

## Отзыв

официального оппонента на диссертацию Камарадиновой Заррины Нусратуллоевны «Средние Рисса арифметических функций, распространенных на значения тернарной кубической формы», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

**Актуальность темы.** Одним из важных направлений в аналитической теории чисел является нахождение асимптотического поведения средних значений функций  $\tau_k(f(\bar{z}))$  и  $r(f(\bar{z}))$ , где  $f(\bar{z})$  — целозначный многочлен от нескольких переменных  $\bar{z} = (z_1, \dots, z_m)$ , к которому можно отнести основные задачи, рассматриваемые в диссертации и нахождение асимптотик для сумм вида

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n) \tau_l(n+a) = \sum_{z_1 \dots z_l \leq x} \tau_k(z_1 \dots z_l + a),$$

где  $k, l \geq 2$ . Исследованию при  $k = 2, l \geq 2$  посвящены фундаментальные работы Т. Эстермана, Титчмарша, К. Хооли, Линника, Бредихина, Мотохашаи, Тимофеева, А.И. Виноградова и других математиков. Многие авторы наряду со средним значением вышеупомянутых арифметических функций также рассматривают их “среднее Рисса” веса  $\alpha, \alpha \geq 0$ . В частности А.А. Карацуба получил асимптотическую формулу для среднего Рисса веса  $\alpha = 1$  многомерной функции делителей и с помощью метода асимптотического дифференцирования использовал найденную формулу для нахождения асимптотики её среднего значения. Отметим также работы опубликованные в последние годы Х.Т. Нгуеном, Е.Е. Баядиловым и О.В. Колпаковой, основные результаты которых, подробно изложены во введении диссертации.

**Структура и содержание работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Первый параграф каждой главы носит вспомогательный характер.

Во введении содержится краткий обзор результатов, относящихся к теме диссертации, обосновывается актуальность темы, а также формулируются её основные результаты.

Первая глава посвящена производящему ряду функции  $s(n) = \rho(n)t(n)$ , где  $\rho(n)$  и  $t(n)$  мультипликативные функции,  $4\rho(n)$  — число решений уравнения  $x_1^2 + x_2^2 = n$  в целых числах  $x_1$  и  $x_2$ ,  $3t(n)$  — число решений уравнения  $n = \varphi(z_1, z_2, z_3)$  в целых числах  $z_1, z_2$  и  $z_3$  и её основным результатом является следующая формула представления

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n^s} = \zeta^2(s) L(s, \chi_3) L^2(s, \chi_4) L(s, \chi_{12}) \mathcal{B}(s),$$

где  $\chi_q$  — неглавный характер по модулю  $q$ ,  $\mathcal{B}(s)$  сходится абсолютно в области  $\Re s > 0,5$ . Следует заметить, что возможность использования мультипликативных свойств коэффициентов искомого производящего ряда Дирихле  $f(s)$  заранее не очевидна.

Основным результатом второй главы является теорема о связи между средним Рисса веса  $\alpha > 0$

$$\Phi(x, \alpha) = \sum_{n \leq x} a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right)^\alpha.$$

коэффициентов ряда Дирихле и функцией  $f(s)$ , задаваемой этим рядом, которая доказывается аналогично как основной теореме в методе комплексного интегрирования о выражении сумматорной функции коэффициентов ряда Дирихле через функцию  $f(s)$  с применением основных свойств гамма-функции Эйлера и бета-функции Эйлера.

Основными результатами третьей главы являются теоремы 3.1 и 3.2.

Теорема 3.1 посвящена асимптотической формуле для “среднего Рисса” веса  $\alpha \geq 0$  многомерной функции делителей, распространённой на значения тернарной кубической формы  $\varphi(z_1, z_2, z_3)$ , которая доказывается с использованием основной теоремы второй главы, представления производящего ряда функции  $\tau_k(n)t(n)$ , доказанной Е.Е. Баядиловым, соотношением

$$T_{\alpha, k}(x) = 3 \sum_{n \leq x} \tau_k(n)t(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^\alpha.$$

Эта теорема является обобщением для “среднего Рисса” веса  $\alpha \geq 0$ , теоремы Е.Е. Баядилова об асимптотической формуле для среднего значения  $T_{0, k}(x)$  и теоремы О.В. Колпаковой о средних Рисса многомерной функции делителей с произвольным значением веса  $\alpha \geq 0$  в случае, когда множество натуральных чисел, не превосходящих  $x$ , заменяется на множество значений тернарной кубической формы  $\varphi(z_1, z_2, z_3)$ , не превосходящих  $x$ .

