Отзыв официального оппонента на диссертацию Камарадиновой Заррины Нусратуллоевны *“Средние Рисса арифметических функций, распространенных на значения тернарной кубической формы”*, представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация посвящена задачам аналитической теории чисел, её основным предметом исследования является представления производящего ряда функции числа решений представлений тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 3z_1z_2z_3$ в виде суммы двух квадратов через дзета-функции Римана и L – функций Дирихле, а также вывод асимптотических формул для «среднего Рисса» веса $\alpha \geq 0$ многомерной функции делителей, и функции суммы квадратов, распространённых на значения тернарной кубической формы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Первый параграф каждой главы носит вспомогательный характер.

Во введении даётся краткий исторический обзор по теме диссертации, обосновывается актуальность темы, приводятся основные результаты, полученные автором, излагается вкратце содержание диссертации.

Основным результатом первой главы является теорема 1.1 о представлении производящего ряда функции $s(n) = \rho(n)t(n)$ в виде

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^s} = \zeta^2(s)L(s, \chi_3)L^2(s, \chi_4)L(s, \chi_{12})\mathscr{B}(s),$$

где χ_q — неглавный характер по модулю q, $\mathscr{B}(s)$ сходится абсолютно в области $\Re s > 0,5$. Напомним, что $s(n)$ – мультипликативная функция, и это свойство следует из мультипликативности функций $\rho(n)$ и $t(n)$, где $4\rho(n) = r(n)$ – число решений уравнения $x_1^2 + x_2^2 = n$ в целых числах x_1 и x_2, а $3t(n) = t_0(n)$ – количество решений диофантова уравнения $n = \varphi(z_1, z_2, z_3)$ в целых числах z_1, z_2 и z_3.

Вторая глава посвящена среднему Рисса веса $\alpha > 0$ коэффициентов ряда Дирихле, а именно выводу аналога формулы Перрона для средних Рисса веса α коэффициентов ряда Дирихле

$$\Phi(x, \alpha) = \sum_{n \leq x} a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\alpha}.$$

Следует заметить, что аналогичный результат доказала О.В. Колпакова.

Во втором параграфе третьей главы доказывается теорема 3.1 об асимптотической формуле для “среднего Рисса” веса $\alpha \geq 0$ многомерной функции делителей, распространённой на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha \geq 0$ – произвольное вещественное число, тогда при $k > 3k_1(1+\alpha)$, $k_1 = 79,95$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$T_{\alpha,k}(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3) \leq x} \tau_k(\varphi(z_1, z_2, z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1, z_2, z_3)}{x}\right)^{\alpha} = xQ_{2k-1}(\ln x) + R_{\alpha,k}(x),$$

где $Q_{2k-1}(y)$ — многочлен степени $2k-1$, определяемым равенством

$$xQ_{2k-1}(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^{2k}(s)L^k(s,\chi)g_k(s)x^s B(s,\alpha+1),$$

кроме того, для остаточного члена $R_{\alpha,k}(x)$ справедлива оценка вида

$$R_{\alpha,k}(x) \ll_\varepsilon x^{1-\delta_{k,\alpha,a}+\varepsilon}, \quad \delta_{k,\alpha,a} = \left(\frac{2+3\alpha}{6a(k-k_1)}\right)^{2/3}, \quad a \le 4,45.$$

Теорема 3.1 доказывается методом комплексного интегрирования с использованием основной теоремы второй главы, то есть аналога формулы Перрона для средних Рисса веса α коэффициентов ряда Дирихле, представлении производящего ряда функции $\tau_k(n)t(n)$ доказанной Е.Е. Баядиловым, соотношением

$$T_{\alpha,k}(x) = 3\sum_{n\le x} \tau_k(n)t(n)\left(1-\frac{n}{x}\right)^\alpha,$$

и является обобщением для "среднего Рисса" веса $\alpha \ge 0$, теоремы Е.Е. Баядилова об асимптотической формуле для среднего значения $T_{0,k}(x)$ и теоремы О.В. Колпаковой о средних Рисса многомерной функции делителей с произвольным значением веса $\alpha \ge 0$ в случае, когда множество натуральных чисел, не превосходящих x, заменяется на множество значений тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$, не превосходящих x.

В третьем параграфе третьей главы прилагая результаты предыдущих глав, а именно: теорему 1.1 о представлении производящего ряда функции $s(n)=\rho(n)t(n)$; теорему 2.1 об аналоге формулы Перрона для средних Рисса веса α коэффициентов ряда Дирихле, методом контурного интегрирования для "среднего Рисса" веса $\alpha \ge 0$ функции суммы квадратов, распространённых на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$ доказана асимптотическая формула

$$S_\alpha(x) = \sum_{\varphi(z_1,z_2,z_3)\le x} r(\varphi(z_1,z_2,z_3))\left(1-\frac{\varphi(z_1,z_2,z_3)}{x}\right)^\alpha = 12xQ_\alpha(\ln x) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где $Q_\alpha(y)$ — линейный многочлен, определяемый равенством

$$xQ_\alpha(\ln x) = \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta^2(s)L(s,\chi_3)L^2(s,\chi_4)L(s,\chi_{12})\mathscr{B}(s)x^s B(s,\alpha+1).$$

Полученные в диссертации результаты являются новыми, они обоснованы подробными доказательствами и заключаются в следующем:

- получено представление производящего ряда функции число решений представлений тернарной кубической формы в виде суммы двух квадратов через дзета-функции Римана и L – функции Дирихле;

- доказана асимптотическая формула для "среднего Рисса" веса $\alpha \ge 0$ многомерной функции делителей, распространённой на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1,z_2,z_3)$.

- доказана асимптотическая формула для "среднего Рисса" веса $\alpha \geq 0$ функции суммы квадратов, распространённой на значения тернарной кубической формы $\varphi(z_1, z_2, z_3)$.

В целом результаты представляют научный интерес в аналитической теории чисел. Имеющиеся в диссертации отдельные опечатки редакционного и стилистического характера не вносят особых трудностей при её чтении.

Результаты диссертации актуальны, они относятся к современной области исследований, развивающей классическую теорию. Диссертант внес ряд новых оригинальных идей, получил новые интересные результаты. Основные результаты работы прошли надлежащую апробацию и опубликованы в пяти статьях. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Диссертация является научно-квалификационной работой, содержащей решения задач, имеющих существенное значение для аналитической теории чисел. Она соответствует критериям, которым должны отвечать диссертации на соискание ученых степеней п.9 «Положения о порядке присуждения учёных степеней», предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор Камарадинова Зарина Нусратуллоевна заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

доктор физико–математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Механико-математического факультета
ФГБОУ ВПО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова» **В.Г. Чирский**

Подпись профессора В.Г.Чирского заверяю,
декан Механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова, д.ф.-м.н., профессор **В.Н. Чубариков**