Институт математики Академии наук Республики Таджикистан

На правах рукописи

КАМАРАДИНОВА ЗАРРИНА НУСРАТУЛЛОЕВНА

СРЕДНИЕ РИССА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАСПРОСТРАНЕННЫХ НА ЗНАЧЕНИЯ ТЕРНАРНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Специальность 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
член-корреспондент АН РТ, профессор
Рахмонов Зарулло Хусенович

Душанбе — 2015

Оглавление

Обозначения

При ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются двумя индексами: номер главы, номер утверждения;

$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i\sin 2\pi\alpha$;

χ_3, χ_4, χ_{12} — соответственно неглавные характеры по модулям 3, 4 и 12, причём $\chi_{12} = \chi_3\chi_4$;

ε – произвольное положительное сколь угодно малое число;

$\tau(n)$ – функция число делителей числа n;

$\zeta(s)$ – дзета функция Римана, $s = \sigma + it$;

$L(s, \chi)$ – функция Дирихле по характеру χ;

$c, c_1, c_2, \cdots$ –положительные постоянные;

ε–положительная сколь угодно малая постоянная;

$x > 1$ – положительное вещественное число;

$\mathscr{L} = \ln x$ натуральный логарифм от числа x;

Введение

Настоящая диссертация посвящена задачам аналитической теории чисел и её основным предметом исследования является вывод асимптотических формул для сумм

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} \tau_k(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^{\alpha},$$

$$S_{\alpha}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} r(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^{\alpha},$$

то есть для “средних Рисса” веса $\alpha \ge 0$ многомерной функции делителей, и функции суммы квадратов, распространенных на значения тернарной кубической формы

$$\varphi = \varphi(z_1,z_2,z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3.$$

Поясним, что функцией делителей $\tau_k(n)$ называется количество представлений натурального n в виде $n = x_1 \ldots x_k$, где $x_1, \ldots, x_k$ — натуральные числа. Функцией суммы квадратов $r(n)$ называется число решений уравнения $x_1^2 + x_2^2 = n$ в целых числах x_1 и x_2.

Под средней Рисса порядка α, значений функции $f(z)$, распространённой на некоторое конечное множество точек $z \in M$ в количестве N элементов, здесь понимается величина V, равная сумме

$$V_{\alpha} = \sum_{z\in M} f(z) \left(1 - \frac{z}{N}\right)^{\alpha}.$$

Из определения $T_{\alpha,k}(x)$ следует, что величина $T_{0,k}(x)$ равна количеству решений диофантова уравнения вида

$$x_1 \ldots x_k - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3 + 3z_1 z_2 z_3 = 0,$$

причем переменные $x_1, \ldots, x_k$ принимают натуральные, а z_1, z_2, z_3 – целые значения и выполнено неравенство $x_1 \ldots x_k \leq x$.

А из определения $S_\alpha(x)$ следует, что величина $S_0(x)$ выражает собой количество решений диофантова уравнения вида

$$x_1^2 + x_2^2 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3$$

относительно целых неизвестных x_1, x_2 и z_1, z_2, z_3 при условии $x_1^2 + x_2^2 \leq N$.

В кандидатской диссертации Х.Т. Нгуена [1, 2, 3], защищенной на механико-математическом факультете МГУ имени В.М. Ломоносова в 1990 году найдена асимптотическая формула для $T_{0,k}(x)$ в случае $k = 1$ и $k = 2$.

Важно учесть, что форма третьей степени $\varphi(z_1, z_2, z_3)$ является разложимой. Точнее, она разлагается на линейные множители в алгебраическом расширении $Q(\sqrt{3})$ поля рациональных чисел Q. Это свойство создает предпосылки использования в данной задаче техники производящих рядов Дирихле. Действительно, в упомянутой выше работе [1] при $k = 1$ и $k = 2$ был явно выписан искомый производящий ряд

$$f_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_k(n)}{n^s}, \quad t_k(n) = t(n)\tau_k(n),$$

причём существенным элементом рассуждений послужило доказательство мультипликативности арифметической функции

$$t(n) = \frac{t_0(n)}{3}, \tag{1}$$

где $t_0(n)$ при каждом натуральном n определяется как количество решений диофантова уравнения вида

$$n = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3.$$

Заметим, что наличие множителя $1/3$ в равенстве (1) говорит о том, что возможность использования мультипликативных свойств коэффициентов искомого производящего ряда Дирихле $f_k(s)$ заранее не очевидна.

Баядилов Е.Е. [4, 5, 6] представил производящий ряд $f_k(s)$ в виде

$$F_k(s) = \zeta^{2k}(s)L^k(s,\chi)g_k(s). \tag{2}$$

Здесь k — любое натуральное число, большее двух, $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $L(s,\chi)$ — L-ряд Дирихле, χ — неглавный характер Дирихле по модулю 3, $g_k(s)$ — некоторый ряд Дирихле, сходящийся абсолютно в области $\Re s > 1/2$.

При $k = 1,\ 2$ это утверждение было доказано в [1], причём в этом случае $g_k(s)$ представляет собой конечный ряд Дирихле.

Представление (2) для ряда $f_k(s)$ даёт возможность применить метод контурного интегрирования для нахождения сумматорной функции коэффициентов ряда, а также выразить главный член и остаток искомой асимптотической формулы через вычет функции $F_k(s)$ в точке $s = 1$ и некоторый контурный интеграл соответственно. Но, так как модуль характера χ равен трём, то исследование остатка искомой асимптотики в нашем случае в идейном смысле не сильно отличается от случая производящего ряда $G_k(s) = \zeta^{3k}(s)$, но требует несколько более громоздких выкладок, связанных, в частности, с использованием функционального уравнения для $L(s,\chi)$, а также разбиением ряда Дирихле, определяющего функцию $L(s,\chi)$, на две прогрессии по модулю 3.

Другими словами, можно считать, что исследование остаточного члена в нашем случае фактически сводится к случаю производящего ряда $G_k(s) = \zeta^{2k}(s)$, то есть к классической многомерной проблеме делителей Дирихле, отвечающей размерности $m = 2k$.

Проблемой делителей Дирихле называют задачу об исследовании асимптотического поведения среднего значения функции делителей, распространенных на множестве натуральных чисел, имеющих различную природу. Следует сказать, что данная задача допускает многочисленные арифметические и геометрические интерпретации. В частности, полученная самим Дирихле асимптотика для среднего значения числа делителей натурального аргумента одновременно является и асимптотикой для количества целых точек под гиперболой. Начиная с вышеупомянутой классической работы Л.Дирихле 1849 года [7], проблема делителей Дирихле остаётся одной из центральных задач аналитической теории чисел.

Основным аспектом проблемы делителей Дирихле, в том числе многомерной проблемы Дирихле является задача уточнения оценки остаточного члена $\Delta_k(x)$ в асимптотической формуле для сумматорной функции делителей вида

$$D_k(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + \Delta_k(x).$$

Здесь предполагается, что $x \to \infty$, и функция $P_{k-1}(y)$ представляет собой некоторый многочлен с вещественными коэффициентами степени $k-1$ от аргумента $y = \ln x$.

В исследованиях по верхним оценкам остатка $\Delta_k(x)$ используется стандартное обозначение показателя α_k, понимаемое как наименьшее вещественное число, обладающее свойством, что при $x \to \infty$ справедлива оценка вида

$$\Delta_k(x) \ll_\varepsilon x^{\alpha_k + \varepsilon}.$$

Верхней оценкой остатка $\Delta_k(x)$ при различных значениях величины k посвящено очень много работ. Кроме упомянутой выше работы Л. Дирихле 1849 года, в которой получена оценка вида

$$\alpha_2 \le \frac{1}{2},$$

можно указать на работы Г.Вороного [8], Е.Ландау [9], Харди и Литтлвуда [10, 11], ван дер Корпута [12], Тонга [13], Вальфиша [14], Аткинсона [15], Т. Чи [16], Х. Е. Рихерта [17, 18], Чен Джин Рана [19], А.А. Карацубы [20, 21], Г.А. Колесника [22], Иванец и Мозоччи [23], А. Ивич [24], А. Ивича и М. Квелета [25] и другие. В монографии А. Ивича [26] изложены последние результаты по проблеме делителей Дирихле. Отдельно отметим результаты, полученные Г.И. Архиповым, Е.Е. Баядиловым, В.Н.Чубариковым в работах [27, 28], Е.Е. Баядиловым в работах [4, 5, 6, 29, 30] и результаты полученные О.В. Колпаковой [31, 32, 33].

Однако, следует подчеркнуть, что интенсивные исследования, проводимые на протяжении многих лет и отраженные в указанных выше работах, в настоящий момент ещё далеки от окончательного решения проблемы, которая предполагает полученные оценки типа

$$\alpha_k \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$$

соответствующей Ω – теореме Г. Харди [11] для величины α_k, утверждающей, что для любого $\varepsilon > 0$ верхняя оценка типа

$$\alpha_k \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} - \varepsilon$$

уже не имеет место.

Современные оценки величины α_k, приведенные в работе [24], имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \alpha_k \leq \dfrac{3k-4}{4k} \quad \text{при } 4 \leq k \leq 8, & \alpha_9 \leq \dfrac{35}{54}, \quad \alpha_{10} \leq \dfrac{41}{60}, \quad \alpha_{11} \leq \dfrac{7}{10}, \\ \alpha_k \leq \dfrac{k-2}{k+2} \quad \text{при } 12 \leq k \leq 25, & \alpha_k \leq \dfrac{k-1}{k+4} \quad \text{при } 26 \leq k \leq 50, \\ \alpha_k \leq \dfrac{31k-98}{32k} \quad \text{при } 51 \leq k \leq 57, & \alpha_k \leq \dfrac{7k-34}{7k} \quad \text{при } k \geq 58. \end{array}$$

О.В.Колпакова [31, 32, 33], в предположении справедливости оценки

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \ln^{\frac{2}{3}} t$$

доказала, что

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{1}{3}\, 2^{\frac{2}{3}}(ak)^{-\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Здесь $a > 0$ – некоторая постоянная, значение которой, последовательно улучшается. История оценок значения параметра a начинается с работы Рихерта [17, 18], где было указано значение $a = 100$. В дальнейшем были получены следующие результаты: $a = 39$ (Туран, 1971), $a = 86$ (Рибенбойм, 1986), $a = 26$ и $a = 21$ (Пантелеева, 1987, 1988), $a = 17$ (Хис-Браун, 1990), $a = 18,4974$ (Кулас, 1999 [34]). Е.Е.Баядилов [6, 30] доказал, что $a = 15,21$. Следует сказать, что вывод этой оценки существенно опирается на результаты О. В. Тыриной [35, 36], касающиеся теоремы И. М. Виноградова о среднем значении тригонометрических сумм Г. Вейля, а также на известный многомерный аналог теоремы И. М. Виноградова о сглаживании двойных тригонометрических сумм, доказанный Э. Бомбьери и Г. Иванцом в [37, 38]. Последняя оценка для параметра a даёт значение $a = 4.45$, полученное К. Фордом [39].

Что же касается числа k, которое характеризует размерность функции делителей $\tau_k(n)$, то хотя формально можно считать, что k принимает все натуральные значения, но фактически применение этой оценки целесообразно только при достаточно больших значениях k, например $k > 50$, ввиду того, что существующие оценки параметра a ещё не достаточно хороши.

Остановимся на истории получения последней оценки (3) для α_k. Ясно, что при растущих k она принципиально точнее, чем оценка типа

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{c_0}{k},$$

где c_0 – любая фиксированная постоянная.

В 1960 году Х.Е. Рихерт [17, 18] доказал, что имеет место оценка вида

$$\alpha_k \leq 1 - ck^{-\frac{2}{3}},$$

причём числовое значение константы c не было указано.

В 1971 году А.А. Карацуба [21] установил справедливость этой оценки при

$$\alpha_k \leq 1 - c_0 a^{-\frac{2}{3}} k^{-\frac{2}{3}}, \qquad c_0 = 2^{-\frac{5}{3}} \approx 0.31498.$$

Постоянную c_0 в этой оценке будем называет *константой Карацубы.* А. Фуджи в работе [40] анонсировал оценку того же типа со значением

$$c_0 = 2^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{8} - 1\right)^{-\frac{1}{3}} \approx 0.57826,$$

но полного доказательства в этой работе приведено не было. Упомянутый выше результат А. Ивича и М. Квелета [25] соответствует значению

$$c_0 = \frac{1}{3}\, 2^{\frac{2}{3}} \approx 0.52913.$$

В работе Е. И. Пантелеевой [41] приводится значение

$$B = 2^{-2/3} = 0,6299\ldots.$$

В 2001 году Е. Е. Баядилов в работе [30] получил оценку вида

$$\alpha_k \leq 1 - \left(\frac{2}{3a(k-2k_0)}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{a\sqrt{k-2k_0}}\right)^{-1},$$

где

$$k_0 = 44 - \left[\frac{22}{a}\right],$$

которая означает, что

$$c_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \delta$$

при любом $\delta > 0$ для всех $k \geq h(\delta)$, где $h(\delta) > 0$ – некоторая функция, зависящая от δ.

О.В.Колпакова [31, 32], доказала теорему в которой получена оценка

$$\alpha_k = 1 - \left(\frac{2}{3a(k-2k_1)}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad k_1 = 79.95$$

Из этой теоремы следует справедливость соотношения

$$c_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0.763143.$$

Заметим также, что к проблеме делителей относится ещё целый класс задач, состоящих в нахождении асимптотических формул с оценкой остатка для среднего значения функции $\tau_k(n)$, когда n пробегает некоторое подмножество множества натуральных чисел, не совпадающее с натуральным рядом. Количество таких задач очень велико, как и число работ, им посвящённых.

Можно указать, например, на проблему нахождения асимптотики для среднего значения функции $\tau_k([n^c])$, рассмотренную Закзаком [42], Солибой [43], Г.И.Архиповым и В.Н.Чубариковым [44, 45, 46].

Важным направлением в круге указанных проблем является нахождение асимптотик функции $\tau_k(f(\bar{z}))$, где $f(\bar{z})$ — целозначный многочлен от нескольких переменных $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_m)$. Сюда могут быть отнесены, как основные задачаи рассматриваемая в диссертации в случае $\alpha = 0$, так и нахождение асимптотик для сумм вида

$$\sum_{n\le x} \tau_k(n)\tau_l(n+a) = \sum_{z_1\ldots z_l\le x} \tau_k(z_1\ldots z_l + a),$$

где $k, l \ge 2$. Исследованию $k = 2$, $l \ge 2$ посвящены фундаментальные работы Эстермана, Титчмарша, Хооли, Линника, Бредихина, Мотохаши, Тимофеева, А. И. Виноградова и других математиков. Следует сказать, что случай $k = l = 3$ до сих пор представляет собой актуальную проблему, не решённую до сих пор.

Заметим ещё, что многими авторами наряду с асимптотикой для среднего значения многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ рассматривается "среднее Рисса" веса α, $\alpha \ge 0$ этой функции, то есть асимптотика для сумм вида

$$D_{\alpha,k}(x) = \sum_{n\le x} \tau_k(n)\left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha}.$$

В частности, асимптотическая формула для $D_{1,k}(x)$ установлена в работе А. А. Карацубы [47] и монографии [48], где она затем с помощью метода асимптотического дифференцирования используется для нахождения асимптотики среднего значения функции $\tau_k(n)$, то есть для "средних Рисса" веса нуль. Оценка остатка $\Delta_{1,k}(x)$ в этих работах имела вид

$$\Delta_{1,k}(x) \ll_{\varepsilon} x^{æ(k,1)+\varepsilon}, \qquad æ(k,1) = 1 - \left(\frac{1}{2ak}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

В работах [4, 5, 6] Е.Е.Баядилова этот результат улучшается. При $k \ge 140$ и

$a \geq 3$ доказана следующая оценка

$$æ(k,1) \leq 1 - \left(\frac{5}{3a(k-2k_0)}\right)^{2/3}, \qquad k_0 = 44 - \left[\frac{22}{a}\right].$$

О.В.Колпакова [31, 32, 33] для средних Рисса от многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ при $k \geq 186$ с произвольным значением веса $\alpha \geq 0$ доказала асимптотическую формулу с остаточным членом вида

$$æ(k,1) \leq 1 - \left(\frac{2+3\alpha}{3a(k-2k_1)}\right)^{2/3}, \qquad k_1 = 79.95.$$

Далее остановимся на кратком изложении основных моментов диссертации, состоящих из введения, трёх глав, разделенных на параграфы и списка литературы.

Первая глава состоит из двух параграфов. В первом параграфе приведены определения выше упомянутой мультипликативной функции

$$t(n) = \frac{t_0(n)}{3},$$

где $t_0(n)$ при каждом натуральном n определяется как количество решений диофантова уравнения вида $n = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3$ и функции $r(n)$ – число решений уравнения $x_1^2 + x_2^2 = n$ в целых числах x_1 x_2. Известа следующая формула ([51], с. 17)

$$r(n) = 4\rho(n), \qquad \rho(n) = \sum_{d \backslash n} \chi_4(d), \quad \chi_4(d) = \sin\frac{\pi d}{2},$$

$\chi_4(d)$–неглавный характер по модулю 4 и арифметическая функция $\rho(n)$ – мультипликативная функция. Следовательно, мультипликативной является их произведение функции $s(n) = \rho(n)t(n)$.

