod{12}}\left(1+\frac{3}{p^{2s}}\right)\prod_{p\equiv 11\pmod{12}}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right),$$

причём бесконечное произведение $\mathscr{B}(s)$ сходится абсолютно при всех s с условием $\Re s>0,5$.

Эта теорема и соотношение $S_0(N)=12\mathcal{S}_0(N)$, где

$$\mathcal{S}_\alpha(N)=\sum_{n\le N}s(n)\left(1-\frac{n}{N}\right)^\alpha,$$

позволяет методом контурного интегрирования найти асимптотическую формулу для суммы

$$S_\alpha(x)=\sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x}r(\varphi(z_1,z_2,z_3))\left(1-\frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^\alpha,$$

то есть для “средних Рисса” веса α функции суммы квадратов, распространенных на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$.

В первом параграфе второй главы приведены вспомогательные утверждения, которые используются в последующем параграфе, а второй параграф посвящён среднему Рисса веса $\alpha>0$ коэффициентов ряда Дирихле, а именно выводу аналога формулы Перрона для средних Рисса веса α коэффициентов ряда Дирихле, то есть для:

$$\Phi(x,\alpha)=\sum_{n\le x}a_n\left(1-\frac{n}{x}\right)^\alpha.$$

Сформулируем этот результат.

Теорема 2.1. *Пусть функция $h(s)$ комплексного переменного $s=\sigma+it$ представляется рядом Дирихле вида*

$$h(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{n^s},$$

который сходится абсолютно при $Re(s)=\sigma>1$. Далее, пусть $A(n)$ – монотонно возрастающая функция от n и $|a_n|\le A(n)$ при всех n.

Пусть, также, $\beta > 0$, $\delta > 0$ *и при* $\sigma \to 1+0$ *выполняется асимптотическая оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} \ll (\sigma - 1)^{-\beta}.$$

Тогда при всех $b \geq 1+\delta$, *любом* x *вида* $x = N + \frac{1}{2}$, *где* N *– натуральное число, и* $T \geq 2$ *справедливо равенство*

$$\Phi(x,\alpha) = \sum_{n\leq x} a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} h(s) x^s B(s, \alpha+1) ds +$$
$$+ O\left(\frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^{\beta}}\right) + O\left(\frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}}\right).$$

Следует заметить, что аналогичный результат доказала О. В. Колпакова[22].

Третья глава состоит из трёх параграфов и посвящена выводу асимптотических формул для “средних Рисса” веса $\alpha \geq 0$ арифметических функций, распространенных на значения тернарной кубической формы

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3.$$

Во втором параграфе третьей главы доказывается теорема 3.1 об асимптотической формуле для суммы $T_{\alpha,k}(x)$, то есть для “средних Рисса” веса $\alpha \geq 0$ многомерной функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha \geq 0$ *– произвольное вещественное число, тогда при* $k > 3k_1(1+\alpha)$, $k_1 = 79{,}95$ *справедлива следующая асимптотическая формула*

$$T_{\alpha,k}(x) = xQ_{2k-1}(\ln x) + R_{\alpha,k}(x),$$

где $Q_{2k-1}(y)$ *— многочлен степени* $2k-1$, *определяемым равенством*

$$xQ_{2k-1}(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^{2k}(s) L^k(s,\chi) g_k(s) x^s B(s, \alpha+1),$$

кроме того, для остаточного члена $R_{\alpha,k}(x)$ *справедлива оценка вида*

$$R_{\alpha,k}(x) \ll_{\varepsilon} x^{1-\delta_{k,\alpha,a}+\varepsilon}, \quad \delta_{k,\alpha,a} = \left(\frac{2+3\alpha}{6a(k-k_1)}\right)^{2/3}, \quad a \leq 4{,}45.$$

[22] Колпакова О.В. Об одном обобщении формулы Перрона // Тезисы докладов IV Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и ее приложения», Тула, 10 – 15 сентября, 2001 г. с. 69 – 70.