Теорема 3.2 является приложением результатов предыдущих глав, а именно: теоремы 1.1 о представлении производящего ряда функции  $s(n) = \rho(n)t(n)$ ; теоремы 2.1 об аналоге формулы Перрона для средних Рисса веса  $\alpha$  коэффициентов ряда Дирихле, для “среднего Рисса” веса  $\alpha \geq 0$  функции суммы квадратов, распространённых на значения тернарной кубической формы  $\varphi(z_1, z_2, z_3)$  доказана асимптотическая формула

$$S_\alpha(x) = \sum_{\varphi(z_1, z_2, z_3) \leq x} r(\varphi(z_1, z_2, z_3)) \left(1 - \frac{\varphi(z_1, z_2, z_3)}{x}\right)^\alpha = 12xQ_\alpha(\ln x) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

где  $Q_\alpha(y)$  — линейный многочлен, определяемый равенством

$$xQ_\alpha(\ln x) = \operatorname{Res}_{s=1} \zeta^2(s)L(s, \chi_3)L^2(s, \chi_4)L(s, \chi_{12})\mathcal{B}(s)x^s B(s, \alpha + 1).$$

**Степень достоверности результатов проведенных исследований.** Основные результаты диссертации снабжены строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов теории чисел и комплексного анализа, а именно:

- методы дзета-функции Римана и  $L$  – функций Дирихле;

- метод контурного интегрирования;
- метод производящих рядов Дирихле.

**Новизна и практическая значимость, ценность научных работ соискателя.** Основные результаты диссертационной работы являются новыми и заключаются следующем:

- получено представление производящего ряда функции числа решений представлений тернарной кубической формы в виде суммы двух квадратов через дзета-функции Римана и  $L$ -функции Дирихле;
- доказана асимптотическая формула для “среднего Рисса” веса  $\alpha \geq 0$  многомерной функции делителей, распространённой на значения тернарной кубической формы  $\varphi(z_1, z_2, z_3)$ .
- доказана асимптотическая формула для “среднего Рисса” веса  $\alpha \geq 0$  функции суммы квадратов, распространённой на значения тернарной кубической формы  $\varphi(z_1, z_2, z_3)$ .

Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты, а также используемый новый подход могут быть основой для дальнейшего исследования задач о представлении производящего ряда функции числа решений представлений целочисленных форм в виде суммы двух квадратов или произведений конечного числа натуральных чисел, а также вывода асимптотических формул для “среднего Рисса” веса  $\alpha \geq 0$  многомерной функции делителей, и функции суммы квадратов, распространённых на значения этих форм. Их можно рекомендовать для использования на спецкурсах и исследованиях, проводимых в научных коллективах МИРАН, в МГУ им. М.В. Ломоносова, в МГПУ и в Таджикском национальном университете.

**Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем и апробация.** Основные результаты работы и опубликованы в 9 работах, в том числе 4 статьи – в журналах из списка ВАК РФ, рекомендуемых для кандидатских диссертаций и прошли надлежащую апробацию на научно-исследовательских семинарах и международных конференциях.

**Замечания.** Критических замечаний по оформлению и содержанию диссертации, влияющих на общую оценку, у меня нету. Имеющиеся в диссертации отдельные опечатки редакционного и стилистического характера не вносят особых трудностей при её чтении.

**Выводы.** Автореферат полно и точно отражает содержание диссертации. На основании вышеизложенного считаю, что диссертация З.Н. Камарадиновой «Средние Рисса арифметических функций, распространённой на тернарной кубической формы» представляет собой законченное самостоятельное выполненное научное исследование,

имеющее существенное значение для аналитической теории чисел, соответствующее критериям, установленным Положением о порядке присуждения учёных степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09 2015 г. №842, а её автор заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры алгебры и теории чисел  
Таджикского государственного  
педагогического университета им. С.Айни  
734003, город Душанбе, проспект Рудаки 121  
E-mail: umidchoryev@mail.ru



У. Чариев

Подпись Чариева У. заверяю учёный секретарь  
Таджикского государственного  
педагогического университета им. С.Айни



Додобоева М.С.