Во втором параграфе первой главы для функции $s(n)$ доказана теорема 1.1 о представление её производящего ряда.

Теорема 1.1 *Для производящего ряда Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^s}$$

функции $s(n)$ *справедливо равенство*

$$f(s)=\zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s),$$

где χ_q *— неглавный характер по модулю* q, *а также равенство*

$$\mathscr{B}(s)=\left(1-\frac{2}{3^{2s}}+\frac{3}{3^{4s}}\right)\prod_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1-\frac{3}{p^{2s}}+\frac{2}{p^{3s}}\right)\prod_{p\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1+\frac{3}{p^{2s}}-\frac{2}{p^{3s}}\right)\times$$
$$\times\prod_{p\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1+\frac{3}{p^{2s}}\right)\prod_{p\equiv 11\ (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right),$$

причём бесконечное произведение $\mathscr{B}(s)$ *сходится абсолютно при всех* s *с условием* $\Re s>0,5$.

Эта теорема и соотношение $S_\alpha(x)=12\mathcal{S}_\alpha(x)$, где

$$\mathcal{S}_\alpha(x)=\sum_{n\le x}s(n)\left(1-\frac{n}{x}\right)^\alpha,$$

позволяет методом контурного интегрирования найти асимптотическую формулу для суммы

$$S_\alpha(x)=\sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x}r(\varphi(z_1,z_2,z_3))\left(1-\frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^\alpha,$$

то есть для «среднего Рисса веса», веса α функции суммы квадратов, распространенных на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$.

Вторая глава состоит из двух параграфов. В первом параграфе приведены вспомогательные утверждения.

Второй параграф посвящен среднему Риссу веса α коэффициентов ряда Дирихле, другими словами аналогу формулы Перрона для средних Рисса порядка α, то есть:

$$\Phi(x,\alpha)=\sum_{n\le x}a_n\left(1-\frac{n}{x}\right)^\alpha,$$

где α–положительное вещественное число. Сформулируем этот результат.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $h(s)$ *комплексного переменного* $s=\sigma+it$ *представляется рядом Дирихле вида*

$$h(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{n^s},$$

который сходится абсолютно при $Re(s) = \sigma > 1$. *Далее, пусть* $A(n)$ *– монотонно возрастающая функция от* n *и* $|a_n| \le A(n)$ *при всех* n. *Пусть, также,* $\beta > 0$, $\delta > 0$ *и при* $\sigma \to 1+0$ *выполняется асимптотическая оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} \ll (\sigma - 1)^{-\beta}.$$

Тогда при всех $b \ge 1 + \delta$, *любом* x *вида* $x = N + \frac{1}{2}$, *где* N *– натуральное число, и* $T \ge 2$ *справедливо равенство*

$$\Phi(x,\alpha) = \sum_{n\le x} a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} h(s) x^s B(s, \alpha+1) ds +$$

$$+ O\left(\frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^{\beta}}\right) + O\left(\frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}}\right).$$

Следует заметить, что аналогичный результат доказала О. В. Колпакова [49, 50].

Третья глава состоит из трёх параграфов и посвящена выводу асимптотических формул для “средних Рисса” веса $\alpha \ge 0$ арифметических функций, распространенных на значения тернарной кубической формы

$$\varphi = \varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3, \quad z_1, z_2, z_3 \in Z.$$

В первом параграфе приведены вспомогательные утверждения.

Во втором параграфе третьей главы доказывается теорема 3.1 об асимптотической формуле для суммы

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} \tau_k(\varphi(z_1, z_2, z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1, z_2, z_3)}{x}\right)^{\alpha},$$

то есть для “среднего Рисса” веса $\alpha \ge 0$ многомерной функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha \ge 0$ *– произвольное вещественное число, тогда при* $k > 3k_1(1+\alpha)$, $k_1 = 79,95$ *справедлива следующая асимптотическая* *формула*

$$T_{\alpha,k}(x) = xQ_{2k-1}(\ln x) + R_{\alpha,k}(x),$$

где $Q_{2k-1}(y)$ *— многочлен степени* $2k-1$, *определяемым равенством*

$$xQ_{2k-1}(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^{2k}(s) L^k(s,\chi) g_k(s) x^s B(s,\alpha+1),$$

кроме того, для остаточного члена $R_{\alpha,k}(x)$ *справедлива оценка вида*

$$R_{\alpha,k}(x) \ll_\varepsilon x^{1-\delta_{k,\alpha,a}+\varepsilon}, \quad \delta_{k,\alpha,a} = \left(\frac{2+3\alpha}{6a(k-k_1)}\right)^{2/3},$$

где $a \le 4,45$.

Эта теорема является обобщением для "среднего Рисса" веса $\alpha \ge 0$, теоремы Е.Е. Баядилова [4, 5, 6] об асимптотической формуле для среднего значения

$$T_{0,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} \tau_k(\varphi(z_1,z_2,z_3)),$$

многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ при условии, что n пробегает значения, которые принимает тернарная кубическая формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$.

Теорема 3.1 также является обобщением вышеупомянутой теоремы О. В. Колпаковой [31, 32] о средних Рисса многомерной функции делителей с произвольным значением веса $\alpha \ge 0$ в случае, когда множество натуральных чисел не превосходящих x заменяется на множество значений тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$, не превосходящих x, $z_1,z_2,z_3 \in Z$, причем переменные z_1, z_2, z_3 принимают целые значения.

В третьем параграфе третьей главы доказывается теорема 3.2 об асимптотической формуле для суммы

$$S_\alpha(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} r(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^\alpha,$$

то есть для "среднего Рисса" веса $\alpha \ge 0$ функции суммы квадратов, распространенной на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$.

Теорема 3.2 *Пусть $\alpha \geq 0$ – произвольное вещественное число, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$S_\alpha(x) = 12xQ_\alpha(\ln x) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где $Q_\alpha(y)$ — линейный многочлен, определяемый равенством

$$xQ_\alpha(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s)x^s B(s,\alpha+1).$$

Как мы уже отметили, величина $S_0(x)$ выражает собой количество решений диофантова уравнения вида

$$x_1^2 + x_2^2 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3$$

относительно целых неизвестных x_1, x_2 и z_1, z_2, z_3 при условии $x_1^2 + x_2^2 \leq N$.

В заключение автор выражает благодарность З.Х.Рахмонову за научное руководство, постоянное внимание и помощь в работе.

Глава 1

Производящая функция

1.1.Вспомогательные утверждения

Обозначим через $t_0(n)$ количество представлений натурального n в виде

$$n = \varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3,$$

где z_1, z_2, z_3 — некоторые целые числа. Положим также

$$t(n) = \frac{1}{3}t_0(n).$$

Такое определение приводится в [1], также в [2, 3], и показано, что имеет место следующее утверждение:

Лемма 1.1. *Функция натурального аргумента $t(n)$ является мультипликативной и при этом для всякого простого числа p и всякого натурального числа λ имеют место равенства*

$$t(p^\lambda) = \begin{cases} 2(\lambda - 1), & \text{если } p = 3,\ \lambda \geq 1; \\ \dfrac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 3; \\ \left[\dfrac{\lambda}{2}\right] + 1, & \text{если } p \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Доказательство см. в [1].

В лемме 1.1 переходя от сравнения по модулю 3 к сравнению по модулю 12 напишем её в следующем удобном нам виде:

Лемма 1.2. *Для всякого простого числа p и всякого натурального числа α имеют место равенства*

$$t(p^\alpha)=\begin{cases}2(\alpha-1), & \text{если } p=3 \text{ и } \alpha\ge 1;\\[2ex] \left[\dfrac{\alpha}{2}\right]+1, & \text{если } p=2 \text{ или } p\equiv j \pmod{12},\ j=5,\ 11;\\[2ex] \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}, & \text{если } p\equiv j \pmod{12},\ \ j=1,\ 7.\end{cases}$$

Для функции $r(n)$ – число решений уравнения $x_1^2+x_2^2=n$ в целых числах x_1 x_2, известно следующая формула ([51], с. 17)

$$r(n)=4\rho(n),\qquad \rho(n)=\sum_{d\backslash n}\chi_4(d),\quad \chi_4(d)=\sin\frac{\pi d}{2}, \tag{1.1}$$

$\chi_4(d)$–неглавный характер по модулю 4 и арифметическая функция $\rho(n)$ – мультипликативная функция.

Лемма 1.3. *Для всякого простого числа p и всякого натурального числа α имеют место равенства*

$$\rho(p^\alpha)=\begin{cases}1, & \text{если } p=2;\\ \frac{1+(-1)^\alpha}{2}, & \text{если } p=3,\ p\equiv j \pmod{12},\ j=7,11;\\ \alpha+1, & \text{если } p\equiv j \pmod{12},\ j=1,5.\end{cases}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь формулой (1.1) вычислим точное значение функции $\rho(p^\alpha)$ для каждого $p=2$, $p=3$ и $p\equiv j\,(\mathrm{mod}\ 12)$, $j=1,5,7,11$. Имеем

$$\rho(2^\alpha)=\sum_{d\backslash 2^\alpha}\sin\frac{\pi d}{2}=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi+\sin 2\pi+\cdots+\sin\pi 2^{\alpha-1}=1;$$

$$\rho(3^\alpha) = \sum_{d\backslash 3^\alpha} \sin\frac{\pi d}{2} = \sum_{m=0}^{\alpha} \sin\frac{\pi 3^m}{2} = \sum_{m=0}^{\alpha} (-1)^m = \frac{1+(-1)^\alpha}{2}.$$

Если $p \equiv j \pmod{12}$, $j = 1, 5$, то $p^\alpha \equiv 1 \pmod 4$, поэтому

$$\rho(p^\alpha) = \sum_{j=0}^{\alpha} \sin\frac{\pi p^j}{2} = \sum_{j=0}^{\alpha} 1 = \alpha + 1.$$

Если же $p \equiv j \pmod{12}$, $j = 7, 11$, то $p^\alpha \equiv 1 \pmod 4$, если α – чётное и $p^\alpha \equiv 3 \pmod 4$, если α – нечётное. Поэтому

$$\rho(p^\alpha) = \sum_{j=0}^{\alpha} \sin\frac{\pi p^j}{2} = \sum_{m=0}^{\alpha} (-1)^m = \frac{1+(-1)^\alpha}{2}.$$

Лемма 1.4. *Пусть x — неизвестная. Тогда при всех целых $r \geq 0$ имеет место следующее формальное равенство*

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} x^m. \tag{1.2}$$

Здесь, как обычно, полагаем $\binom{n}{r} = 0$ при $n < r$.

Кроме того, справедливы соотношения

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+r}{r} x^{2m} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} (-x)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{r+1}} + \frac{1}{(1+x)^{r+1}}\right),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+1+r}{r} x^{2m+1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} (-x)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{r+1}} - \frac{1}{(1+x)^{r+1}}\right).$$

Доказательство. В $f(r)$ сделав в сумме по n замену переменной суммирования, положив $m = n - r$ и имея ввиду, что

$$\binom{n}{r} = \binom{m+r}{r} = 0, \quad \text{при} \quad 0 \leq n \leq r-1 \quad \text{или} \quad -r \leq n \leq -1$$

найдём

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \sum_{m=-r}^{\infty} \binom{m+r}{r} x^m =$$
$$= \sum_{m=-r}^{-1} \binom{m+r}{r} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} x^m.$$

Формулу (1.2) докажем методом математической индукции по r. Имеем

$$f(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{0} x^n = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}.$$

$$f(1) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+1}{1} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{dx^{m+1}}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+1} =$$
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Принимая за предположение индукции соотношение

$$f(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} x^m = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

имеем

$$
\begin{aligned}
f(r+1) &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r+1}{r+1} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+r+1)!}{m!(r+1)!} x^m = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} \cdot \frac{m+r+1}{r+1} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} \cdot \left(\frac{m}{r+1}+1\right) x^m = \\
&= \frac{1}{r+1} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} x^m = \\
&= \frac{x}{r+1} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} \frac{dx^m}{dx} + \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \\
&= \frac{x}{r+1} \cdot \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} x^m + \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \\
&= \frac{x}{r+1} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(1-x)^{r+1}}\right) + \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \\
&= \frac{x}{r+1} \cdot \frac{(r+1)(1-x)^r}{(1-x)^{2r+2}} + \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \\
&= \frac{x}{(1-x)^{r+2}} + \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \frac{1}{(1-x)^{r+2}}.
\end{aligned}
$$

1.2 .Теорема о представление производящего ряда

В предыдущем параграфе мы рассматривали арифметические функции $t(n)$ и $\rho(n)$, которые являются мультипликативными. Следовательно, мультипликативной является их произведение функции $s(n) = \rho(n)t(n)$.

Рассмотрим «*среднего Рисса веса* α», $\alpha \geq 0$ функции $s(n) = \rho(n)t(n)$, то есть функцию

$$\mathcal{S}_\alpha(N) = \sum_{n \leq N} s(n) \left(1 - \frac{n}{N}\right)^\alpha .$$

В частности величина $S_0(N) = 12\mathcal{S}_0(N)$ выражает собой количество решений указанного выше диофантова уравнения вида

$$x_1^2 + x_2^2 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3$$

относительно целых неизвестных x_1, x_2 и z_1, z_2, z_3 при условии $x_1^2 + x_2^2 \leq N$.

Теорема 1.1. *Для производящего ряда Дирихле*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s(n)}{n^s}$$

функции $s(n)$ *справедливо равенство*

$$f(s)=\zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s),$$

где χ_q *— неглавный характер по модулю* q, *а также равенство*

$$\mathscr{B}(s)=\left(1-\frac{2}{3^{2s}}+\frac{3}{3^{4s}}\right)\prod_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1-\frac{3}{p^{2s}}+\frac{2}{p^{3s}}\right)\prod_{p\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1+\frac{3}{p^{2s}}-\frac{2}{p^{3s}}\right)\times$$
$$\times\prod_{p\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1+\frac{3}{p^{2s}}\right)\prod_{p\equiv 11\ (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right),$$

причём бесконечное произведение $\mathscr{B}(s)$ *сходится абсолютно при всех* s *с условием* $\Re s>0,5$.

Доказательство. В леммах 1.2 и 1.3 арифметические функции $t(n)$ и $\rho(n)$, которые являются мультипликативными, заданы для степеней простых чисел. Следовательно, мультипликативной является их произведение функции $s(n)=\rho(n)t(n)$, значения которого для степеней простых чисел определяется формулой:

$$s(p^\alpha)=\begin{cases}\left[\frac{\alpha}{2}\right]+1, & \text{если } p=2;\\ (\alpha-1)(1+(-1)^\alpha), & \text{если } p=3 \text{ и } \alpha\geq 1;\\ \frac{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}{2}, & \text{если } p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 12);\\ \left(\left[\frac{\alpha}{2}\right]+1\right)(\alpha+1), & \text{если } p\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 12);\\ \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(1+(-1)^\alpha)}{4}, & \text{если } p\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 12);\\ \frac{\left(\left[\frac{\alpha}{2}\right]+1\right)(1+(-1)^\alpha)}{2}, & \text{если } p\equiv 11\ (\mathrm{mod}\ 12).\end{cases}\qquad(1.3)$$

Согласно определению, $s(n)=\frac{1}{12}\psi(n)$, где $\psi(n)$ равно числу решений системы диофантовых уравнений вида

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=n,\\ x^3+y^3+z^3-3xyz=n.\end{cases}$$

Для ряда Дирихле функции $s(n)$ ввиду мультипликативности $s(n)$, имеет место следующее тождество

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{s(p^\alpha)}{p^{\alpha s}},$$

где произведение $\prod_p$ берется по всем простым числам. Разбивая это произведение по всем простым числам вида $p \equiv j \pmod{12}$, $j = 1, 2, 3, 5, 7, 11$ и воспользовавшись формулой (1.3), имеем

$$f(s) = \mathscr{A}_1 \cdot \mathscr{A}_2 \cdot \mathscr{A}_3 \cdot \mathscr{A}_5 \cdot \mathscr{A}_7 \cdot \mathscr{A}_{11}, \tag{1.4}$$

где величины $\mathscr{A}_j$ определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_2 &= \mathscr{A}_2(2^{-s}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1}{2^{\alpha s}},\\
\mathscr{A}_3 &= \mathscr{A}_3(3^{-s}) = 1 + \sum_{\substack{\alpha=2\\ \alpha=2\beta}}^{\infty} \frac{2\alpha - 2}{3^{\alpha s}},\\
\mathscr{A}_1 &= \prod_{p\equiv 1 \pmod{12}} \mathscr{A}_1(p^{-s}), \quad \mathscr{A}_1(p^{-s}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}{2\cdot p^{\alpha s}},\\
\mathscr{A}_5 &= \prod_{p\equiv 5 \pmod{12}} \mathscr{A}_5(p^{-s}), \quad \mathscr{A}_5(p^{-s}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\left(\left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1\right)(\alpha+1)}{p^{\alpha s}},\\
\mathscr{A}_7 &= \prod_{p\equiv 7 \pmod{12}} \mathscr{A}_7(p^{-s}), \quad \mathscr{A}_7(p^{-s}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(1+(-1)^\alpha)}{4\cdot p^{\alpha s}},\\
\mathscr{A}_{11} &= \prod_{p\equiv 11 \pmod{12}} \mathscr{A}_{11}(p^{-s}), \quad \mathscr{A}_{11}(p^{-s}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\left(\left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1\right)(1+(-1)^\alpha)}{2\cdot p^{\alpha s}}.
\end{aligned}$$