Эта теорема является обобщением для “среднего Рисса” веса $\alpha \geq 0$, теоремы Е.Е. Баядилова об асимптотической формуле для среднего значения

$$T_{0,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\leq x} \tau_k(\varphi(z_1,z_2,z_3)),$$

многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ при условии, что n пробегает значения, которые принимает тернарная кубическая формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$.

Теорема 3.1 также является обобщением вышеупомянутой теоремы О.В. Колпаковой о средних Рисса многомерной функции делителей с произвольным значением веса $\alpha \geq 0$ в случае, когда множество натуральных чисел, не превосходящих x, заменяется на множество значений тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$, не превосходящих x, $z_1,z_2,z_3 \in Z$, причем переменные z_1, z_2, z_3 принимают целые значения.

В третьем параграфе третьей главы доказывается теорема 3.2 об асимптотической формуле для суммы

$$S_\alpha(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\leq x} r(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^\alpha,$$

то есть для “средних Рисса” веса $\alpha \geq 0$ многомерной функции делителей, и функции суммы квадратов, распространенных на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$.

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha \geq 0$ – произвольное вещественное число, тогда справедлива следующая асимптотическая формула*

$$S_\alpha(x) = 12xQ_\alpha(\ln x) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где $Q_\alpha(y)$ — линейный многочлен, определяемый равенством

$$xQ_\alpha(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s)x^s B(s,\alpha+1).$$

Как мы уже отметили, величина $S_0(x)$ выражает собой количество решений диофантова уравнения вида

$$x_1^2 + x_2^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 3z_1z_2z_3$$

относительно неизвестных x_1, x_2 и z_1, z_2, z_3, при условии $x_1^2 + x_2^2 \leq N$.

В заключении автор выражает искреннюю благодарность профессору Рахмонову Зарулло Хусеновичу за научное руководство и помощь в работе.

Публикации по теме диссертации

1. Камарадинова З.Н. Средние Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2009. Т. 52, №5. С. 353 – 357.

2. Рахмонов З.Х., Камарадинова З.Н. Асимптотическая формула для среднего Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2013. № 3(152). С. 7 – 18.

3. Камарадинова З.Н. Производящая функция для числа решений представлений тернарной кубической формы в виде суммы двух квадратов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57, №11–12. С. 831 – 834.

4. Камарадинова З.Н. Средние Рисса функций делителей, распространенных на значения тернарной кубической формы // Ученые записки Худжандского государственного университета им. Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. 2014. №2(29), часть 1. С. 312 – 318.

5. Камарадинова З.Н. О средних Рисса функций делителей, распространенных на значения тернарной кубической формы // Вестник Таджикского национального универститета. Серия естественных наук. 2015. №1/2(160). С. 35 – 42.

6. Камарадинова З.Н. О средних Рисса функций делителей, распространенных на значения тернарной кубической формы // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и их приложений», посвященной 60–летию академика К.Х.Бойматова. Душанбе, 23–24 июня 2010 г. С. 53 – 54.

7. Камарадинова З.Н. О средней Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теорий дифференциальных уравнений и математического анализа», посвященной 80–летию академика А.Д.Джураева, Душанбе, 07–08 декабря 2012 г. С. 40 – 43.

8. Камарадинова З.Н. Асимптотическая формула для функций делителей, распространенных на значения тернарной кубической формы, с весом Рисса // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теорий функций и дифференциальных уравнений», посвященной 85–летию академика Л.Г.Михайлова, Душанбе, 17–18 июня 2013 г. С. 72 – 73.

9. Камарадинова З.Н. Асимптотическая формула для функций делителей, распространенных на значения тернарной кубической формы // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел», посвященной 85–летию со дня рождения, профессора Г.Б.Бабаева, Душанбе, 25–26 октября 2013 г. С. 62 – 72.