В этих формулах при всех простых числах p обозначим через x величину $x = p^{-s}$ и вычислим суммы рядов $\mathscr{A}_j(x)$, $j = 1, 2, 3, 5, 7, 11$, воспользовавшись леммой 1.4. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_2(x) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\left[\frac{\alpha}{2}\right]+1\right)x^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{\infty}(\alpha+1)x^{2\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty}(\alpha+1)x^{2\alpha+1} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty}(2\alpha+1)x^{2\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty}x^{2\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty}(2\alpha+2)x^{2\alpha+1}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty}\binom{2\alpha+1}{1}x^{2\alpha} + \frac{1}{1-x^2} + \sum_{\alpha=0}^{\infty}\binom{2\alpha+2}{1}x^{2\alpha+1}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right) + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_3(x) &= 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty}(4\alpha-2)x^{2\alpha} = 3 + 2\sum_{\alpha=0}^{\infty}(2\alpha-1)x^{2\alpha} = \\
&= 3 + 2\sum_{\alpha=0}^{\infty}(2\alpha+1)x^{2\alpha} - 4\sum_{\alpha=0}^{\infty}x^{2\alpha} = \\
&= 3 + 2\sum_{\alpha=0}^{\infty}\binom{2\alpha+1}{1}x^{2\alpha} - \frac{4}{1-x^2} = 3 + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{4}{1-x^2} = \\
&= \frac{3(1-x^2)^2+(1+x)^2+(1-x)^2-4(1-x^2)}{(1-x)^2(1+x)^2} = \frac{1-2x^2+3x^4}{(1-x)^2(1+x)^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_1(x) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}{2}x^{\alpha} = \\
&= \sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{2\cdot 3}\cdot 3x^{\alpha} - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}\cdot 2x^{\alpha}\right) = \\
&= 3\sum_{\alpha=0}^{\infty}\binom{\alpha+3}{3}x^{\alpha} - 2\sum_{\alpha=0}^{\infty}\binom{\alpha+2}{2}x^{\alpha} = \\
&= \frac{3}{(1-x)^4} - \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{1+2x}{(1-x)^4} = \frac{1-3x^2+2x^3}{(1-x)^6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_5(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1\right)(\alpha+1)x^{\alpha} = \\
&= \sum_{\alpha=0}^{\infty}(\alpha+1)(2\alpha+1)x^{2\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty}(\alpha+1)\,(2\alpha+2)x^{2\alpha+1} = \\
&= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)}{2}x^{2\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(2\alpha+2)(2\alpha+3-1)}{2}x^{2\alpha+1} = \\
&= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{2\alpha+2}{2}x^{2\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{2\alpha+1+2}{2}x^{2\alpha+1} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{2\alpha+1+1}{1}x^{2\alpha+1} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) = \\
&= \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^2} = \frac{1+x+2x^2}{(1-x)^3(1+x)^2} = \frac{1+x^2-2x^3}{(1-x)^4(1+x)^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_7(x) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)}{2}x^{2\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{2\alpha+2}{2}x^{2\alpha} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3}\right) = \frac{1+3x^2}{(1-x)^3(1+x)^3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{11}(x) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty}(\alpha+1)x^{2\alpha} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty}(2\alpha+1)x^{2\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} x^{2\alpha}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \binom{2\alpha+1}{1}x^{2\alpha} + \frac{1}{1-x^2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) + \frac{1}{1-x^2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2}{(1-x)^2(1+x)^2} + \frac{1}{1-x^2}\right) = \\
&= \frac{1}{2(1-x)^2}\left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2} + \frac{1-x}{1+x}\right) = \\
&= \frac{1}{2(1-x)^2}\frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}.
\end{aligned}$$

По модулю 3 существует единственный неглавный характер Дирихле $\chi_3(n)$, причем

$$\chi_3(n) = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 3; \\ -1, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

По модулю 4 также существует единственный неглавный характер Дирихле $\chi_4(n)$, причем

$$\chi_4(n) = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 4; \\ -1, & \text{если } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

По модулю 12 также существует единственный примитивный характер Дирихле $\chi_{12}(n) = \chi_3(n)\chi_4(n)$, причем

$$\chi_{12}(n) = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } n \equiv j \pmod{12},\ j = 1, 11; \\ -1, & \text{если } n \equiv j \pmod{12},\ j = 5, 7. \end{cases}$$

Воспользовавшись полученной формулой для ряда $\mathscr{A}_2(x)$ и имея ввиду, что

$$\chi_3(2) = -1, \qquad \chi_4(2) = \chi_{12}(2) = 0,$$

найдем

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_2(2^{-s}) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-2} \left(1 + \frac{1}{2^s}\right)^{-1} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-2} \left(1 - \frac{\chi_3(2)}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_4(2)}{2^s}\right)^{-2} \left(1 - \frac{\chi_{12}(2)}{2^s}\right)^{-1}.$$

Воспользовавшись полученной формулой для ряда $\mathscr{A}_3(x)$ и имея ввиду, что

$$\chi_3(3) = \chi_{12}(3) = 0, \qquad \chi_4(3) = -1,$$

найдем

$$\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_1(3^{-s}) = \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-2} \left(1 + \frac{1}{3^s}\right)^{-2} \left(1 - \frac{2}{3^{2s}} + \frac{3}{3^{4s}}\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-2} \left(1 - \frac{\chi_3(3)}{3^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_4(3)}{3^s}\right)^{-2} \left(1 - \frac{\chi_{12}(3)}{3^s}\right)^{-1} \cdot \mathscr{B}_3(s),$$
$$\mathscr{B}_3(s) = \left(1 - \frac{2}{3^{2s}} + \frac{3}{3^{4s}}\right).$$

Воспользовавшись полученной формулой для ряда $\mathscr{A}_1(x)$ и имея ввиду, что при $p \equiv 1 \pmod{12}$ имеет место соотношение

$$\chi_3(p) = \chi_4(p) = \chi_{12}(p) = 1,$$

найдем

$$\mathscr{A}_1 = \prod_{p\equiv 1 \pmod{12}} \mathscr{A}_1(p^{-s}) = \prod_{p\equiv 1 \pmod{12}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-6} \left(1 - \frac{3}{p^{2s}} + \frac{2}{p^{3s}}\right) =$$
$$= \mathscr{B}_1(s) \prod_{p\equiv 1 \pmod{12}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2} \left(1 - \frac{\chi_3(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p^s}\right)^{-2} \left(1 - \frac{\chi_{12}(p)}{p^s}\right)^{-1},$$
$$\mathscr{B}_1(s) = \prod_{p\equiv 1 \pmod{12}} \left(1 - \frac{3}{p^{2s}} + \frac{2}{p^{3s}}\right).$$

Воспользовавшись полученным формулой для ряда $\mathscr{A}_5(x)$ и имея в виду что при $p \equiv 5 \pmod{12}$ имеет место соотношение

$$\chi_3(p) = \chi_{12}(p) = -1, \qquad \chi_4(p) = 1,$$

найдем

$$\mathscr{A}_5 = \prod_{p\equiv 5 \pmod{12}} \mathscr{A}_5(p^{-s}) = \prod_{p\equiv 5 \pmod{12}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-4} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-2} \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} - \frac{2}{p^{3s}}\right) =$$
$$= \mathscr{B}_5(s) \prod_{p\equiv 5 \pmod{12}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2} \left(1 - \frac{\chi_3(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p^s}\right)^{-2} \left(1 - \frac{\chi_{12}(p)}{p^s}\right)^{-1},$$
$$\mathscr{B}_5(s) = \prod_{p\equiv 5 \pmod{12}} \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} - \frac{2}{p^{3s}}\right).$$

Воспользовавшись полученной формулой для ряда $\mathscr{A}_7(x)$ и имея ввиду, что при $p \equiv 7 \pmod{12}$ имеет место соотношение

$$\chi_3(p) = 1, \qquad \chi_4(p) = \chi_{12}(p) = -1,$$

найдем

$$\mathscr{A}_7 = \prod_{p\equiv 7 \pmod{12}} \mathscr{A}_7(p^{-s}) = \prod_{p\equiv 7 \pmod{12}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-3}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-3}\left(1+\frac{3}{p^{2s}}\right) =$$
$$= \mathscr{B}_7(s) \prod_{p\equiv 7 \pmod{12}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2}\left(1-\frac{\chi_3(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p^s}\right)^{-2}\left(1-\frac{\chi_{12}(p)}{p^s}\right)^{-1},$$
$$\mathscr{B}_7(s) = \prod_{p\equiv 7 \pmod{12}} \left(1+\frac{3}{p^{2s}}\right).$$

Воспользовавшись полученной формулой для ряда $\mathscr{A}_{11}(x)$ и имея ввиду, что при $p \equiv 11 \pmod{12}$ имеет место соотношение

$$\chi_3(p) = \chi_4(p) = -1, \qquad \chi_{12}(p) = 1,$$

найдем

$$\mathscr{A}_{11} = \prod_{p\equiv 11 \pmod{12}} \mathscr{A}_1(p^{-s}) = \prod_{p\equiv 11 \pmod{12}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-3}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-3}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) =$$
$$= \mathscr{B}_{11}(s) \prod_{p\equiv 11 \pmod{12}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2}\left(1-\frac{\chi_3(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p^s}\right)^{-2}\left(1-\frac{\chi_{12}(p)}{p^s}\right)^{-1},$$
$$\mathscr{B}_{11}(s) = \prod_{p\equiv 11 \pmod{12}} \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right).$$

Подставляя найденные значения величин $\mathscr{A}_j$, $j = 1, 2, 3, 5, 7, 11$ в формулу (1.4) и имея в виду, что

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2}\left(1-\frac{\chi_3(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p^s}\right)^{-2}\left(1-\frac{\chi_{12}(p)}{p^s}\right)^{-1} =$$
$$= \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})$$

найдем

$$f(s) = \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12}) \cdot \mathscr{B}(s),$$

где

$$\mathscr{B}(s) = \mathscr{B}_3(s)\mathscr{B}_1(s)\mathscr{B}_5(s)\mathscr{B}_7(s)\mathscr{B}_{11}(s) =$$
$$= \left(1 - \frac{2}{3^{2s}} + \frac{3}{3^{4s}}\right) \prod_{p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 12)} \left(1 - \frac{3}{p^{2s}} + \frac{2}{p^{3s}}\right) \prod_{p\equiv 5 (\mathrm{mod}\ 12)} \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} - \frac{2}{p^{3s}}\right)$$
$$\prod_{p\equiv 7\, (\mathrm{mod}\ 12)} \left(1 + \frac{}{p^{2s}}\right) \prod_{p\equiv 11\, (\mathrm{mod}\ 12)} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right).$$

Вводя функцию $b(p^k)$, которая для целых степеней простых чисел определяется соотношением

$$b(p^k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 1,\ k \geq 4 \text{ или } p \equiv j\, (\mathrm{mod}\ 12) \text{ и } k = 3,\ j = 7,\ 11; \\ -3, & \text{если } p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 12) \text{ и } k = 2; \\ 2, & \text{если } p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 12) \text{ и } k = 3; \\ 3, & \text{если } p \equiv j\, (\mathrm{mod}\ 12) \text{ и } k = 2,\ j = 5,\ 7; \\ -2, & \text{если } p \equiv 5\, (\mathrm{mod}\ 12) \text{ и } k = 3. \end{cases}$$

представим бесконечное произведение $\mathscr{B}(s)\mathscr{B}_3^{-1}(s)$ в виде

$$\frac{\mathscr{B}(s)}{\mathscr{B}_3(s)} = \prod_{p\neq 2;3} \left(1 + \frac{b(p^2)}{p^{2s}} + \frac{b(p^3)}{p^{3s}}\right),$$

Отсюда для ненулевых $b(p^\alpha)$, $2 \leq \alpha \leq 3$ вытекает оценка

$$|b(p^\alpha)| \leq 3 \leq \alpha + 1 = \tau(p^\alpha). \tag{1.5}$$

Выполняя перемножение сумм, стоящих под знаком бесконечного произведения, получим

$$\frac{\mathscr{B}(s)}{\mathscr{B}_3(s)} = 1 + \sum_{m=25}^{\infty} \frac{\beta(m)}{m^s}.$$

Здесь $\beta(m)$ представляет собой некоторую функцию натурального аргумента m, которая задается по каноническому разложению

$$m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

на простые сомножители. При этом

$$\beta(m) = 0,$$

если выполняется одно из следующих условий

- $\min(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 1$;
- $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geq 4$;
- $\min(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geq 2,\ \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \alpha_i = 3,\ p_i \equiv j (\mathrm{mod}\ 12)$ и $j = 7,\ 11$,

а при выполнении условий

$$\min(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geq 2, \quad \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \alpha_i = 3, \quad p_i \not\equiv j \pmod{12}, \quad j = 7,\ 11,$$

имеет место равенство

$$\beta(m) = b(p_1^{\alpha_1}) \ldots b(p_r^{\alpha_r}),$$

и $\beta(m) \neq 0$.

Отсюда следует, что если $\beta(m) \neq 0$, то степень простых чисел входящих в каноническое разложение числа m равна 2 и 3, поэтому число m можно представить в виде

$$m = x^2 y^3, \qquad (x, y) = 1,$$

Следовательно для ненулевых $\beta(m)$ воспользовавшись соотношением (1.5), найдем

$$|\beta(m)| = |b(p_1^{\alpha_1})| \ldots |b(p_r^{\alpha_r})| \leq \tau(p_1^{\alpha_1}) \ldots \tau(p_r^{\alpha_r}) = \tau(m).$$

Следовательно, в силу оценки

$$\tau(m) \ll_\varepsilon m^\varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, имеем

$$|\beta(m)| = |\beta(x^2 y^3)| \leq \tau(x^2 y^3) \leq \tau(x^2)\tau(y^3) \ll_\varepsilon x^\varepsilon y^\varepsilon.$$

Отсюда вытекает следующая оценка (справедливая в случае абсолютной сходимости) всех участвующих в ней бесконечных рядов

$$\left| \frac{\mathscr{B}(s)}{\mathscr{B}_3(s)} \right| \leq 1 + \sum_{m=25}^{\infty} \frac{|\beta(m)|}{m^\sigma} \ll_\varepsilon \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{x^\varepsilon}{x^{2\sigma}} \frac{y^\varepsilon}{y^{3\sigma}} =$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2\sigma-\varepsilon}} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y^{3\sigma-\varepsilon}} = \zeta(2\sigma - \varepsilon)\zeta(3\sigma - \varepsilon).$$

Ряды в правой части последнего неравенства составлены из положительных слагаемых и они сходятся при всех σ с условием

$$2\sigma-\varepsilon>1, \quad \text{т.е. при} \quad \sigma>\frac{1+\varepsilon}{2}.$$

А так как $\varepsilon>0$ можно считать сколь угодно малым, то произведение, где

$$\frac{\mathscr{B}(s)}{\mathscr{B}_3(s)}=\prod_{p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1-\frac{3}{p^{2s}}+\frac{2}{p^{3s}}\right)\prod_{p\equiv 5 (\mathrm{mod}\ 12)}\left(1+\frac{3}{p^{2s}}-\frac{2}{p^{3s}}\right)\times$$
$$\times\prod_{p\equiv 7 \,(\mathrm{mod}\ 12)}\left(1+\frac{3}{p^{2s}}\right)\prod_{p\equiv 11 \,(\mathrm{mod}\ 12)}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)$$

абсолютно сходится и ограничено в любой области, определяемой условием $\Re s>0,5$.

Функция $\mathscr{B}_3(s)$ будет представлять собой конечный ряд Дирихле, и поэтому она является ограниченной функцией во всякой полуплоскости комплексной плоскости, определяемой условием $\sigma>\sigma_0>0$, где σ_0 — произвольное вещественное число.

Тем самым теорема полностью доказана.

Глава 2

Аналог формулы Перрона для средних Рисса порядка α

2.1 Вспомогательные утверждения

Определение 1. *Гамма-Функция Эйлера* $\Gamma(s)$ *задается равенством*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

где γ *— постоянная Эйлера.*

Из определения следует, что $\Gamma^{-1}(s)$ – целая функция порядка не выше первого и аналитическая во всей s – плоскости, за исключением точек $s = 0, -1, -2, \ldots$, где она имеет простые полюсы.

Лемма 2.1. ***(Формула Эйлера.)*** *Имеет место равенство*

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Доказательство см. [52].

Следствие 2.1.1.

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)^s n}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}.$$

Следствие 2.1.2.

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

Лемма 2.2. *Имеет место равенство*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Доказательство см. [52].

Лемма 2.3. *При $\delta > 0$ и $-\pi + \delta \le \arg s \le \pi - \delta$ имеет место формула (Стирлинга):*

$$\log\Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s + \log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

причём постоянная в знаке O зависит только от δ.

Доказательство см. [52].

Следствие 2.1.3. *Функция $\Gamma^{-1}(s)$ является целой первого порядка.*

Следствие 2.1.4. *При $\alpha \le \sigma \le \beta$ $t \to +\infty$*

$$\Gamma(\sigma + it) = t^{\sigma+it-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi t}{2} - it + i\frac{\pi}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)} \sqrt{2\pi} \left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}$$

причем постоянная в знаке O зависит только от α, β.

Обозначим, как обычно, через $B(u,v)$ бетта-функцию Эйлера, которая при $Re(u) > 0$, $Re(v) > 0$ задается равенством

$$B(u,v) = \int_0^1 u^{u-1}(1-x)^{v-1}dx.$$

Лемма 2.4. *Справедливо равенство*

$$B(s, \alpha+1) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(s+\alpha+1)}.$$

Доказательство см. [52].

Лемма 2.5. *Для бетта-функции Эйлера имеют места соотношения:*

$$B(s,\alpha+1)=\frac{1}{s}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{(s+m)m!} \tag{2.1}$$

при $s\neq -m$, где m – неотрицательные целые числа;

$$B(s,\alpha+1)\sim |s|^{-\alpha-1} \tag{2.2}$$

при постоянном $\alpha\geq 0$ и $|s|\to\infty$.

Доказательство утверждения (2.1) см.[53], с. 36; а утверждения (2.2) см. [54], с. 67.

Лемма 2.6. *Пусть a, T, y – положительные вещественные числа, причём $y\neq 1$; $\alpha\geq 0$; $s=\sigma+it$ – комплексная переменная. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-it}^{a+it} y^s B(s,\alpha+1)ds-\delta_\alpha(y)\right|\leq \frac{y^a\Gamma(\alpha+1)}{\pi T^{\alpha+1}|\ln y|},\quad \text{если}\quad y\neq 1,$$

где величина $\delta_\alpha(y)$ определяется равенствами

$$\delta_\alpha(y)=\begin{cases}0, & \text{при } 0<y<1;\\ \left(1-\frac{1}{y}\right)^\alpha, & \text{при } y>1.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть сначала $0<y<1$. Рассмотрим при $a<b$ интеграл по контуру Γ, представляющая собой прямоугольник с вершинами в точках $a\pm iT$ и $b\pm iT$:

$$\begin{aligned} J&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma y^s B(s,\alpha+1)ds=\\ &=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{a-iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{b+iT}+\int_{b+iT}^{b-iT}+\int_{b-iT}^{a-iT}\right)y^s B(s,\alpha+1)ds=\\ &=J_1+J_2+J_3+J_4.\end{aligned}$$

Интеграл J_1 по правой боковой стороне прямоугольника в точности совпадает с интегралом из формулировки нашей леммы. Внутри этого контура подинтегральная функция является аналитической, и поэтому $J = 0$

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0,$$

или

$$J_1 = -J_2 - J_3 - J_4.$$

Переходя к неравенствам, при любом фиксированном $b > a$ получим

$$|J_1| \leq |J_2| + |J_3| + |J_4|. \tag{2.3}$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части неравенства. Сначала оценим интегралы по горизонтальным отрезкам прямых

$$|J_2| = |J_4| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_a^b y^\sigma |B(s, \alpha + 1)| d\sigma.$$

Пользуясь представлением функции $B(s, \alpha+1)$ через гамма–функции (лемма 2.4), то есть соотношением

$$B(s, \alpha + 1) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(s + \alpha + 1)}$$

находим

$$|J_2| = |J_4| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_a^b y^\sigma \frac{|\Gamma(s)\Gamma(\alpha + 1)|}{|\Gamma(s + \alpha + 1)|} d\sigma =$$

$$= \frac{|\Gamma(\alpha + 1)|}{2\pi} \int\limits_a^b y^\sigma \frac{|\Gamma(s)|}{|\Gamma(s + \alpha + 1)|} d\sigma.$$

Далее, по формуле Стирлинга (лемма 2.3) оценим Γ - функцию

$$|\Gamma(s)| = \left| T^{\sigma + iT - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi T}{2} - iT + i\frac{\pi}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)} \sqrt{2\pi} \right| \left(1 + O\left(T^{-1}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, T^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi T}{2}} \left(1 + O\left(T^{-1}\right)\right),$$

$$|\Gamma(s+\alpha+1)| = \left| T^{\sigma+iT+\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi T}{2} - iT + i\frac{\pi}{2}\left(\sigma+\alpha+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{2\pi}(1+O(T^{-1})) \right| =$$
$$= \sqrt{2\pi}\, T^{\sigma+\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi T}{2}} (1+O(T^{-1})).$$

Следовательно,

$$\frac{|\Gamma(s)|}{|\Gamma(s+\alpha+1)|} = \frac{\sqrt{2\pi}\, T^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi T}{2}} \left(1+O\left(T^{-1}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}\, T^{\sigma+\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi T}{2}} (1+O(T^{-1}))} =$$
$$= \frac{1+O\left(T^{-1}\right)}{T^{\alpha+1}(1+O(T^{-1}))} = \frac{1}{T^{\alpha+1}} \left(1+O\left(\frac{1}{T}\right)\right).$$

Поэтому

$$|J_2| = |J_4| \le \frac{|\Gamma(\alpha+1)|}{2\pi T^{\alpha+1}} \left(1+O\left(\frac{1}{T}\right)\right) \int\limits_a^b y^\sigma d\sigma.$$

Таким образом, учитывая, что

$$\left| \int\limits_a^b y^\sigma d\sigma \right| = \frac{y^a - y^b}{|\ln y|},$$

получаем итоговую оценку интеграла

$$|J_2| = |J_4| \le \frac{(y^a - y^b)\Gamma(\alpha+1)}{2\pi T^{\alpha+1}|\ln y|} \left(1+O\left(\frac{1}{T}\right)\right) \le \frac{y^a \Gamma(\alpha+1)}{2\pi T^{\alpha+1}|\ln y|}.$$

Кроме того, если $b > 1$, воспользовавшись утверждением (2.2) леммы 2.5 найдем:

$$|J_3| \le \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{-T}^{T} y^{b+it} B(s,\alpha+1) dt \right| \ll$$
$$\ll \frac{y^b}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|s|^{\alpha+1}} \le \frac{y^b}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \ll y^b.$$

Подставляя найденные оценки для J_2, J_3 и J_4 в соотношение (2.3) получим

$$|J_1| \le |J_2| + |J_3| + |J_4| \le \frac{y^a \Gamma(\alpha+1)}{\pi T^{\alpha+1}|\ln y|} + O(y^b),$$

Поскольку $0 < y < 1$, при $b \to \infty$ имеем $y^b \to 0$, и переходя к пределу в оценке для величины $|J_1|$, получаем неравенство

$$|J_1| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-it}^{a+it} y^s B(s, \alpha+1) ds - \delta_\alpha(y) \right| \leq \frac{y^a \Gamma(\alpha+1)}{\pi T^{\alpha+1} |\ln y|}, \quad \delta_\alpha(y) = 0.$$

В случае $y > 1$ положим $b < -1$ и рассмотрим интеграл по контуру Γ_1, представляющий собой прямоугольник с вершинами в точках $a \pm iT$ и $b \pm iT$:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} y^s B(s, \alpha+1) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{a-iT}^{a+iT} + \int\limits_{a+iT}^{b+iT} + \int\limits_{b+iT}^{b-iT} + \int\limits_{b-iT}^{a-iT} \right) y^s B(s, \alpha+1) ds = \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В этом случае также интеграл J_1 по правой боковой стороне прямоугольника в точности совпадает с интегралом из формулировки нашей леммы и подинтегральная функция имеет простые полюса в точках 0 и $-m$, $m \in N$. Пользуясь утверждением (2.1) леммы 2.5, посчитаем вычеты подинтегральной функции в этих точках:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{s=0} (y^s B(s, \alpha+1)) = \lim_{s \to 0} (y^s B(s, \alpha+1) s) = \\ &\quad = \lim_{s \to 0} \left(\frac{y^s}{s} s + \sum_{m+1}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-m+1) y^s}{(s+m) m!} s \right) = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{s=-m} (y^s B(s, \alpha+1)) = \lim_{s \to -m} (y^s B(s, \alpha+1)(s+m)) = \\ &\quad = \lim_{s \to -m} \left(\frac{y^s}{s} (s+m) + \sum_{m+1}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-m+1) y^s}{(s+m) m!} (s+m) \right) = \\ &\quad = (-1)^m \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha-m+1)}{m!} y^{-m}. \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме Коши имеем

$$J = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} y^{-m} =$$
$$= 1 - \frac{\alpha}{1!} y^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} y^{-2} + \ldots + (-1)^m \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} y^{-m} + \ldots .$$

Последний ряд является биномиальным рядом с показателем α, т.е.

$$J = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\alpha}.$$

Тогда подставляя найденное значение интеграла J в левую часть (2.4) получим

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\alpha}.$$

Отсюда следует

$$J_1 - \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\alpha} = -J_2 - J_3 - J_4.$$

Откуда переходя к неравенствам имеем

$$\left| J_1 - \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\alpha} \right| \leq |J_2| + |J_3| + |J_4|.$$

Оценивая интегралы J_2, J_3, J_4 точно так же, как в случае $0 < y < 1$ получаем

$$|J_2| = |J_4| \leq \frac{y^a \Gamma(\alpha+1)}{2\pi T^{\alpha+1} |\ln y|}, \quad |J_3| \ll y^b.$$

Отсюда при $b \to -\infty$ имеем

$$|J_1| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-it}^{a+it} y^s B(s, \alpha+1) ds - \delta_\alpha(y) \right| \leq \frac{y^a \Gamma(\alpha+1)}{\pi T^{\alpha+1} |\ln y|}, \quad \delta_\alpha(y) = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\alpha}.$$

Тем самым лемма 2.6 полностью доказана.

2.2 Аналог формулы Перрона для средних Рисса порядка α

Докажем аналог формулы Перрона для средних Рисса порядка α, то есть для

$$\Phi(x,\alpha)=\sum_{n\le x}a_n\left(1-\frac{n}{x}\right)^{\alpha},$$

где α–положительное вещественное число.

Сначала докажем вспомогательную лемму, которую будем использовать при выводе аналога формулы Перрона.

Лемма 2.7. *Пусть x – полуцелое число вида $x=N+0,5$ и*

$$\frac{2}{3}x<n<\frac{3}{2}x,$$

тогда справедливо неравенство

$$\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}<\frac{2x}{|x-n|}.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $\frac{2}{3}x<n<x$;
2. $x<n<\frac{3}{2}x$.

Случай 1. Имеем цепочку эквивалентных неравенств

$$\frac{2}{3}x<n<x\Leftrightarrow -x<-n<-\frac{2}{3}x\Leftrightarrow 0<x-n<\frac{x}{3}\Leftrightarrow 0<\frac{x-n}{n}<\frac{x}{3n}.$$

Отсюда и из условия $n>\frac{2}{3}x$ получим

$$0<\frac{x-n}{n}<\frac{1}{2}.$$

Из разложения функции $\ln(1+y)$ в степенной ряд:

$$\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{y^k}{k}+\ldots.$$

при $0 < y < \frac{1}{2}$ следует неравенство

$$\ln(1+y) = \frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\right) + \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right) + \ldots > \frac{y}{2}. \tag{2.5}$$

Положив в этой формуле $y = \frac{m-\frac{1}{2}}{x}$, имеем

$$\ln\frac{x}{n} = \ln\left(1 + \frac{x-n}{n}\right) > \frac{x-n}{2n}.$$

Правая часть этого неравенства для всех n является положительной величиной, поэтому

$$\left(\ln\frac{x}{n}\right)^{-1} < \frac{2n}{x-n} < \frac{2x}{x-n}.$$

Случай 2. В этом случае для всех $x < n < \dfrac{3}{2}x$ имеет место соотношение

$$\left|\ln\frac{x}{n}\right| = -\ln\frac{x}{n} = \ln\frac{n}{x}.$$

Имеем цепочку эквивалентных неравенств

$$x < n < \frac{3}{2}x \Leftrightarrow \frac{2}{3}n < x < n \Leftrightarrow \frac{2}{3}n < x < n \Leftrightarrow -n < -x < -\frac{2}{3}n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < n - x < \frac{n}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{n-x}{x} < \frac{n}{3x}.$$

Отсюда, пользуясь условием $n < \frac{3}{2}x$, находим

$$0 < \frac{n-x}{x} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством (2.5) найдем

$$\ln\frac{n}{x} = \ln\left(1 + \frac{n-x}{x}\right) > \frac{n-x}{2x}.$$

Представляя это неравенство в виде

$$\frac{1}{\left|\ln\frac{x}{n}\right|} = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{n-x}{x}\right)} < \frac{x}{n-x} = \frac{x}{|x-n|}.$$

получим утверждение леммы.

Теорема 2.1. *Пусть функция $h(s)$ комплексного переменного $s=\sigma+it$ представляется рядом Дирихле вида*

$$h(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},$$

который сходится абсолютно при $Re(s)=\sigma>1$. Далее, пусть $A(n)$ – монотонно возрастающая функция от n и $|a_n|\le A(n)$ при всех n. Пусть, также, $\beta>0$, $\delta>0$ и при $\sigma\to 1+0$ выполняется асимптотическая оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma}\ll(\sigma-1)^{-\beta}.$$

Тогда при всех $b\ge 1+\delta$, любом x вида $x=N+\frac{1}{2}$, где N – натуральное число, и $T\ge 2$ справедливо равенство

$$\Phi(x,\alpha)=\sum_{n\le x}a_n\left(1-\frac{n}{x}\right)^{\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}h(s)x^sB(s,\alpha+1)ds+$$

$$+O\left(\frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^{\beta}}\right)+O\left(\frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}}\right).$$

Доказательство. По условию теоремы при любом $b\ge 1+\delta$ ряд

$$h(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

сходится абсолютно, поэтому его можно проинтегрировать почленно по отрезку $[b-iT,b+iT]$. Почленно можно проинтегрировать также ряд $h(s)x^sB(s,\alpha+1)$ по этому отрезку имея ввиду, что для бетта-функции $B(s,\alpha+1)$ справедливо соотношений (2.1) и (2.2). Обозначая возникающий интеграл через J, будем иметь

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}h(s)x^sB(s,\alpha+1)ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}x^sB(s,\alpha+1)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\right)ds=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^sB(s,\alpha+1)ds. \qquad (2.6)$$

Согласно лемме 2.6 для интегралов, стоящих под знаком суммирования справедливо соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^{s}B(s,\alpha+1)ds=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{\alpha}+R(n), & \text{при } n\le x;\\ R(n), & \text{при } n>x.\end{cases}\tag{2.7}$$

$$R(n)\ll\frac{x^b}{n^b}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^{\alpha+1}}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}\ll\frac{x^b}{n^b}\frac{1}{T^{\alpha+1}}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}.$$

Подставляя правую часть(2.7) в (2.6), получим

$$J=\sum_{n=1}^{N}a_n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{\alpha}+R(x),$$

где

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nR_n\ll\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\frac{x^b}{n^b}\frac{1}{T^{\alpha+1}}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}=\frac{x^b}{T^{\alpha+1}}\cdot R_1(x),$$

$$R_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}.$$

Оценим сверху сумму $R_1(x)$. Разбивая суммирование по n на две части имеем

$$R_1(x)=R_2(x)+R_3(x),$$

$$R_2(x)=\sum_{n\le 2x/3}\frac{|a_n|}{n^b}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}+\sum_{n\ge 3x/2}\frac{|a_n|}{n^b}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1},$$

$$R_3(x)=\sum_{2x/3<n<3x/2}\frac{|a_n|}{n^b}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}.$$

Замечая, что имеют место следующие соотношения

$$\left|\ln\frac{x}{n}\right|=\ln\frac{x}{n}\ge\ln 1,5,\qquad n\le 2x/3,$$

$$\left|\ln\frac{x}{n}\right|=-\ln\frac{x}{n}=\ln\frac{n}{x}\ge\ln 1,5,\qquad n\ge 3x/2,$$

для суммы $R_2(x)$ имеем

$$R_2(x)=\sum_{n\le 2x/3}\frac{|a_n|}{n^b}\left(\ln\frac{x}{n}\right)^{-1}+\sum_{n\ge 3x/2}\frac{|a_n|}{n^b}\left(\ln\frac{n}{x}\right)^{-1}\le$$

$$\leq \sum_{n\leq 2x/3} \frac{|a_n|}{n^b} (\ln 1,5)^{-1} + \sum_{n\geq 3x/2} \frac{|a_n|}{n^b} (\ln 1,5)^{-1} =$$

$$= (\ln 1,5)^{-1} \left(\sum_{n\leq 2x/3} \frac{|a_n|}{n^b} + \sum_{n\geq 3x/2} \frac{|a_n|}{n^b} \right) \leq$$

$$\leq (\ln 1,5)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} \ll \frac{1}{(b-1)^\beta}.$$

Для членов суммы $R_3(x)$ выполняются неравенства вида

$$\frac{2}{3}x < n < \frac{3}{2}x,$$

откуда получаем $A(n) \leq A(2x)$, так как функция $A(y) > 0$ монотонно возрастает, а согласно лемме 2.7 имеем

$$\left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1} < \frac{2x}{|x-n|}.$$

Поэтому

$$R_3(x) = \sum_{2x/3<n<3x/2} \frac{|a_n|}{n^b} \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1} < A(2x) \left(\frac{3}{2x}\right)^b \sum_{2x/3<n<3x/2} \frac{2x}{|x-n|} =$$

$$= A(2x) \left(\frac{3}{2x}\right)^b \cdot 2x \left(\sum_{2x/3<n\leq x-1/2} \frac{1}{x-n} + \sum_{x+1/2<n<3x/2} \frac{1}{n-x} \right) =$$

$$= A(2x) \frac{(3/2)^b \cdot 2x}{x^b} \left(\sum_{2x/3<n\leq x-1/2} \frac{1}{x-n} + \sum_{x+1/2<n<3x/2} \frac{1}{n-x} \right) \ll$$

$$\ll \frac{xA(2x)}{x^b} \left(\sum_{2x/3<n\leq x-1/2} \frac{1}{x-n} + \sum_{x+1/2<n<3x/2} \frac{1}{n-x} \right) \leq$$

$$\leq \frac{xA(2x)}{x^b} \left(\int_{2x/3}^{x-0,5} \frac{du}{x-u} + \frac{1}{x-(x-0,5)} + \frac{1}{(x+0,5)-x} \int_{x+1/2}^{3x/2} \frac{du}{u-x} \right) =$$

$$= \frac{xA(2x)}{x^b} (-\ln 0,5 + \ln(x/3) + 4 + \ln(x/2) - \ln 0,5) =$$

$$= \frac{xA(2x)}{x^b} (2\ln x + \ln 2 - \ln 3) \ll \frac{xA(2x)\ln x}{x^b}.$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
R(x) &\ll \frac{x^b}{T^{\alpha+1}} \cdot R_1(x) = \frac{x^b}{T^{\alpha+1}} \left(R_2(x) + R_3(x)\right) \ll \\
&\ll \frac{x^b}{T^{\alpha+1}} \left(\frac{1}{(b-1)^\beta} + \frac{xA(2x)\ln x}{x^b} \right) = \\
&= \frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}} + \frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^\beta}.
\end{aligned}
$$

Подставляя полученные оценки остаточного члена находим:

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,\alpha) = \sum_{n\le x} a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right)^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} h(s) x^s B(s, \alpha+1) ds + \\
+ O\left(\frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}}\right) + O\left(\frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^\beta}\right).
\end{aligned}
$$

Теорема 2.1 доказана.

Глава 3

Среднее Рисса арифметических функций, распространенных на значения тернарной кубической формы

В этой главе для «*среднего Рисса веса* α», $\alpha \geq 0$ функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы

$$\varphi = \varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3, \quad z_1, z_2, z_3 \in Z,$$

то есть для суммы

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\leq x} \tau_k(\varphi(z_1, z_2, z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1, z_2, z_3)}{x}\right)^{\alpha},$$

выводится асимптотическая формула.

3.1 Вспомогательные утверждения

Определение 2. *Обозначим через* $\varphi(n)$ *количество представлений натурального* n *в виде*

$$n = \varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3,$$

где z_1, z_2, z_3 *— некоторые целые числа и положим также* $t(n) = \frac{1}{3}\varphi(n)$.

Такое определение приводится в [1], [2], [3] и показано, что имеет место следующее утверждение:

Лемма 3.1. *Функция натурального аргумента $t(n)$ является мультипликативной и при этом для всякого простого числа p и всякого натурального числа λ имеют место равенства*

$$t(p^{\lambda}) = \begin{cases} 2(\lambda-1), & \text{если } p=3,\ \lambda \geq 1; \\ \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 3; \\ \left[\frac{\lambda}{2}\right]+1, & \text{если } p \equiv -1 \pmod 3. \end{cases}$$

Доказательство см. в [1] (с. 11, теорема 1).

Лемма 3.2. *При простом p и любом натуральном λ выполняются соотношение*

$$\tau_k(p^{\lambda}) = \binom{\lambda+k-1}{k-1}.$$

Доказательство см. [55].

Лемма 3.3. *При $Re\, s > 0,5$ и не главного характера Дирихле $\chi(n)$ по модулю 3 справедлива оценка*

$$L(s,\chi) = O(1).$$

Доказательство. Имея в виду что значения единственного не главного характера Дирихле $\chi(n)$ по модулю 3 вычисляется по формуле

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 3; \\ -1, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

имеем

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\chi(3n)}{(3n)^s} + \frac{\chi(3n+1)}{(3n+1)^s} + \frac{\chi(3n+2)}{(3n+2)^s} \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(3n+1)^s} - \frac{1}{(3n+2)^s} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(9n^2+9n+2)^s}.$$

Последний ряд сходится абсолютно при $Re\, s = \sigma > 0,5$, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 3.4. *Для производящего ряда Дирихле*

$$f_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_k(n)}{n^s}$$

функции $t_k(n)$ *справедливо равенство*

$$f_k(s) = \zeta^{2k}(s) L^k(s, \chi) g_k(s),$$

где χ *— неглавный характер по модулю 3, а также равенство*

$$g_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_k(n)}{n^s},$$

причем $|b_k(n)| \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ *(*$\varepsilon > 0$ *— произвольно) и ряд сходится абсолютно при всех* s *с условием* $Re\, s > 1/2$*. В случае* $k = 1$ *имеем также*

$$g(s) = g_1(s) = 1 - \frac{2}{3^s} + \frac{3}{9^s}.$$

Доказательство см. [4, 5, 6].

Одним из важных результатов теории моментов дзета – функции Римана по вертикальным отрезкам прямых в критической полосе является теорема Ф.Карлсона, дающая оценку моментов дзета – функции, когда степень осреднения $m = 2k$, где k — натуральное число.

Вначале дадим определения абсциссы Карлсона и экспоненты Карлсона, которые приведены в [27, 28].

Определение 3. *Абсциссой Карлсона назовем величину определяемую соотношениями вида*

$$\sigma_k = \inf M,$$

где M *— множество всех вещественных чисел* $0 < \sigma < 1$*, для которых справедлива оценка*

$$I_k = I_k(\sigma, T) = T^{-1} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon,$$

где $\zeta(s)$ дзета – функция Римана, $k > 0$, $T > 1$ и $\varepsilon > 0$ — произвольные вещественные числа.

Из общей теории рядов Дирихле вытекает, что в определении можно положить $\varepsilon = 0$ ([56], стр. 153).

Определение 4. *Экспонентой Карлсона будем называть величину $m(\sigma)$, определяемую равенством $m(\sigma) = 2f(\sigma)$, где $f(\sigma)$ - функция, обратная к σ_k. Функцию $m(\sigma)$ можно еще определить как $\sup m$, где $m > 0$ таково, что при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка*

$$\int\limits_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2m} dt \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}.$$

Лемма 3.5. (Ф. Карлсон) *Пусть k – натуральное число и для любого α с условием $0 < \alpha < 1$, $\mu_k(\alpha)$ означает нижнюю грань положительных чисел ξ, таких, что*

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T |\zeta(\alpha + it)|^{2k} dt = O(T^{\xi}).$$

Тогда имеет место оценка

$$\sigma_k \le \max\left(1 - \frac{1-\alpha}{1+\mu_k(\alpha)}, \frac{1}{2}, \alpha\right).$$

Доказательство. [56], стр. 151 – 154.

Следствие 3.5.1. *При $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ имеет место оценка*

$$\sigma_k \le 1 - \frac{1-\alpha}{1+\mu_k(\alpha)}.$$

Доказательство. [6], стр. 21.

Следующие несколько утверждений будут посвящены обобщению теоремы Карлсона на случай произвольных положительных степеней осреднения.

Определим для каждого σ величину $\mu(\sigma)$ следующим образом. Число $\mu(\sigma)$ – это нижняя грань чисел ξ таких, что

$$\zeta(\sigma+it)=O(|T|^{\xi}).$$

Величину $\mu(\sigma)$ также можно определить иначе [25]. А именно,

$$\mu(\sigma)=\lim_{t\to\infty}\frac{\log|\zeta(\sigma+it)|}{\log t}.$$

Лемма 3.6. *Пусть k – любое вещественное число, $k>4$ и σ_k – нижняя грань чисел σ, таких, что для любого $\varepsilon>0$ выполняется оценка*

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T|\zeta(\sigma+it)|^{2m}dt\ll_{\varepsilon}T^{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\sigma_k\le\max\left(1-\frac{1}{2,4+\frac{2}{3}k},\,1-\frac{1-\alpha}{1+\mu_k(\alpha)}\right).$$

для любого $\alpha\in(\frac{1}{2},\,1)$ при условии, что величина $\mu_k(\alpha)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T|\zeta(\alpha+it)|^{2k}dt\ll_{\varepsilon}T^{\mu_k(\alpha)+\varepsilon}.$$

Доказательство. [57, 58].

Последуя Ивичу [26] (стр. 269) определим величину $A(\sigma)$.

Определение 5. *Пусть $\sigma\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. Обозначим через $A(\sigma)$ не возрастающую функцию, удовлетворяющую условиям*

1. $0<A(\sigma)(1-\sigma)\le 1$,

2. $N(\sigma,T)\ll_{\varepsilon}T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}$.

Следствие 3.6.1. *Пусть k – любое вещественное число, $k>4$ и $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. Положим*

$$f(\alpha)=1-\frac{1-\alpha}{1+\mu_k(\alpha)}.$$

Тогда если величина $\mu_k(\alpha)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T |\zeta(\alpha+it)|^{2k}dt \ll_\varepsilon T^{\mu_k(\alpha)+\varepsilon},$$

то для величины σ_k имеет место оценка $\sigma_k \le \max\limits_\alpha f(\alpha)$ при условии, что для любого $\sigma \in [\sigma_k, 1)$ выполняется соотношение

$$A(\sigma)(1-\sigma)+2k\mu(\sigma)\le 1.$$

Замечание. Функция $A(\sigma)(1-\sigma)+2k\mu(\sigma)$ является невозрастающей в силу своего определения через величину $N(\sigma,T)$, а величина $\mu(\sigma)$ тоже не возрастает. Поэтому неравенство

$$A(\sigma)(1-\sigma)+2k\mu(\sigma)\le 1$$

для всех $\sigma\ge\sigma_k$ является следствием неравенства

$$A(\sigma_k)(1-\sigma_k)+2k\mu(\sigma_k)\le 1.$$

Доказательство. [31], стр. 30.

Лемма 3.7. *Пусть k – любое вещественное число, $k>0$ и σ_k – нижняя грань чисел σ, таких, что для любого $\varepsilon>0$ выполняется оценка*

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T |\zeta(\alpha+it)|^{2k}dt \ll_\varepsilon T^{\varepsilon}.$$

Пусть также при некотором a, где $1\le a\le 20$ и всех $t\ge 1$ и $\sigma\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ выполняется оценка

$$\zeta(\sigma+it)\ll t^{a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}(\ln t)^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда для любого $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ справедливо неравенство

$$\sigma_k\le\max\left(1-\frac{1}{(a(b+2k))^{\frac{2}{3}}}, 1-\frac{1-\alpha}{1+\mu_k(\alpha)}\right)$$

в предположении, что $b = \frac{7}{6}5^{\frac{3}{2}}$, *а величина* $\mu_k(\alpha)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T |\zeta(\alpha+it)|^{2k}dt \ll_\varepsilon T^{\mu_k(\alpha)+\varepsilon}.$$

Доказательство. [31], стр. 31.

Лемма 3.8. *При*

$$\sigma > c_1 = 1 - \frac{1}{31,2}$$

справедлива следующая оценка для экспоненты Карлсона

$$m(\sigma) \geq \frac{1}{3a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} + k_1,$$

где $k_1 = 79,95$

Эта лемма улучшенный результат А. Ивича и М. Квелета [25], то есть

$$m(\sigma) \geq \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Кроме того, лемма 3.8 является уточнением результата Г.И. Архипова, Е.Е. Баядилова и В.Н. Чубарикова, полученного в 2002 году, который допускает следующее утверждеие.

Утверждение. При всех $\beta \geq \beta_0 = \frac{2701}{2880}$ и $k_0 = 44 - [\frac{22}{a}]$ справедлива оценка

$$\frac{m(\beta)}{2} \geq k_0 - 1 + \frac{1}{3a(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(3a)^{\frac{1}{2}}(1-\sigma)^{\frac{3}{4}}}.$$

Доказательство. [27] , стр. 10 –11.

Лемма 3.9. *Пусть* $q \geq 1$ *– целое число,* $Q = 2^q$, $\sigma_q = 1 - \frac{q+2}{4Q-2}$, *и*

$$\eta_q = \frac{1}{4Q-2}\cdot\frac{240Qq+224Q+128}{240Qq+225Q+128}.$$

Тогда при $t > 3$ *справедлива оценка*

$$\zeta(\sigma_q+it) \ll t^{\eta_q}\ln t.$$

Доказательство. [59], стр. 38.

Отсюда при $q = 1$ имея ввиду что

$$\eta_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{240 \cdot 2 + 224 \cdot 2 + 128}{240 \cdot 2 + 225 \cdot 2 + 128} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{529}\right),$$

для $\zeta(\sigma_q + it)$, $0,5 < \sigma < 1$ имеем

Следствие 3.9.1. *При* $0,5 < \sigma < 1$ *и справедлива оценка*

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{\frac{1}{6}}.$$

Лемма 3.10. *При* $|t| \geq 2$ *справедлива следующая оценка*

$$\zeta(1 + it) \ll \ln^{\frac{2}{3}} |t|.$$

Доказательство. [48], стр. 114.

3.2 Среднее Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы

В этом параграфе для «*среднего Рисса веса* α», $\alpha \geq 0$ функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы

$$\varphi = \varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3, \quad z_1, z_2, z_3 \in Z,$$

то есть для суммы

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\leq x} \tau_k(\varphi(z_1, z_2, z_3))\left(1 - \frac{\varphi(z_1, z_2, z_3)}{x}\right)^{\alpha},$$

выводится асимптотическая формула.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha \geq 0$ – произвольное вещественное число, тогда при $k > 3k_1(1+\alpha)$, $k_1 = 79,95$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$T_{\alpha,k}(x) = xQ_{2k-1}(\ln x) + R_{\alpha,k}(x),$$

где $Q_{2k-1}(y)$ — многочлен степени $2k-1$, определяемым равенством

$$xQ_{2k-1}(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^{2k}(s) L^k(s,\chi) g_k(s) x^s B(s, \alpha+1),$$

кроме того, для остаточного члена $R_{\alpha,k}(x)$ справедлива оценка вида

$$R_{\alpha,k}(x) \ll_\varepsilon x^{1-\delta_{k,\alpha,a}+\varepsilon}, \quad \delta_{k,\alpha,a} = \left(\frac{2+3\alpha}{6a(k-k_1)}\right)^{2/3},$$

где $a \leq 4,45$.

Эта теорема является обобщением для "среднего Рисса" веса $\alpha \geq 0$, теоремы Е.Е. Баядилова [4, 5, 6] об асимптотической формуле для среднего значения

$$T_{0,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\leq x} \tau_k(\varphi(z_1,z_2,z_3)),$$

многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ при условии, что n пробегает значения, которые принимает тернарная кубическая формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$.

Теорема 3.1 также является обобщением теоремы О. В. Колпаковой [31, 32] о средних Рисса многомерной функции делителей с произвольным значением веса $\alpha \geq 0$ в случае когда множество натуральных чисел не превосходящих x заменяется на множество значений тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$ не превосходящих x, $z_1,z_2,z_3 \in Z$, причём переменные z_1, z_2, z_3 принимают целые значения.

Доказательство. Согласно определению 2 функция $t_0(n)$ означает количество представлений натурального n в виде

$$n = \varphi(z_1,z_2,z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3,$$

где z_1,z_2,z_3 — некоторые целые числа.

Согласно лемме 3.1 арифметическая функция

$$t(n) = \frac{t_0(n)}{3},$$

является мультипликативной и для всякого простого числа p, и всякого натурального числа λ имеют место равенства

$$t(p^\lambda) = \begin{cases} 2(\lambda - 1), & \text{если } p = 3,\ \lambda \geq 1; \\ \dfrac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 3; \\ \left[\dfrac{\lambda}{2}\right] + 1, & \text{если } p \equiv -1 \pmod 3. \end{cases}$$

Отсюда и из соотношений

$$\begin{aligned} &\tau_3(p^\lambda) = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}, \\ &\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} - 2(\lambda - 1) = \frac{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}}{2} > 0, \\ &\left[\frac{\lambda}{2}\right] + 1 \leq \frac{\lambda}{2} + 1 < \lambda + 1 \leq \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} \end{aligned}$$

следует неравенство

$$t(p^\lambda) \leq \tau_3(p^\lambda).$$

Вместе с функцией $t(n)$ мультипликативной является и функция

$$t_k(n) = \tau_k(n)t(n).$$

Как известно (лемма 3.2), при простом p и натуральном λ имеет место формула

$$\tau_k(p^\lambda) = \binom{\lambda + k - 1}{k - 1}.$$

Согласно определению, $t_k(n) = \frac{1}{3}\varphi_k(n)$, где $\varphi_k(n)$ равна числу решений системы диофантовых уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 \ldots x_k = n, \\ z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 = n. \end{cases}$$

Для $\varphi_k(n)$ имеет место равенство $\varphi_k(n) = \tau_k(n)t_0(n)$, где $\tau_k(n)$ равно числу решений первого уравнения системы уравнений, а $t_0(n)$ — число решений второго уравнения. Поэтому сумма

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} \tau_k(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^{\alpha},$$

принимает вид

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{n\le x} \varphi_k(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha} = 3\sum_{n\le x} t_k(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha}. \tag{3.1}$$

Для ряда Дирихле функции $t_k(n)$ согласно лемме 3.4 имеет место следующее тождество

$$f_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_k(n)}{n^s} = \zeta^{2k}(s) L^k(s,\chi) g_k(s), \quad g_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_k(n)}{n^s}, \tag{3.2}$$

причём $|b_k(n)| \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ — произвольно) и ряд сходится абсолютно при всех s с условием $Re\, s > 1/2$.

Далее всюду не ограничивая общности будем, считать, что x полуцелое число, то есть

$$x = N + \frac{1}{2}.$$

Воспользуемся для правой части (3.1) теоремой 2.1 первой главы об аналоге формулы Перрона для средних Рисса порядка α, полагая

$$a_n = t_k(n), \qquad A(n) = n^{\varepsilon}, \qquad \delta = \frac{1}{\mathscr{L}}.$$

Проверим выполнение трёх условий этой теоремы для ряда Дирихле $f_k(s)$ определяемой формулой (3.2).

1. Из представления (3.2) следует, что ряд $f(s)$ при $Re\, s = \sigma > 1$ сходится абсолютно по следующим причинам:

   - дзета-функция $\zeta(s)$ аналитическая в полуплоскости $Re\, s > 1$;
   - ряд Дирихле $L^k(s,\chi)$ является целой функцией;

- ряд $g_k(s)$ сходится абсолютно при всех s с условием $Re\, s > 1/2$.

2. Пользуясь соотношением (3.1) и известной оценкой $\tau_k(n) \ll n^\varepsilon$ можно считать, что

$$t_k(n) = \tau_k(n)t(n) \le \tau_k(n)\tau_3(n) \le A(n) = c(\varepsilon)n^\varepsilon,$$

для любого $\varepsilon > 0$ и некоторой постоянной $c(\varepsilon) > 0$.

3. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ аналитическая в полуплоскости $Re\, s > 0$ за исключением точки $s = 1$; в точке $s = 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ имеет простой полюс с вычетом равным 1.

   Поэтому
$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1) \text{ при } \sigma \to 1+. \tag{3.3}$$
   Функция $L^k(s,\chi)$ является целой функцией, поэтому
$$L^k(\sigma,\chi) = O(1) \text{ при } \sigma \to 1+. \tag{3.4}$$

   Из леммы 3.4 следует, что ряд $g_k(s)$ сходится абсолютно при всех s с условием $Re\, s > 1/2$, следовательно
$$g_k(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_k(n)}{n^\sigma} = O(1) \text{ при } \sigma \to 1+.$$

   Отсюда, из (3.3) и (3.4) находим
$$f_k(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_k(n)}{n^\sigma} = \zeta^{2k}(\sigma)L^k(\sigma,\chi)g_k(\sigma) \ll \zeta^{2k}(\sigma) \ll \frac{1}{(\sigma-1)^{2k}},\ \sigma \to 1+,$$
   то есть можно в теореме 2.1 взять $\beta = 2k$.

Таким образом выполняются все условия теоремы 2.1 второй главы об аналоге формулы Перрона для средних Рисса порядка α. Выбирая

$$b = 1 + \delta = 1 + \frac{1}{\mathscr{L}},$$

при $T \geq 2$ получим

$$T_{\alpha,k}(x) - \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT} \zeta^{2k}(s)L^k(s,\chi)g_k(s)x^s B(s,\alpha+1)ds \ll$$

$$\ll \frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^\beta} + \frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}} = \frac{e\cdot x\mathscr{L}^{2k}}{T^{\alpha+1}} + \frac{x(2x)^\varepsilon\mathscr{L}}{T^{\alpha+1}} \ll \frac{x^{1+\varepsilon}\mathscr{L}}{T^{\alpha+1}} \ll \frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}}.$$

Подынтегральную функцию обозначим через $F_{\alpha,k}(s)$, то есть

$$F_{\alpha,k}(s) = \zeta^{2k}(s)L^k(s,\chi)g_k(s)x^s B(s,\alpha+1).$$

Далее контур интегрирования, состоящий из отрезка

$$E_0 = [b-iT, b+iT],$$

заменим на другой, состоящий из следующих частей $E_1,\ldots,E_5$:

1. E_1 — горизонтальный отрезок $[b-iT,\ \mu-iT]$, где μ — некоторое число из промежутка $3/4 < \mu < 1$;

2. E_2 — вертикальный отрезок $[\mu-iT,\ \mu-iT_0]$, причём точка $\mu-iT_0$ лежит на окружности K радиуса $0,49$ с центром в точке $z_0 = 1$ и $T_0 > 0,3$;

3. E_3 — часть указанной выше окружности K от точки $\mu - iT_0$ до точки $\mu + iT_0$ в отрицательном направлении, т.е. по "часовой стрелке";

4. E_4 — вертикальный отрезок с началом в точке $\mu+iT_0$ и концом $\mu+iT$;

5. E_5 — горизонтальный отрезок $[\mu+iT,\ b+iT]$.

На основании теоремы о вычетах заключаем, что интеграл по старому контуру равен сумме интеграла по новому контуру и вычету подинтегральной функции $F_{\alpha,k}(s)$ в точке $s=1$. Порядок полюса в точке $s=1$ у функции $F_{\alpha,k}(s)$ равен $2k$, поэтому вычет функции $F_{\alpha,k}(s)$ в точке $s=1$ равен

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\{F_{\alpha,k}(s)\} = xQ_{\alpha,2k-1}(\mathscr{L}),$$

где $Q_{\alpha,2k-1}(\mathscr{L})$ представляет собой многочлен степени $2k-1$ с вещественными коэффициентами по переменной $y=\mathscr{L}$.

Таким образом

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha,k}(x) &= 3xQ_{\alpha,2k-1}(\mathscr{L}) + R_{\alpha,k}(x),\\
&\qquad R_{\alpha,k}(x) = J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}}\right),\\
&\qquad J_j = \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{E_j} F_{\alpha,k}(s)ds, \qquad j=1,2,3,4,5.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

то есть $J_1,\ldots,J_5$ интегралы по каждому из промежутков интегрирования $E_1,\ldots,E_5$ соответственно. Оценим каждый из этих интегралов отдельно.

Оценка интеграла J_1. Имеем

$$
J_1 = \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{\mu-iT} F_{\alpha,k}(s)ds = \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{b}^{1} F_{\alpha,k}(\sigma-iT)d\sigma + \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{1}^{\mu} F_{\alpha,k}(\sigma-iT)d\sigma. \tag{3.6}
$$

Для оценки подинтегральной функции $F_{\alpha,k}(\sigma-iT)$ при $\mu\le\sigma\le b$ воспользуемся:

- оценками функции $|\zeta(s)|$ вида

$$
|\zeta(s)| \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}(\ln t)^{\frac{2}{3}}, \quad \text{при} \quad \mu\le\sigma\le 1,
$$
$$
|\zeta(s)| \ll \ln t, \quad \text{при} \quad \sigma\ge 1,
$$

  которые соответственно следуют из лемм 3.7 и 3.10;

- оценкой модуля функции $L(s,\chi)$ при $Re\, s>0,5$ вида

$$
|L(s,\chi)| \ll 1,
$$

  которая следует из леммы 3.3;

- оценкой модуля функции $g(s)$ при $Re\, s>0,5$, которая следует из леммы 3.4 и имеет вид

$$
g_k(s) \ll 1, \qquad \mu\le\sigma\le b.
$$

- оценкой модуля функции $B(s,\alpha+1)$ при $s \neq -m$, где m – неотрицательные целые числа (лемма 2.5):

$$|B(s,\alpha+1)| \ll |s|^{-\alpha-1} \ll t^{-\alpha-1}.$$

Отсюда при $\mu \le \sigma \le 1$, найдем

$$|F_{\alpha,k}(\sigma - iT)| = |\zeta^{2k}(\sigma - iT)||L^k(\sigma - iT,\chi)||g_k(\sigma - iT)|x^\sigma|B(\sigma - iT,\alpha+1)| \ll$$
$$\ll T^{2ka(1-\sigma)^{3/2}}(\ln T)^{\frac{4k}{3}} \cdot x^\sigma \cdot T^{-\alpha-1} = x^\sigma\, T^{2ka(1-\sigma)^{3/2}-\alpha-1}(\ln T)^{\frac{4k}{3}}.$$

Аналогично при $1 \le \sigma \le b$, находим

$$|F_{\alpha,k}(\sigma - iT)| = |\zeta^{2k}(\sigma - iT)||L^k(\sigma - iT,\chi)||g_k(\sigma - iT)|x^\sigma|B(\sigma - iT,\alpha+1)| \ll$$
$$\ll (\ln T)^{2k} \cdot x^b \cdot T^{-\alpha-1} = exT^{-\alpha-1}(\ln T)^{2k}.$$

Переходя в (3.6) к оценкам и воспользовавшись полученными оценками функции $F_k(s)$, имеем

$$|J_1| \ll \int\limits_\mu^1 |F_{\alpha,k}(\sigma - iT)|d\sigma + \int\limits_1^b |F_{\alpha,k}(\sigma - iT)|d\sigma \ll$$
$$\ll \int\limits_\mu^1 x^\sigma\, T^{2ka(1-\sigma)^{3/2}-\alpha-1}(\ln T)^{\frac{4k}{3}} d\sigma + \int\limits_1^b xT^{-\alpha-1}(\ln T)^{2k} d\sigma =$$
$$= T^{-\alpha-1}\left(\int\limits_\mu^1 \exp(\sigma\mathscr{L} + 2ka(1-\sigma)^{3/2}\ln T)d\sigma + \frac{x}{\mathscr{L}}\cdot(\ln T)^{2k}\right) \ll$$
$$= \frac{x}{T^{\alpha+1}}\left(\int\limits_\mu^1 \exp((\sigma-1)\mathscr{L} + 2ka(1-\sigma)^{3/2}\ln T)d\sigma + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right) =$$
$$= xT^{-\alpha-1}\left(\int\limits_\mu^1 \exp(f(\sigma))d\sigma + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right),$$
$$f(\sigma) = (\sigma-1)\mathscr{L} + 2ka(1-\sigma)^{3/2}\ln T.$$

Производная второго порядка по σ от функции $f(\sigma)$, то есть функция

$$f''(\sigma) = \frac{3}{2}ka(1-\sigma)^{-\frac{1}{2}}\ln T$$

положительна при $\mu \le \sigma < 1$, поэтому $f(\sigma)$ выпукла вниз и, следовательно, справедливо неравенство

$$f(\sigma) \le \max(f(\mu),\ f(1)) = \max\left((\mu-1)\mathscr{L} + 2ka(1-\mu)^{3/2}\ln T,\ 0\right).$$

Поэтому правая часть последнего неравенства для J_1 принимает вид

$$\begin{aligned}
|J_1| &\ll xT^{-\alpha-1}\left(\int\limits_{\mu}^{1}\exp(f(\sigma))d\sigma + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right) \le \\
&\le xT^{-\alpha-1}\left(\int\limits_{\mu}^{1}\left(\exp(f(\mu)) + \exp(f(1))\right)d\sigma + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right) = \\
&= xT^{-\alpha-1}\left((\exp(f(\mu))+1)(1-\mu) + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right) = \\
&= xT^{-\alpha-1}\left(\left(\exp\left((\mu-1)\mathscr{L} + 2ka(1-\mu)^{3/2}\ln T\right)+1\right)(1-\mu) + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right) = \\
&= xT^{-\alpha-1}\left(\left(x^{\mu-1}T^{2ka(1-\mu)^{3/2}}+1\right)(1-\mu) + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right) \ll \\
&\ll xT^{-\alpha-1}\left(x^{\mu-1}T^{2ka(1-\mu)^{3/2}} + \frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}\right) = \\
&= x^{\mu}T^{2ka(1-\mu)^{3/2}-\alpha-1} + xT^{-\alpha-1}\frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}.
\end{aligned}$$

Оценка интеграла J_5. Имеем

$$J_5 = \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{\mu+iT}^{b+iT} F_{\alpha,k}(s)ds.$$

Модули интегралов J_1 и J_5 совпадают, поэтому

$$J_5 \ll x^{\mu}T^{2ka(1-\mu)^{3/2}-\alpha-1} + xT^{-\alpha-1}\cdot\frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}}.$$

Оценка интеграла J_4. Имеем

$$J_4 = \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{\mu+iT_0}^{\mu+iT} F_{\alpha,k}(s)ds = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{T_0}^{T} F_k(\mu+it)dt.$$

Разбивая в J_4 промежуток интегрирования $[T_0, T]$ на n_1, $n_1 \ll \ln T$ промежутков вида $[T_n,\ T_{n+1}]$, где $T_0 < T_n < T_{n+1} \le 2T_n < T$, получим

$$J_4 = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{T_0}^{T} F_{\alpha,k}(\mu+it)dt = \sum_{n=1}^{n_1} J_4(n),$$

$$J_4(n) = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} F_{\alpha,k}(\mu+it)dt.$$

Для оценки интеграла $J_4(n)$ при $T_n \le t \le T_{n+1}$ воспользуемся:

- оценкой модуля функции $L(s,\chi)$ при $Re\, s > 0,5$ вида

  $$|L(s,\chi)| \ll 1,$$

  которая следует из леммы 3.3;

- оценкой модуля функции $g(s)$ при $Re\, s > 0,5$, которая следует из леммы 3.4 и имеет вид

  $$g_k(s) \ll 1,$$

- оценкой модуля функции $B(s,\alpha+1)$ при $s \ne -m$, где m – неотрицательные целые числа (лемма 2.5)

  $$|B(s,\alpha+1)| \ll |s|^{-\alpha-1} \ll t^{-\alpha-1}.$$

Следовательно для модуля интеграла $J_4(n)$ имеем:

$$|J_4(n)| = \left|\frac{3}{2\pi}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \zeta^{2k}(\mu+it)L^k(\mu+it,\chi)g_k(\mu+it)x^s B(\mu+it,\alpha+1)dt\right| \le$$

$$\le \frac{3}{2\pi}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^{2k}(\mu+it)\right| \left|L^k(\mu+it,\chi)\right| |g_k(\mu+it)|\, |x^s|\, |B(\mu+it,\alpha+1)|\, dt \ll$$

$$\ll x^{\mu}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^{2k}(\mu+it)\right| t^{-\alpha-1}dt \le x^{\mu}T_n^{-\alpha-1}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^{2k}(\mu+it)\right|\ dt.$$

Далее для оценки интеграла

$$\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^{2k}(\mu+it)\right| \, dt,$$

воспользуемся экспонентой Карлсона (определение 4), то есть величиной $m(\mu) = \sup m$, где $m > 0$ такой, что при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} |\zeta(\mu+it)|^{2m} dt \le \int\limits_{1}^{T_n+1} |\zeta(\mu+it)|^{2m} dt \ll_\varepsilon T_n^{1+\varepsilon}.$$

Для оценки экспоненты Карлсона воспользуемся леммой 3.8. Имеем

$$\begin{aligned} |J_4(n)| \ll x^\mu T_n^{-\alpha-1} \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^{2k}(\mu+it)\right| dt \le \\ \le x^\mu T_n^{-\alpha-1} \cdot \max_{T_n \le t \le T_{n+1}} |\zeta(\mu+it)|^{2k-2m(\mu)} \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} |\zeta(\mu+it)|^{2m(\mu)} dt \le \\ \le x^\mu T_n^{-\alpha-1} \cdot \max_{T_n \le t \le T_{n+1}} |\zeta(\mu+it)|^{2k-2m(\mu)} \cdot T_n^{1+\varepsilon} \le \\ \le x^\mu T_n^{-\alpha+\varepsilon} \cdot \max_{T_n \le t \le 2T_n} |\zeta(\mu+it)|^{2k-2m(\mu)}, \end{aligned}$$

где

$$m(\mu) \ge \frac{1}{3a(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} + k_1,$$

при

$$\mu > c_1 = 1 - \frac{1}{31,2}, \qquad k_1 = 79,95.$$

Далее воспользуемся оценкой дзета–функции Римана вида

$$\zeta(\mu+it) \ll t^{a(1-\mu)^{\frac{3}{2}}}, \qquad t \in R, \quad \mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \tag{3.7}$$

здесь $a > 0$ – некоторая постоянная, значение которой последовательно улучшается. История оценок параметра a начинается с работы Рихерта [17], где было указано значение $a = 100$. В дальнейшем были получены следующие результаты: $a = 39$ (Туран, 1971), $a = 86$ (Рибенбойм, 1986), $a = 26$ и $a = 21$ (Пантелеева, 1987, 1988), $a = 17$ (Хис – Браун, 1990), $a = 18,4974$ (Кулас, 1999 [34]). Последние оценки для параметра a дают значения $a \le 15,21$, полученные Е.Е. Баядиловым [29] и $a = 4,45$, полученные К. Фордом [39].

Подставляя оценку вида (3.7), в правую часть неравенства для $|J_4(n)|$, найдем

$$|J_4(n)| \ll x^{\mu} T_n^{-\alpha+\varepsilon} \cdot \left(T_n^{a(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} \right)^{2k-2m(\mu)} = x^{\mu} T_n^{-\alpha+a(2k-2m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon}.$$

Суммируя по всем $1 \le n \le n_1$, $n_1 \ll \ln T$, будем иметь

$$J_4 = \frac{3}{2\pi} \int_{T_0}^{T} F_{\alpha,k}(\mu+it)dt = \sum_{n=1}^{n_1} J_4(n) \ll$$

$$\ll \sum_{n=1}^{n_1} x^{\mu} T_n^{-\alpha+a(2k-2m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon} \ll$$

$$\ll x^{\mu} \left(T_{n_1}^{-\alpha+a(2k-2m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon} + T_0^{-\alpha+a(2k-2m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon} \right) \ln T \ll$$

$$\ll x^{\mu} \left(T^{-\alpha+a(2k-2m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon} + 1 \right) \ln T.$$

Оценка интеграла J_2. Имеем

$$J_2 = \frac{3}{2\pi i} \int_{\mu-iT}^{\mu-iT_0} F_{\alpha,k}(s)ds = -\frac{3}{2\pi} \int_{T_0}^{T} F_{\alpha,k}(\mu-it)dt.$$

Модули интегралов J_2 и J_4 совпадают, поэтому

$$J_2 \ll x^{\mu} \left(T^{-\alpha+a(2k-2m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon} + 1 \right) \ln T.$$

Оценка интеграла J_3. Имеем

$$J_3 = \frac{3}{2\pi i} \int_{E_3} F_{\alpha,k}(s)ds,$$

где E_3 — часть окружности радиуса $0,49$ с центром в точке $z_0 = 1$ от точки $\mu - iT_0$ до точки $\mu + iT_0$ в отрицательном направлении, то есть

$$E_3 = \{s: \ s = 1 + 0,49e^{i\varphi}, \ \varphi_1 \ge \varphi \ge \varphi_2\}$$

и φ_1 и φ_2 однозначно определяются из соотношений

$$0,49\cos\varphi_1 = \mu - 1, \quad 0,49\sin\varphi_1 = -T_0,$$
$$0,49\cos\varphi_2 = \mu - 1, \quad 0,49\sin\varphi_2 = T_0.$$

Таким образом

$$J_3 = \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{\alpha,k}(1+0,49\,e^{i\varphi})0,49\,e^{i\varphi}d\varphi \ll \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1}|F_{\alpha,k}(1+0,49\,e^{i\varphi})|d\varphi,$$

Оценим сверху модуль подинтегральной функции $|F_{\alpha,k}(1+0,49\,e^{i\varphi})|$. Функции $\zeta^{2k}(s)$, $L^k(s,\chi)$, $g_k(s)$ и $B(s,\alpha{+}1)$ являются голоморфными в ε – окрестности E_3, поэтому модули всех этих функций сверху ограничены постоянной. Следовательно

$$\begin{aligned}|F_{\alpha,k}(1+0,49\,e^{i\varphi})| =&|\zeta^{2k}(1+0,49\,e^{i\varphi})L^k(1+0,49\,e^{i\varphi},\chi)g_k(1+0,49\,e^{i\varphi})\cdot\\ &\cdot B(1+0,49\,e^{i\varphi},\alpha+1)x^{1+0,49\,e^{i\varphi}}| =\\ =&|\zeta^{2k}(1+0,49\,e^{i\varphi})L^k(1+0,49\,e^{i\varphi},\chi)g_k(1+0,49\,e^{i\varphi})\cdot\\ &\cdot B(1+0,49\,e^{i\varphi},\alpha+1)x^{1+0,49\cos\varphi}\ x^{i0,49\sin\varphi}| =\\ =&|\zeta^{2k}(1+0,49\,e^{i\varphi})|\,|L^k(1+0,49\,e^{i\varphi},\chi)|\,|g_k(1+0,49\,e^{i\varphi})|\cdot\\ &\cdot|B(1+0,49\,e^{i\varphi},\alpha+1)|\,x^{1+0,49\cos\varphi} \ll x^{1+0,49\cos\varphi} \ll\\ &\ll x^{1+0,49\cos\varphi_1} = x^{\mu}\end{aligned}$$

Поэтому

$$J_3 \ll \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1}|F_{\alpha,k}(1+0,49\,e^{i\varphi})|d\varphi \ll x^{\mu}.$$

Подставляя найденные оценки для интегралов J_j, $j = 1,2,3,4,5$ в формулу (3.5), найдем

$$\begin{aligned}
R_{\alpha,k}(x) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}}\right) \ll \\
&\ll \frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}} + x^{\mu}T^{2ka(1-\mu)^{3/2}-\alpha-1} + xT^{-\alpha-1}\cdot\frac{(\ln T)^{2k}}{\mathscr{L}} + \\
&+ x^{\mu}\left(T^{-\alpha+a(2k-2m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}+\varepsilon} + 1\right)\ln T + x^{\mu} \ll \\
&\ll \frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}} + x^{\mu}\left(T^{2ka(1-\mu)^{3/2}-\alpha-1} + T^{2a(k-m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}-\alpha+\varepsilon} + 1\right)\ln T = \\
&= \frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}} + x^{\mu}T^{2a(k-m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}-\alpha}\Delta(T) + x^{\mu}\ln T, \qquad (3.8)\\
&\quad \Delta(T) = \left(T^{2am(\mu)(1-\mu)^{3/2}-1} + T^{\varepsilon}\right)\ln T.
\end{aligned}$$

Теперь в (3.8) для заданного x выберем значения параметров T и μ так, чтобы ее правая часть была как можно меньше. Для этого потребуем, чтобы выполнялось

$$\frac{x}{T^{1+\alpha}} = x^{\mu}T^{2a(k-m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}-\alpha} = x^{\mu}, \tag{3.9}$$

что равносильно

$$x^{1-\mu} = T^{2a(k-m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}}+1} = T^{1+\alpha}. \tag{3.10}$$

Воспользовавшись леммой 3.8, будем считать, что

$$2m(\mu) = \frac{2}{3a(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} + 2k_1, \quad \mu > 1 - \frac{1}{31,2}. \tag{3.11}$$

Подставляя это значение $m(\mu)$ в первый показатель параметра T в (3.10), имеем

$$\begin{aligned}
a(2k-2m(\mu))(1-\mu)^{\frac{3}{2}} + 1 = 1 + a\left(2k - \frac{2}{3a(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} - 2k_1\right)(1-\mu)^{\frac{3}{2}} = \\
= 1 + a(2k-2k_1)(1-\mu)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = a(2k-2k_1)(1-\mu)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Сравнивая этот показатель с вторым показателем параметра T в (3.10), то есть

$$a(2k-2k_1)(1-\mu)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} = 1 + \alpha$$

находим значение параметра μ:

$$(1-\mu)^{\frac{3}{2}} = \frac{2+3\alpha}{a(6k-6k_1)}, \qquad \mu = 1 - \left(\frac{2+3\alpha}{a(6k-6k_1)}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \delta_{k,\alpha,a}, \qquad (3.12)$$

для которой условие

$$\mu > 1 - \frac{1}{31,2}$$

леммы 3.8 выполняется при

$$k > \frac{(31,2)^{\frac{3}{2}}(2+3\alpha)}{6a} + k_1,$$

так как

$$\mu = 1 - \left(\frac{2+3\alpha}{6ak-6ak_1}\right)^{\frac{2}{3}} > 1 - \left(\frac{2+3\alpha}{6a\cdot\left(\frac{(31,2)^{\frac{3}{2}}(2+3\alpha)}{6a}+k_1\right) - 6k_1 a}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= 1 - \left(\frac{2+3\alpha}{(31,2)^{\frac{3}{2}}(2+3\alpha)+6k_1a-6k_1a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{31,2}.$$

Таким образом при

$$\mu = 1 - \left(\frac{2+3\alpha}{a(6k-6k_1)}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad k > \frac{(31,2)^{\frac{3}{2}}(2+3\alpha)}{6a} + k_1 \qquad (3.13)$$

первый и второй показатель параметра T в (3.10) равны. А при выборе

$$T = x^{\frac{1-\mu}{1+\alpha}}$$

выполняется соотношение (3.10) и равносильное ей соотношение (3.9), из которого и (3.8) получим

$$R_{\alpha,k}(x) \ll x^{\mu+\varepsilon} + x^{\mu}\Delta(T) + x^{\mu}\ln T,$$

где μ определяется соотношением (3.13). Выясним теперь при каких условиях выполняется оценка

$$\Delta(T) = \left(T^{2am(\mu)(1-\mu)^{3/2}-1} + T^{\varepsilon}\right)\ln T \ll x^{\varepsilon},$$

которая следует, если показатель $2am(\mu)(1-\mu)^{3/2}-1$ параметра T выражение для $\Delta(t)$ не будет положительным. Воспользовавшись значениями параметров $m(\mu)$ и μ, то есть соотношениями (3.11) и (3.12) , последовательно найдем

$$\begin{aligned}2am(\mu)(1-\mu)^{3/2}-1 = a\cdot\left(\frac{2}{3a(1-\mu)^{\frac{3}{2}}}+2k_1\right)(1-\mu)^{3/2}-1 =\\ = 2ak_1(1-\mu)^{3/2}-\frac{1}{3} = 2ak_1\cdot\frac{2+3\alpha}{a(6k-6k_1)}-\frac{1}{3} =\\ = -\frac{k-3k_1(1+\alpha)}{3(k-k_1)}\le 0, \qquad k\ge 3k_1(1+\alpha).\end{aligned}$$

Из соотношения

$$k\ge\max\left(\frac{(31,2)^{\frac{3}{2}}(2+3\alpha)}{6a}+k_1, 3k_1(1+\alpha)\right)=3k_1(1+\alpha)$$

следует при $k\ge 3k_1(1+\alpha)$, выполняется оценка

$$\Delta(T)=\left(T^{2am(\mu)(1-\mu)^{3/2}-1}+T^{\varepsilon}\right)\ln T \ll T^{\varepsilon}\ln T\ll\left(x^{\frac{1-\mu}{1+\alpha}}\right)^{\varepsilon}\mathscr{L}^{\frac{1-\mu}{1+\alpha}}\ll x^{\varepsilon}.$$

Следовательно имея в виду (3.12), найдем

$$R_{\alpha,k}(x)\ll x^{\mu+\varepsilon}+x^{\mu}\Delta(T)+x^{\mu}\ln T\ll x^{\mu+\varepsilon}=x^{1-\delta_{k,\alpha,a}+\varepsilon},$$

где

$$\delta_{k,\alpha,a}=\left(\frac{2+3\alpha}{6a(k-k_1)}\right)^{2/3}.$$

Теорема доказана.

3.3 Среднее Рисса функции суммы квадратов, распространенной на значения тернарной кубической формы

В этом параграфе для «*среднего Рисса веса* α», $\alpha\ge 0$ функции суммы квадратов, распространенной на значения тернарной кубической формы

$$\varphi=\varphi(z_1,z_2,z_3)=z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3, \quad z_1,z_2,z_3\in Z,$$

то есть для суммы

$$S_\alpha(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} r(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^\alpha,$$

выводится асимптотическая формула.

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha \ge 0$ – произвольное вещественное число, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$S_\alpha(x) = 12xQ_\alpha(\ln x) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где $Q_\alpha(y)$ — линейный многочлен, определяемый равенством

$$xQ_\alpha(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s)x^s B(s,\alpha+1).$$

Доказательство. Согласно определению 2 функция $t_0(n)$ означает количество представлений натурального n в виде

$$n = \varphi(z_1,z_2,z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3,$$

где z_1, z_2, z_3 — некоторые целые числа.

Согласно определению, $s(n) = \frac{1}{12}\psi(n)$, где $\psi(n)$ равна числу решений системы диофантовых уравнений вида

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = n, \\ z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 = n. \end{cases}$$

Для $\psi(n)$ имеет место равенство $\psi(n) = r(n)t_0(n)$, где $r(n)$ равно числу решений первого уравнения системы уравнений, а $t_0(n)$ — число решений второго уравнения. Поэтому сумма

$$S_\alpha(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} r(\varphi(z_1,z_2,z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^\alpha,$$

принимает вид

$$S_\alpha(x) = 12\sum_{n\le x} s(n)\left(1 - \frac{n}{x}\right)^\alpha. \qquad (3.14)$$

Для ряда Дирихле функции $s(n)$ согласно теореме 3.4 имеет место следующее тождество

$$f(s) = \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s), \qquad (3.15)$$

где χ_q — неглавный характер по модулю q, а также равенство

$$\mathscr{B}(s) = \left(1 - \frac{2}{3^{2s}} + \frac{3}{3^{4s}}\right) \prod_{p\equiv 1 \pmod{12}} \left(1 - \frac{3}{p^{2s}} + \frac{2}{p^{3s}}\right) \prod_{p\equiv 5 \pmod{12}} \left(1 + \frac{3}{p^{2s}} - \frac{2}{p^{3s}}\right) \times$$
$$\times \prod_{p\equiv 7 \pmod{12}} \left(1 + \frac{3}{p^{2s}}\right) \prod_{p\equiv 11 \pmod{12}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right),$$

причём безконечное произведение $\mathscr{B}(s)$ сходится абсолютно при всех s с условием $\Re s > 0,5$.

Далее всюду не ограничивая общности будем, считать, что x полуцелое число, то есть

$$x = N + \frac{1}{2}.$$

Воспользуемся для правой части (3.14) теоремой 2.1 первой главы об аналоге формулы Перрона для средних Рисса порядка α, полагая

$$a_n = s(n), \qquad A(n) = n^{\varepsilon}, \qquad \delta = \frac{1}{\mathscr{L}}.$$

Проверим выполнение трех условий этой теоремы для ряда Дирихле $f(s)$ определяемой формулой (3.15).

1. Из представления (3.15) следует, что ряд $f(s)$ при $Re\, s = \sigma > 1$ сходится абсолютно по следующим причинам:

   - дзета-функция $\zeta(s)$ аналитическая в полуплоскости $Re\, s > 1$;
   - ряды Дирихле $L(s,\chi_q)$ являются целыми функциями;
   - ряд $\mathscr{B}(s)$ сходится абсолютно при всех s с условием $Re\, s > 1/2$.

2. Пользуясь соотношением (1.1), леммой 1.3 и известной оценкой $\tau_k(n) \ll n^{\varepsilon}$ можно считать, что

$$s(n) = \rho(n)t(n) \le \tau(n)\tau_3(n) \le A(n) = c(\varepsilon)n^{\varepsilon},$$

для любого $\varepsilon > 0$ и некоторой постоянной $c(\varepsilon) > 0$.

3. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ аналитическая в полуплоскости $Re\, s > 0$ за исключением точки $s = 1$; в точке $s = 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ имеет простой полюс с вычетом равным 1.

   Поэтому
$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1) \text{ при } \sigma \to 1+. \tag{3.16}$$
   Функции $L(s, \chi_q)$ являеются целыми функциями, поэтому
$$L(s, \chi_3)L^2(s, \chi_4)L(s, \chi_{12}) = O(1) \text{ при } \sigma \to 1+. \tag{3.17}$$
   Из теоремы 1.1 следует, что ряд $\mathscr{B}(s)$ сходится абсолютно при всех s с условием $Re\, s > 1/2$, следовательно
$$\mathscr{B}(\sigma) = O(1) \text{ при } \sigma \to 1+.$$
   Отсюда, из (3.16) и (3.17) находим
$$f(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^\sigma} = \zeta^2(\sigma)L(\sigma, \chi_3)L^2(\sigma, \chi_4)L(\sigma, \chi_{12})\mathscr{B}(\sigma) \ll$$
$$\ll \zeta^2(\sigma) \ll \frac{1}{(\sigma - 1)^2} \text{ при } \sigma \to 1+,$$
   то есть можно в теореме 2.1 взять $\beta = 2$.

Таким образом выполняются все условия теоремы 2.1 первой главы об аналоге формулы Перрона для средних Рисса порядка α. Выбирая
$$b = 1 + \delta = 1 + \frac{1}{\mathscr{L}},$$
при $T \geq 2$ получим
$$S_\alpha(x) - 12 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \zeta^2(s)L(s, \chi_3)L^2(s, \chi_4)L(s, \chi_{12})\mathscr{B}(s)x^s B(s, \alpha + 1)ds \ll$$
$$\ll \frac{x^b}{T^{\alpha+1}(b-1)^\beta} + \frac{xA(2x)\ln x}{T^{\alpha+1}} = \frac{e \cdot x\mathscr{L}^2}{T^{\alpha+1}} + \frac{x(2x)^\varepsilon \mathscr{L}}{T^{\alpha+1}} \ll \frac{x^{1+\varepsilon}\mathscr{L}}{T^{\alpha+1}} \ll \frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}}.$$

Подынтегральную функцию обозначим через $F(s,\alpha)$, то есть

$$F(s,\alpha)=\zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s)x^sB(s,\alpha+1).$$

Далее контур интегрирования, состоящий из отрезка

$$E_0=[b-iT,b+iT],$$

заменим на другой, состоящий из следующих частей E_1,E_2,E_3 :

1. E_1 — горизонтальный отрезок $[b-iT,\ \mu-iT]$, где $\mu=0,5+\varepsilon$;

2. E_2 — вертикальный отрезок $[\mu-iT,\ \mu+iT]$;

3. E_3 — горизонтальный отрезок $[\mu+iT,\ b+iT]$.

На основании теоремы о вычетах заключаем, что интеграл по старому контуру равен сумме интеграла по новому контуру и вычету подынтегральной функции $F(s,\alpha)$ в точке $s=1$. Порядок полюса в точке $s=1$ у функции $F(s,\alpha)$ равен 2, поэтому вычет функции $F(s,\alpha)$ в точке $s=1$ равен

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\{F(s,\alpha)\}=xQ(\ln x),$$

где $Q(\ln x)$ представляет собой линейный многочлен степени с вещественными коэффициентами от переменной $y=\ln x$.

Таким образом

$$\begin{aligned} S_\alpha(x)&=12(xQ(\ln x)+R_\alpha(x)),\\ R_\alpha(x)&=J_1+J_2+J_3+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}}\right),\\ J_j&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_j}F(s,\alpha)ds,\qquad j=1,2,3. \end{aligned}\tag{3.18}$$

то есть J_1,J_2,J_3 интегралы по каждому из промежутков интегрирования E_1,E_2,E_3 соответственно. Оценим каждый из этих интегралов отдельно.

Оценка интеграла J_1. Имеем

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{\mu-iT} F(s,\alpha)ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b}^{1} F(\sigma - iT)d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1}^{\mu} F(\sigma - iT,\alpha)d\sigma. \tag{3.19}$$

Для оценки подинтегральной функции $F_k(\sigma - iT)$ при $\mu \le \sigma \le b$ воспользуемся:

- оценками функции $|\zeta(s)|$ вида

$$|\zeta(s)| \ll t^{\frac{1}{6}}, \quad \text{при} \quad \mu \le \sigma < 1,$$
$$|\zeta(s)| \ll \ln t, \quad \text{при} \quad \sigma \ge 1,$$

  которая следует из следствие 3.9.1 и 3.10;

- оценками модулей произведения функций $L(s,\chi_3)$, $L^2(s,\chi_4)$, $L(s,\chi_{12})$ при $Re\, s > 0,5$ вида

$$|L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})| \ll 1,$$

  которая следует из леммы 3.3;

- оценкой модуля функции $\mathscr{B}(s)$ при $Re\, s > 0,5$, которая следует из теремы 1.1 и имеет вид

$$\mathscr{B}(s) \ll 1, \qquad \mu \le \sigma \le b.$$

- оценкой модуля функции $B(s,\alpha+1)$ при $s \ne -m$, где m – неотрицательные целые числа (лемма 2.5):

$$|B(s,\alpha+1)| \ll |s|^{-\alpha-1} \ll t^{-\alpha-1}.$$

Отсюда при $\mu \le \sigma < 1$, найдем

$$\begin{aligned}|F(\sigma - iT,\alpha)| = |\zeta^2(\sigma - iT)|L(\sigma - iT,\chi_3)L^2(\sigma - iT,\chi_4)L(\sigma - iT,\chi_{12})|\times \\ \times|\mathscr{B}(\sigma - iT)|x^\sigma|B(\sigma - iT,\alpha+1)| \ll \\ \ll T^{\frac{1}{3}}\cdot x^\sigma\cdot T^{-\alpha-1} = x^\sigma\, T^{-\alpha-\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Аналогично при $1 \le \sigma \le b$, находим

$$|F(\sigma - iT, \alpha)| = |\zeta^2(\sigma - iT)|L(\sigma - iT, \chi_3)L^2(\sigma - iT, \chi_4)L(\sigma - iT, \chi_{12})| \times$$
$$\times |\mathscr{B}(\sigma - iT)|x^{\sigma}|B(\sigma - iT, \alpha + 1)| \ll$$
$$\ll (\ln T)^2 \cdot x^b \cdot T^{-\alpha-1} = exT^{-\alpha-1}(\ln T)^2.$$

Переходя в (3.19) к оценкам и воспользовавшись полученными оценками функции $F(s, \alpha)$, имеем

$$J_1 \ll \int_{\mu}^{1} |F(\sigma - iT, \alpha)|d\sigma + \int_{1}^{b} |F(\sigma - iT, \alpha)|d\sigma \ll$$
$$\ll \int_{\mu}^{1} x^{\sigma}\, T^{-\alpha-\frac{2}{3}} d\sigma + \int_{1}^{b} xT^{-\alpha-1}(\ln T)^2 d\sigma =$$
$$\ll \frac{x}{T^{\alpha+\frac{2}{3}}\,\mathscr{L}} + \frac{x(\ln T)^2}{T^{\alpha+1}\,\mathscr{L}} \ll \frac{x}{T^{\alpha+\frac{2}{3}}\,\mathscr{L}}.$$

Оценка интеграла J_3. Имеем

$$J_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu+iT}^{b+iT} F(s, \alpha)ds.$$

Модули интегралов J_1 и J_3 совпадают, поэтому

$$J_3 \ll \frac{x}{T^{\alpha+\frac{2}{3}}\,\mathscr{L}}.$$

Оценка интеграла J_2. Имеем

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-iT}^{\mu+iT} F(s, \alpha)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} F(\mu + it, \alpha)dt.$$

Разбивая в J_2 промежуток интегрирования $[1, T]$ на n_1, $n_1 \ll \ln T$ промежутков вида $[T_n,\ T_{n+1}]$, где $1 < T_n < T_{n+1} \le 2T_n < T$, получим

$$J_2 = J_2(0) + \sum_{n=1}^{n_1} J_2(n) - \overline{J_2(0)} - \sum_{n=1}^{n_1} \overline{J_2(n)},$$

$$J_2(0) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} F(\mu + it, \alpha)dt, \qquad J_2(n) = \frac{1}{\pi}\int_{T_n}^{T_{n+1}} F(\mu + it, \alpha)dt.$$

Для оценки интеграла $J_2(n)$ при $T_n \le t \le T_{n+1}$ воспользуемся:

- оценкой модуля функции $L(s,\chi_q)$ при $Re\, s > 0,5$ вида
$$|L(s,\chi)| \ll 1,$$
которая следует из леммы 3.3;

- оценкой модуля функции $\mathscr{B}(s)$ при $Re\, s > 0,5$, которая следует из теоремы 1.1 и имеет вид
$$\mathscr{B}(s) \ll 1,$$

- оценкой модуля функции $B(s,\alpha+1)$ при $s \ne -m$, где m – неотрицательные целые числа (лемма 2.5)
$$|B(s,\alpha+1)| \ll |s|^{-\alpha-1} \ll t^{-\alpha-1}.$$

Следовательно для модуля интеграла $J_2(n)$ имеем ($s = \sigma + it$):

$$|J_2(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s)x^s B(s,\alpha+1)dt\right| \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^2(s)\right| |L(s,\chi_3)| \left|L^2(s,\chi_4)\right| |L(s,\chi_{12})| |\mathscr{B}(s)| x^\sigma |B(s,\alpha+1)|\, dt \le$$
$$\ll x^\mu \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^2(\mu+it)\right| t^{-\alpha-1}dt \le x^\mu T_n^{-\alpha-1}\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \left|\zeta^2(\mu+it)\right| dt \le$$
$$\le x^\mu T_n^{-\alpha-1}\int\limits_{T_n}^{2T_n} \left|\zeta^2(\mu+it)\right| dt \ll x^\mu T_n^{-\alpha}.$$

Таким образом можно показать, что

$$|J_2(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 |F(\mu+it,\alpha)|dt \ll x^\mu.$$

Суммируя по всем $1 \le n \le n_1$, $n_1 \ll \ln T$, будем иметь

$$|J_2| \le 2|J_2(0)| + 2\sum_{n=1}^{n_1} |J_2(n)| \ll x^{\mu}\left(1 + \sum_{n=1}^{n_1} T_n^{-\alpha}\right) \ll x^{\mu}.$$

Подставляя найденные оценки для интегралов J_j, $j = 1, 2, 3$ в формулу (3.18), найдем

$$R_{\alpha}(x) = J_1 + J_2 + J_3 + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}}\right) \ll \frac{x}{T^{\alpha+\frac{2}{3}}\mathscr{L}} + x^{\mu} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T^{\alpha+1}}.$$

Теперь для заданного x выбирая параметр T из условия

$$\frac{x}{T^{\alpha+\frac{2}{3}}\mathscr{L}} = x^{\mu}, \qquad \mu = \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

находим

$$R_{\alpha}(x) \ll x^{\mu}.$$

Теорема доказана.

Литература

[1] Нгуен Хак Тхань О кубической форме $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ // Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 1990. №3, с. 7 – 10.

[2] Нгуен Хак Тхань Асимптотическая формула одной арифметической суммы // Вестн Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 1989. №1, с. 10 – 14.

[3] Нгуен Хак Тхань Диофантовы уравнения с малым числом переменных // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова, 1990.

[4] Баядилов Е. Е. О проблеме делителей для значений тернарной кубической формы // Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 2001. №5, с. 29 – 32.

[5] Баядилов Е. Е. О среднем значении функции делителей Дирихле на значениях тернарной кубической формы // Тезисы докладов IV Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и её приложения», Тула, 2(2001), с. 20.

[6] Баядилов Е. Е. О среднем значении функции делителей от тернарной кубической формы // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Душанбе, Институт математики Академии наук Республики Таджикистан, 2009.

[7] Dirichlet L. Über die Bestimmung der mitteleren Werte in der Zahlentheorie, Abh. Akad. Berlin (Werke, 2, 49–66). (1849), 69–83.

[8] Вороной Г. Ф. Sur un probleme du calcul des fonctions asymptotiques. Fur die reine und angewandte math., (126)1903, 241 – 282.

[9] Landau E. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. Göttingen Nachrichten, (1912), 687 – 771.

[10] Hardy G. H., Littlewood J. E. The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz. Proc. London Math. Soc. (2),(1922), 39 – 74.

[11] Hardy G. H. On Dirichlet‘s divisor problem. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 15, (1915), 1–25.

[12] Corput J. G. van der Verscharfung der Abschatzubgen beim Teilerproblem. Math. Ann. 87(1922), 39 – 65.

[13] Tong K. C. On divisor problems. Acta Math. Sinica 2(1952), 258 – 266.

[14] Walfisz A. Uber zwei Gitterpunktprobleme. math. annalen, 95(1926), 69 – 83.

[15] Atkinson F. A divisor problem. Quarterly Joun. Math. (Oxford), 12(1941), 193 – 200.

[16] Chih D. T. The Dirichlet divisor problems. Science report of Tsing Hua Uni, (1950), 402 – 427.

[17] Richert H. E. Vershärfung der Abschärzung beim Dirichletschen Teilerproblem. Math. Z. 58(1953), 204 – 218.

[18] Richert H. E. Einfuhrung in die Theorie der starken Rieszchen Summierbarkeit von Dirichletreihen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (Math. Physik), (1960), 17 – 75.

[19] Chen Jing-run On the divisor problem for $d_3(n)$ // Sci. Sinica, 1965, №14, pp. 19 – 29.

[20] Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их применения // Труды МИАН СССР, 112(1971), 241 – 255.

[21] Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР, Серия математическая, 1972, т. 36, №3, с. 475 – 483.

[22] Колесник Г. А. Улучшение остаточного члена в проблеме делителей // Математические заметки 2(1969), 117 – 128.

[23] Iwaniec H., Mozzochi C. J. On the Divisor of Circle Problems. Number Theory 29(1988), 60 – 93.

[24] Ivič A. Some recent results on the Riemann zeta – function. // Proc. of the Intern. Number Theory Conf. (1989).

[25] Ivič A., Quellet M. Some new estimates in the Dirichlet divisor problem. // Acta Math. Arithmetica, 52(1989), 241 – 253.

[26] Ivič A. Riemann Zeta-function, M, Wiley,New-York, 1985.

[27] Архипов Г. И., Баядилов И. Е., Чубариков В. Н. Об абсциссе Карлсона в проблеме моментов дзета-функции Римана // Доклады Российской Академии наук. 2003. Т. 392. №1. С. 10 – 11.

[28] Архипов Г. И., Баядилов И. Е., Чубариков В. Н. Об абсциссе и экспоненте Карлсона в проблеме моментов дзета–функции // Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 2004.№1, 42 – 45.

[29] Баядилов Е. Е. Об оценках дзета–функции Римана на критической прямой // Тезисы Международной конференции «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в третьем тысячелетии» (Алматы, 26–28 октября, 2000)», 2000 с. 30.

[30] Баядилов Е. Е. Об оценках дзета–функции Римана в окрестности прямой $\Re s = 1$ // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень 2(2000), 42–49.

[31] Колпакова О. В. О средних значениях арифметических функций. Кандидатская диссертация, М., МГУ, 2006.

[32] Колпакова О. В. О новых оценках остаточного члена асимптотической формулы в многомерной проблеме делителей Дирихле // Математические заметки. 2011. Том 89, выпуск 4. С. 530 – 546.

[33] Колпакова О. В. О средних Рисса для обобщения функции делителей // Тезисы докладов VI Международной конференции «Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения», Саратов, 13–17 сентября, 2004г. с. 72.

[34] Kulas M. Refinement of an estimate for the Hurwitz zeta-function a neighbourhood of the line $\sigma = 1$, Acta Arithmetics. 1999. V. 89, №4, 301 – 309.

[35] Тырина О. В. Новая оценка интеграла И. М. Виноградова // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 51, №2, С. 363 – 376.

[36] Тырина О. В. Средние значения тригонометрических сумм. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова, 1989.

[37] Bombieri E., Iwaniec H. On the order of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$. Ann.sur Pisa Norm., 14(4), 1986, 449 – 472.

[38] Bombieri E., Iwaniec H. Some mean value theorems for exponential sums. Ann.sur Pisa Norm. Sc., 14(4), 1986, 473 – 486.

[39] Ford K. Vinogradov‘s integral and bounds for the Riemann zeta–function // Proc. London Math. Soc., (3), 85:3 (2002), 565 – 633.

[40] Fujii A. On the problem of divisors // Acta Arithmetics. 1976. V. 31, №4, 355 – 360.

[41] Пантелеева Е. И К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 4, С. 494 – 505.

[42] Закзак А. Проблема делителей Дирихле в редких последовательностях // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова, 1993.

[43] Солиба Х. М. О среднем значении тернарной функции делителей на последовательности нецелых степеней натуральных чисел // Материалы Международной Конференции по аналитической теории чисел. Москва. МГУ. 1997. С. 30.

[44] Архипов Г. И., Чубариков В.И. Три теоремы о тригонометрических суммах из анализа // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 14. С. 19 – 29.

[45] Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О некоторых формулах суммирования // Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 1987.№5. С. 29 – 32.

[46] Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О распределении простых чисел в последовательности вида $[n^c]$// Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 1999.№6, 25 – 35.

[47] Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Серия математическая. 1972. Т. 36, №3, С. 475 – 483.

[48] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана // Москва. Наука. 1994. 376 с.

[49] Колпакова О. В. Об одном аналоге формулы Перрона // Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 2003. №1. С. 23 – 25.

[50] Колпакова О. В. Об одном обобщении формулы Перрона // Тезисы докладов IV Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и ее приложения», Тула, 10 – 15 сентября, 2001 г. с. 69 – 70.

[51] H. Iwaniec, E. Kowalski Analytic number theory, Providence, Rhode Island American Mathematical Society, 2004.

[52] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-ое изд, М.: Наука, 1983.

[53] Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М.; Л.: ГТТИ, 1934.

[54] Тичмарш Е. К. Теория функций. М.: Наука, 1980.

[55] Виноградов И. М. Основы теории чисел – М.:Наука, 1981г., 176с.

[56] Тичмарш Е. К. Теория дзета–функции Римана. М.: ИЛ, 1953.

[57] Колпакова О. В. Об оценках абсциссы Карлсона для нецелых показателей степени осреднения // Вестник Московского Университета. Серия 1, математика. механика, 2006. №6, 45 – 48.

[58] Колпакова О. В. О теореме Карлсона для нецелых степеней дзета-функции Римана // Тезисы докладов V Международной конференции «Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения». Тула. 19 – 20 сентября 2003 г. С. 57 – 58.

[59] Graham S.W., Kolesnik G. Van der Corput's method of exponential sums Cambridge University Press, 1991.

[60] Камарадинова З. Н. Средние Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы. // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 5. С. 353 – 357.

[61] Рахмонов З. Х., Камарадинова З. Н. Асимптотическая формула для среднего Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2013. № 3(152). С. 7 – 18.

[62] Камарадинова З. Н. Производящая функция для числа решений представлений тернарной кубической формы в виде суммы двух квадратов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57, № 11 – 12. С. 831 – 834.

[63] Камарадинова З. Н. Средние Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: естественные и экономические науки. 2014. № 2(29). Ч. 1. С. 312 – 320.

[64] Камарадинова З. Н. О средних Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы // // Вестник Таджикского национального универститета. 2015. № 2. С. 35 – 42.

[65] Камарадинова З. Н. О средних Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и их приложений», посвященной 60–летию академика Камолиддина Хамроевича Бойматова. Душанбе, 23–24 июня 2010 г., с.53–54.

[66] Камарадинова З. Н. О средней Рисса функции делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теорий дифференциальных уравнений и математического анализа», посвященной 80–летию академика АН Республики Таджикистан Джураева Абдухамида Джураевича, Душанбе, 07–08 декабря 2012 г., с.40–43.

[67] Камарадинова З. Н. Асимптотическая формула для функций делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы, с весом Рисса. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы теорий функций и дифференциальных уравнений», посвященной 85–летию академика АН Республики Таджикистан Михайлова Леонида Григорьевича, Душанбе, 17–18 июня 2013 г., с.72–73.

[68] Камарадинова З. Н. Асимптотическая формула для функций делителей, распространенной на значения тернарной кубической формы. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа, алгебры и теории чисел», посвященной 85–летию со дня рождения, профессора Бабаева Гафура Бабаевича, Душанбе, 25–26 октября 2013 г., с.62–72.